

стых подмножеств множества источников в орграфе, представляющем состояние s' , которые смежны со всеми стоками. Тогда количество непосредственных предшественников данного состояния s' равно количеству таких подмножеств; если же для данной ориентации графа таких подмножеств не существует, то такое состояние является начальным.

Определение 1. Множество источников ориентированного графа назовем *допустимым*, если из него в каждый сток этого графа есть дуга.

Теорема 1. Ветвление данного состояния s динамической системы (Γ_G, α) равно:

- 1) количеству допустимых множеств источников в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s , если в $\vec{G}$ есть стоки;
- 2) количеству различных подмножеств множества источников, включая пустое, в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s , если в $\vec{G}$ нет стоков.

Следствие 1. Состояние s динамической системы (Γ_G, α) недостижимо тогда и только тогда, когда в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s , есть по крайней мере один сток и при этом нет ни одного допустимого множества источников, или, другими словами, когда существует хотя бы один сток в $\vec{G}$, не смежный с источниками.

Следствие 2. Для нена начального состояния s динамической системы (Γ_G, α) все его непосредственные предшественники определяются:

- 1) всеми различными допустимыми множествами источников в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s , если в $\vec{G}$ есть стоки;
- 2) всеми подмножествами множества источников, включая пустое, в орграфе $\vec{G}$, представляющем состояние s , если в $\vec{G}$ нет стоков.

Это определение происходит следующим образом: все дуги, исходящие из всех источников соответствующего множества, переориентируются, а все остальные дуги остаются без изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова А. В. Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
2. Barbosa V. C. An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.
3. Власова А. В. Об одной динамической системе / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2007. 17 с. Библиогр.: 2 назв. Рус. Деп. в ВИНТИ 17.12.07, № 1181-B2007.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РЁБЕРНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПАЛЬМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. Д. Комаров

Описаны минимальные рёберные 1-расширения графов специального класса — двулистных пальм.

Ключевые слова: расширения графов, деревья, пальмы.

Ф. Харари и Дж. Хейз в работе [1] рассматривают граф как модель некоторой технической системы. Вершины графа — её элементы, а ребра — связи между ними. Отказ связи системы рассматривается как удаление соответствующего этой связи ребра. При такой интерпретации минимальное рёберное k -расширение графа, моделирующего некоторую систему Σ , является моделью оптимальной рёберной k -отказоустойчивой реализации системы Σ .

Задача нахождения минимального рёберного расширения произвольного графа является NP-полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых можно построить минимальное рёберное расширение аналитически.

Определение 1. Назовём граф G^* рёберным k -расширением графа G , если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k ребер.

Определение 2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется минимальным рёберным k -расширением графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является рёберным k -расширением G ;
- 2) $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Определение 3. *Сверхстройным деревом* называется корневое дерево, где степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 2, а степень корня более 2.

Альтернативное определение:

Граф G называется сверхстройным деревом, если он является объединением $s > 2$ цепей $P_1, \dots, P_s$ с общей концевой вершиной.

Определение 4. Назовем сверхстройное дерево p -листной пальмой высоты r , если оно образовано объединением $s > 2$ цепей $P_1, \dots, P_s$ с общей концевой вершиной, причём длина цепи P_1 равна r , а длины остальных цепей равны 1.

Определение 5. Назовем *рогатым циклом* длины n с k рогами граф, полученный из n -звенного цикла и k трёхзвенных циклов таким образом, что каждый из трёхзвенных циклов имеет ровно одно общее ребро с n -звенным циклом и ни один из трёхзвенных циклов не имеет общих рёбер с другими трёхзвенными циклами. При этом назовём n -звенный цикл *телом* рогатого цикла, а трёхзвенные циклы — его *рогами*.

Определение 6. Назовём *разреженностью* рогатого цикла длину максимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогами, проходящего по рёбрам, не принадлежащим ни одному из рогов.

На рис. 1 показаны рогатый цикл длины 6 с тремя рогами и разреженностью 2 (а) и рогатый цикл длины 8 с двумя рогами и разреженностью 3 (б).

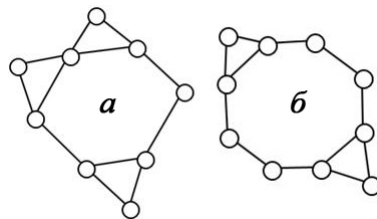


Рис. 1. Примеры рогатых циклов

Теорема 1. Пусть граф G — двулистная пальма высоты n , $n > 3$. Тогда рогатый цикл G_1 с количеством рогов $p = \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 2$, длиной $n_1 = n - p + 3$ и разреженностью меньше 5 является минимальным рёберным 1-расширением графа G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F. and Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
2. Абрисимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 643–650.

УДК 519.174

ДЕРЕВЬЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАФОВ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТОВ С ЛИНЕЙНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ВЕРШИНАХ

А. С. Корниенко

Получено описание функционального графа дискретной динамической системы, являющейся моделью регуляторного контура генной сети.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, циркулянт, генная сеть, регуляторный контур, функциональный граф.

Пусть даны $n \geq 3$, $\{d_1, d_2, \dots, d_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$ и ориентированный граф $G_{n;d_1, d_2, \dots, d_k}$ с множествами вершин $\{0, 1, \dots, n-1\}$ и дуг $\{\vec{ij} : (j-i) \equiv d_r \pmod{n}, r = 1, 2, \dots, k\}$. Матрица смежности таких графов называется циркулянтом. Эти графы также принято называть *циркулянтами* [1].

Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему. В каждый момент времени вершины циркулянта $G_{n;d_1, d_2, \dots, d_k}$ помечены элементами $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ из конечного поля F_q порядка q . Набор $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in F_q^n$ назовём *состоянием системы*. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением

$$A_{f,q} : F_q^n \rightarrow F_q^n,$$

где $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ и новая метка каждой вершины i является значением функции $f_i : F_q^k \rightarrow F_q$, аргументы которой принимают значения старых меток в тех вершинах, дуги из которых входят в вершину i .

Функциональным графом $G_{f,q}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы F_q^n , причём дуга из вершины $\tilde{v}$ идёт в вершину $\tilde{u}$ тогда и только тогда, когда $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$.

В работе рассматривается структура функционального графа в случае, когда $q = 2$, все функции f_i равны между собой и линейны и отображение $A_{f,2}$ действует следующим образом:

$$A_{f,2}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

$$u_i = v_{i-1} + v_i + v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{где } v_{-1} = v_{n-1}, v_n = v_0.$$

С использованием методов, изложенных в [2], доказаны следующие свойства функционального графа $G_{f,2}$:

- если n не кратно 3, то отображение $A_{f,2}$ обратимо и функциональный граф $G_{f,2}$ является дизъюнктивным объединением простых контуров;