Теорема 1. Пусть граф G — двулистная пальма высоты n, $n > 3$. Тогда рогатый цикл G_1 с количеством рогов $p = \left[\dfrac{n-4}{6}\right] + 2$, длиной $n_1 = n - p + 3$ и разреженностью меньше 5 является минимальным рёберным 1-расширением графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
2. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 643–650.

УДК 519.174

ДЕРЕВЬЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАФОВ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТОВ С ЛИНЕЙНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ВЕРШИНАХ

А. С. Корниенко

Получено описание функционального графа дискретной динамической системы, являющейся моделью регуляторного контура генной сети.

Ключевые слова: *дискретная динамическая система, циркулянт, генная сеть, регуляторный контур, функциональный граф.*

Пусть даны $n \geqslant 3$, $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и ориентированный граф $G_{n;d_1,d_2,\ldots,d_k}$ с множествами вершин $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ и дуг $\{\overrightarrow{ij} : (j-i) \equiv d_r \pmod{n},\ r = 1, 2, \ldots, k\}$. Матрица смежности таких графов называется циркулянтом. Эти графы также принято называть *циркулянтами* [1].

Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему. В каждый момент времени вершины циркулянта $G_{n;d_1,d_2,\ldots,d_k}$ помечены элементами $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ из конечного поля F_q порядка q. Набор $\widetilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in F_q^n$ назовём *состоянием системы.* В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением

$$A_{f,q} : F_q^n \to F_q^n,$$

где $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ и новая метка каждой вершины i является значением функции $f_i : F_q^k \to F_q$, аргументы которой принимают значения старых меток в тех вершинах, дуги из которых входят в вершину i.

Функциональным графом $G_{f,q}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы F_q^n, причём дуга из вершины $\widetilde{v}$ идёт в вершину $\widetilde{u}$ тогда и только тогда, когда $A_{f,q}(\widetilde{v}) = \widetilde{u}$.

В работе рассматривается структура функционального графа в случае, когда $q = 2$, все функции f_i равны между собой и линейны и отображение $A_{f,2}$ действует следующим образом:

$$A_{f,2}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}),$$
$$u_i = v_{i-1} + v_i + v_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{где } v_{-1} = v_{n-1}, v_n = v_0.$$

С использованием методов, изложенных в [2], доказаны следующие свойства функционального графа $G_{f,2}$:

- если n не кратно 3, то отображение $A_{f,2}$ обратимо и функциональный граф $G_{f,2}$ является дизъюнктивным объединением простых контуров;

— в функциональном графе $G_{f,2}$ при $n = 3 \cdot 2^k(2m+1)$ множество вершин, принадлежащих деревьям, разбивается на 2^k уровней, причём каждая вершина дерева имеет ровно четырёх предков;
— при чётном n функциональный граф $G_{f,2}$ содержит четыре неподвижные точки, при нечётном n — две неподвижные точки;
— если $n = 2^k(2m+1)$, то все длины циклов функционального графа $G_{f,2}$ являются делителями $2^k(2^s-1)$, где $s = \min\{j : j > 0,\ 2^j \equiv \pm 1 \pmod{2m+1}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.
2. *Евдокимов А. А., Пережогин А. Л.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 3. № 3. С. 39–48.

УДК 519.6

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРИМИТИВНОСТИ ГРАФОВ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

С. Н. Кяжин

Положительным криптографическим свойством генератора гаммы, построенного на основе управляющего и генерирующего блоков, является существенная зависимость элементов состояний генерирующего блока от всех знаков начального состояния генератора. Для изучения такого рода зависимостей в рамках матрично-графового подхода введено понятие локальной примитивности неотрицательных матриц и графов. Получены условия локальной примитивности матриц. Установлена связь характеристик локальной примитивности частного класса матриц (графов) с конструктивными параметрами генераторов гаммы.

Ключевые слова: *экспонент, локальный экспонент, примитивная матрица, примитивный граф, локальная примитивность.*

Пусть $M_0(n)$ — множество всех квадратных неотрицательных матриц порядка n, $A \in M_0(n)$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$, $\varnothing \neq J \subseteq \{1, \ldots, n\}$; $A(J^2)$ — подматрица порядка r, полученная из A вычёркиванием строк и столбцов с номерами $j \neq j_1, \ldots, j_r$. Множество матриц, для которых подматрица $A(J^2)$ неотрицательна, обозначим $M_0(J^2)$.

Матрицу A назовем J^2-положительной, если положительна подматрица $A(J^2)$. Обозначим $M_+(J^2)$ полугруппу по умножению J^2-положительных матриц.

Матрица A называется квазиположительной, если все её строки и столбцы отличны от нулевых. Матрица A называется J^2-квазиположительной, если квазиположительной является подматрица $A(J^2)$. Обозначим $Q(J^2)$ множество J^2-квазиположительных матриц.

Квазиположительную матрицу A назовём J^2-примитивной, если положительна подматрица $A^t(J^2)$ матрицы A^t при любом натуральном $t \geqslant \gamma$; наименьшее такое число γ назовём J^2-экспонентом матрицы A и обозначим J^2-exp$A$. Множество J^2-примитивных матриц обозначим $P(J^2)$.

Подматрицу размера $n \times r$, полученную из A вычёркиванием столбцов с номерами $j \neq j_1, \ldots, j_r$, обозначим $A(J)$ и назовём её в соответствующих условиях J-положительной (J-квазиположительной, J-примитивной). Множества таких матриц обозначим соответственно $M_+(J)$, $Q(J)$ и $P(J)$. Наименьшее натуральное число γ, при кото-