

Секция 8

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 51-76

О ЦИКЛАХ ГРАФОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ГЕННЫХ СЕТЕЙ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И. С. Быков

Рассматривается функционирование генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями при значении параметра $p = 2$. Проведена классификация всех состояний системы в зависимости от длин серий нулей и единиц. Установлено, что все циклы графа функционирования делятся на два типа: состоящие только из состояний с длинными сериями и состоящие только из состояний с короткими сериями. Получена оценка на количество циклов в графе функционирования. Описана конструкция для построения циклов из состояний с короткими сериями.

Ключевые слова: *генные сети, пороговые функции, граф функционирования, циклы графа функционирования, состояния с длинными сериями, состояния с короткими сериями.*

В работе рассматривается функционирование дискретных моделей генных сетей [1]. Как и в [2], рассматриваются пороговые функции в вершинах с произвольным пороговым значением T .

Состоянием генной сети назовём кортеж $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, где $s_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Функционированием такой системы будем называть последовательное изменение состояний

$$S, A(S), A^2(S), A^3(S), \dots,$$

где S — некоторое состояние; A — отображение, действующее на множестве всех состояний.

Отображение A задается пороговой функцией с двумя параметрами k и T следующим образом: пусть $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, тогда $A(S) = (s'_0, s'_1, \dots, s'_{n-1})$, где

$$s'_i = \begin{cases} s_i + 1, & \text{если } \sum_{j=1}^k s_{i+j} < T \text{ и } s_i < p-1, \\ s_i - 1, & \text{если } \sum_{j=1}^k s_{i+j} \geq T \text{ и } s_i > 0, \\ s_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее операции в индексах выполняются по модулю n .

В работе рассматривается функционирование системы при $p = 2$. В этом случае

$$s'_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{j=1}^k s_{i+j} \geq T, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Графом функционирования называют ориентированный граф $G(V, D)$, где V — множество всех состояний; $D = \{(S_1, S_2) : S_1, S_2 \in V; A(S_1) = S_2\}$.

Задачей анализа функционирования называется задача описания качественных характеристик графа функционирования по заданным параметрам n, k, T .

Одной из таких задач является изучение свойств состояний, входящих в циклы графа функционирования. Рассматривая полученные свойства, можно получать оценки на количество циклов (компонент связности) графа функционирования, а также перечислять некоторые из циклов.

Выделим среди множества всех состояний два подмножества: состояния с длинными сериями и состояния с короткими сериями.

1. Состояния с длинными сериями

Определение 1. Состояние S будем называть *состоянием с длинными сериями*, если длина каждой серии из нулей не меньше $k - T + 1$, а длина каждой серии из единиц не меньше T .

Теорема 1. Любое состояние с длинными сериями лежит в цикле графа функционирования. Все состояния этого цикла также являются состояниями с длинными сериями.

В силу теоремы 1, подсчитав количество состояний с длинными сериями, можно получить, например, следующую оценку на количество циклов в графе функционирования.

Теорема 2. Количество циклов в графе функционирования системы с параметрами n, k, T не менее

$$1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor} \tilde{P}(n - (k-1)i, 2i),$$

где $\tilde{P}(a, b)$ — число циклических разбиений a на b слагаемых.

2. Состояния с короткими сериями

Определение 2. Состояние S будем называть *состоянием с короткими сериями*, если длина каждой серии из нулей не больше $k - T$, а длина каждой серии из единиц не больше $T - 1$.

Теорема 3. Если состояние лежит в цикле графа функционирования, то оно является либо состоянием с длинными сериями, либо состоянием с короткими сериями.

Обозначим вес состояния (количество ненулевых компонент) как $W(S)$.

Состояния с короткими сериями в системах с большими параметрами можно строить из подходящих систем с меньшими параметрами, используя одну из следующих двух конструкций.

Теорема 4. Пусть имеется q систем, S_i — состояние с длинными сериями в системе с параметрами n_i, k_i, T_i и отображением A_i . Тогда если для некоторых k и T и любого $0 \leq j \leq q - 1$ выполняются условия

$$k = k_j + \sum_{i=0}^{q-1} n_i - n_j, \quad T = T_j + \sum_{i=0}^{q-1} W(S_i) - W(S_j), \quad W(S) = W(A_j(S_j)),$$

то состояние $S = S_0 S_1 \dots S_{q-1}$ лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами

$$n = \sum_{i=0}^{q-1} n_i, \quad k = k_0 + \sum_{i=0}^{q-1} n_i - n_0, \quad T = T_0 + \sum_{i=0}^{q-1} W(S_i) - W(S_0)$$

и является состоянием с короткими сериями.

Теорема 5. Пусть состояние S' лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами n', k', T' и отображением A' и выполнено условие $W(S) = W(A'(S'))$. Тогда состояние

$$S = \underbrace{S' S' \dots S' S'}_m$$

лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами

$$n = mn', \quad k = k' + ln', \quad T = T' + lW(S')$$

и является состоянием с короткими сериями для всех $0 < l < m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестник Томского государственного университета. 2008. № 2. С. 18–21.
2. Быков И. С. Функционирование дискретных моделей генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Материалы IX молодежной научн. школы по дискретной математике и её приложениям. МГУ, 2013. С. 26–31.

УДК 519.17

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ Т-НЕПРИВОДИМОГО РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОРГРАФОВ

А. В. Гавриков

Предложен полиномиальный алгоритм построения одного из Т-неприводимых расширений для многоугольного орграфа. Приведено доказательство корректности алгоритма.

Ключевые слова: многоугольный орграф, отказоустойчивость дискретных систем, Т-неприводимое расширение.

Под *ориентированным графом* (или *орграфом*) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин; α — отношение на множестве V (дуги орграфа). *Вложение* орграфа $G = (V, \alpha)$ в орграф $H = (W, \beta)$ — это взаимно однозначное отображение $\varphi : V \rightarrow W$, такое, что $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \beta)$. При этом говорят, что орграф G вкладывается в орграф H . *Расширение* орграфа $G = (V, \alpha)$ — это орграф $H = (W, \beta)$, где $|W| = |V| + 1$, такой, что орграф G вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H [1]. *Тривиальное расширение* (ТР) орграфа G — это соединение $G + w$ орграфа G с вершиной w , обозначается через $\text{ТР}(G)$. *Т-неприводимое расширение* (ТНР) орграфа G — это расширение орграфа G , полученное удалением максимального множества дуг из $\text{ТР}(G)$ [2].

Ориентированные графы представляют собой математические модели дискретных систем [3]. Вопросы отказоустойчивости на данный момент сформулированы в терминах теории графов [3, 4]. Конструкции оптимальных расширений, которыми являются