агента, поэтому целесообразно рассмотреть модель с ограничениями на размер наблюдения.

Предложена модификация алгоритма разметки для системы $(A2, p_1, p_2)$, состоящей из агента $A2$ и камней двух видов: одного камня $p_1$ для обозначения текущей вершины и нескольких камней $p_2$ для обозначения непомеченных вершин из её 2-окрестности. Число камней $p_2$ не превышает максимальной степени вершин графа.

**Теорема 1.** При решении задачи построения Д-разметки вершин помеченного графа агент $A3$ и система $(A2, p_1, p_2)$ эквивалентны по вычислительной мощности.

Для графов типа $n$-цепь, $n$-веер, $n$-угольник [2] разработана модификация алгоритма разметки агентом $A2$ без использования камней и без запоминания неявных имён вершин. Показано, что разметка $n$-цепи и $n$-угольника может быть выполнена конечным автоматом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudek G. and Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
2. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.

УДК 519.1

# ОБ ИНДЕКСАХ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ЦИКЛОВ

А. В. Жаркова

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S, \delta)$, где $S$ — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — ориентированный граф с множеством вершин $S$ и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относится индекс состояния — расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние. Программа [1] позволяет вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов.

В данной работе предлагается алгоритм для подсчёта индексов состояний в динамической системе двоичных векторов, порожденных такими графами, как циклы. Определяется также максимальный из индексов системы заданной размерности.

На множестве $B = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} B^n$, где через $B^n$, $n > 2$, обозначается множество всех двоичных векторов длины $n$, рассмотрим динамическую систему $(B, \theta)$. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, полученном путем одновременного применения следующих правил: I) если первой компонентой в $v$ является 0 и последней компонентой — 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней — 0;

II) если в составе $v$ имеются диграммы вида 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01; III) других отличий между $v$ и $\theta(v)$ нет.

Каждое состояние размерности $n$ при динамике переходит в состояние той же размерности. Таким образом, система $(B,\theta)$ разбивается на конечные подсистемы $(B^n,\theta)$, $n > 2$.

Динамическая система $(B^n,\theta)$, $n > 2$, изоморфна динамической системе $(C_n,\theta)$, которая вводится следующим образом: её состояниями являются всевозможные ориентации цикла длины $n$, а эволюционная функция у данного ориентированного цикла переориентирует все дуги, входящие в стоки (вершины с нулевой степенью исхода), а все остальные дуги оставляет без изменения. Динамическая система, состояниями которой являются бесконтурные ориентированные графы, с определенной таким образом эволюционной функцией введена в [2].

Будем считать два вектора *циклически идентичными*, если один получается из другого циклическим сдвигом.

**Теорема 1.** Состояния динамической системы $(B^n,\theta)$, $n > 2$, являющиеся циклически идентичными, имеют одинаковые индексы.

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность* вектора $v$, то есть количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учётом циклического сдвига. Например, $p_c(11001011) = 1 + 3 = 4$. Очевидно, что для состояния $v$ системы $(B^n,\theta)$, $n > 2$, имеет место $0 \leqslant p_c(v) \leqslant n$. Под *циклическим блоком* будем понимать максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве $>1$ с учетом циклического сдвига. Длина блока — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через $p_c^0$, $p_c^1$ суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

Под *блок-группой* будем понимать последовательность компонент вектора, возможно при циклическом сдвиге, начинающуюся с 0-блока и заканчивающуюся 1-блоком. Под *первичной блок-группой* будем понимать блок-группу, в которой сначала идут только 0-блоки, затем только 1-блоки.

**Алгоритм вычисления индекса состояния системы** $(B,\theta)$

Индекс $i(v)$ состояния $v$ системы $(B,\theta)$ вычисляется исходя из его представления в виде вектора.

I. Если $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$, то $i(v) = 0$.

II. Если $p_c^0 \neq 0$ и $p_c^1 \neq 0$, то выполняем следующие действия.

1. Помечаем в векторе все первичные блок-группы. Их количество обозначаем через $h$.
2. В каждой блок-группе подсчитываем суммы длин 0- и 1-блоков. Пусть $0 < j \leqslant h$, тогда считаем $p^0_{c(j)}$, $p^1_{c(j)}$ и помечаем блок-группы знаками «$-(x)$», «=» и «$+(x)$», если в них $p^0_{c(j)} > p^1_{c(j)}$, $p^0_{c(j)} = p^1_{c(j)}$, $p^0_{c(j)} < p^1_{c(j)}$ соответственно, где $x = |p^0_{c(j)} - p^1_{c(j)}|$.
3. Если в векторе существуют одновременно «$-$» и «$+$» блок-группы, то идём в п. 4, иначе идём в п. 5.
4. Если в векторе подряд стоят «$-(x)$» блок-группа и «$+(y)$» блок-группа (без учёта остальных компонент и «=»-групп между ними, если они имеются), то объединяем их в одну блок-группу, включая возможно стоящие между ними компоненты и «=»-группы (их количество в данном случае обозначим за $h_=$), и помечаем знаком «$-(x-y)$», «=» или «$+(y-x)$», если $x > y$, $x = y$, $x < y$ соответственно. Полагаем $h := h - 1 - h_=$ и идём в п. 3.

5. Считаем $i_j$, $0 < j \leqslant h$, согласно следующим правилам:
- в «$-$» блок-группе $i_j = t_j/2 - 1$, где $t_j$ — длина той части данной блок-группы (если её рассматривать с конца циклически влево), в которой выполняется равенство $p_c^0 = p_c^1$;
- в «$=$» блок-группе $i_j = l_j/2 - 1$, где $l_j$ — длина рассматриваемой блок-группы;
- в «$+$» блок-группе $i_j = t_j/2 - 1$, где $t_j$ — длина той части данной блок-группы (если её рассматривать с начала циклически вправо), в которой выполняется равенство $p_c^0 = p_c^1$.
6. $i(v) = \max\limits_{0<j\leqslant h} i_j$.

**Теорема 2.** Предложенный алгоритм вычисления индекса состояния динамической системы $(B, \theta)$ корректен.

**Следствие 1.** Система $(B^n, \theta)$, $n > 2$, имеет максимальный индекс, равный $(n-1)/2 - 1$ при нечетном $n$ и $n/2 - 1$ при четном $n$.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [3].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидет. РОСПАТЕНТа №2009614409, зарегистр. 20 августа 2009.
2. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
3. *Жаркова А. В.* Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. 2012. №2(12). С. 79–85.


УДК 519.1

# КОНГРУЭНЦИИ ЦЕПЕЙ: НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА

Е. О. Карманова

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где $V$ — конечное непустое множество вершин, а $\alpha$ — отношение смежности на $V$.

Пусть $\varepsilon$ — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин $V$ орграфа $G$. Фактор-графом орграфа $G$ по эквивалентности $\varepsilon$ называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где $V/\varepsilon$ — множество классов эквивалентности $\varepsilon$, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1) \exists u_2 \in \varepsilon(v_2)\, ((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть $K$ — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией $K$-графа $G$ называется такое отношение эквивалентности $\theta$ на $V$, что фактор-граф $G/\theta$ является $K$-графом.

Возьмём в качестве класса $K$ класс неориентированных графов. Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где $\alpha$ — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$. Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности $\theta$ на множестве вершин графа $G$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый $\theta$-класс образует в $G$ независимое подмножество.

**Теорема 1.** Количество конгруэнций $m$-реберной цепи равно количеству эквивалентностей на $m$-элементном множестве.