$M'' : v_1 \to v_2 \to v_3 \leftarrow v_4 \leftarrow v_5 \to v_6 \leftarrow v_1$ δ-упорядоченное множество вершин содержит тоже единственную главную антицепь — $\{2, 4, 6\}$, но здесь она не является правильной, так что M'' — не шпернеров граф.

Под цепью в многоугольном графе будем понимать его максимальную собственную связную часть, в которой 1) есть хотя бы одна вершина, не являющаяся ни источником, ни стоком, и 2) любые две соседние дуги одинаково направлены. Например, цепями в графе M' являются $v_1 \to v_2 \to v_3$ и $v_1 \to v_6 \to v_5$, а в графе M'' — $v_1 \to v_2 \to v_3$ и $v_5 \to v_4 \to v_3$. Всякая цепь начинается в источнике и завершается стоком. Зигзагом в многоугольном графе назовём его максимальную собственную связную часть, в которой 1) каждая вершина является источником или стоком и 2) любые две соседние дуги противоположно направлены. Зигзаги классифицируются по виду их концевых вершин: в ss-зигзаге оба конца являются источниками; в st-зигзаге один конец источник, другой сток; в tt-зигзаге оба конца стоки. Так, в графе M' есть tt-зигзаг $v_3 \leftarrow v_4 \to v_5$, а в графе M'' имеется ss-зигзаг $v_1 \to v_6 \leftarrow v_5$.

Теорема. Многоугольный граф тогда и только тогда является шпернеровым, когда в нём нет ss-зигзагов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // Math. Zeitschrift. 1928. V. 27. No. 1. S. 544–548.
2. *Мешалкин Л. Д.* Обобщение теоремы Шпернера о числе подмножеств конечного множества // Теория вероятностей и её применения. 1963. Т. 8. №2. С. 219–220.
3. *Stanley E. P.* Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property // SIAM J. Alg. Discr. Math. 1980. V. 1. No. 2. P. 168–184.
4. *Wang J.* Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p-group // Annals Comb. 1999. V. 2. No. 1. P. 85–101.
5. *Jacobson M. S., Kezdy A. E., and Seif S.* The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // Order. 1995. V. 12. No 3. P. 315–318.
6. *Maeno T. and Numata Y.* Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras // Contemp. Math. 2012. V. 280. No. 1. P. 73–83.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
8. *Салий В. Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. №2 (ч. 2). С. 44–51.

УДК 519.7

ОБ ОЦЕНКАХ ЭКСПОНЕНТОВ ОРГРАФОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЕЛ ФРОБЕНИУСА

В. М. Фомичев

Для частных классов сильносвязных орграфов получены достаточные условия примитивности и оценки экспонентов, которые выражены через числа Фробениуса. Показано, что во многих случаях полученные оценки экспонента орграфа существенно лучше известных оценок.

Ключевые слова: *число Фробениуса, примитивный граф, экспонент графа.*

Введение

Одним из основных направлений в исследовании экспонентов примитивных неотрицательных матриц (примитивных сильносвязных графов) является уточнение известных оценок экспонентов для различных частных классов матриц (графов), важных для тех или иных приложений.

Абсолютная оценка экспонента n-вершинного орграфа Γ дана в [1]: $\exp\Gamma \leqslant \leqslant n^2 - 2n + 2$.

Последующие результаты уточнили абсолютную оценку. Если длина кратчайшего простого контура в Γ равна l [2, с. 227], то $\exp\Gamma \leqslant n + l(n-2)$. Если, в частности, в орграфе Γ имеется d петель [2, с. 408], то $\exp\Gamma \leqslant 2n - d - 1$.

Пусть в орграфе Γ известны длины l и λ двух простых контуров C и Z [3], где $(l, \lambda) = 1$, $1 < \lambda < l \leqslant n$, $n > 2$ и h — число общих вершин контуров C и Z. Тогда $\exp\Gamma \leqslant l\lambda - 2l - 3\lambda + 3n$, если $h = 0$, и $\exp\Gamma \leqslant l\lambda - l - 3\lambda + h + 2n$, если $h > 0$.

Оценки экспонентов других частных классов графов имеются в работах [2, 4–6]. Обзор результатов в этом направлении, полученных до 2012 г., дан в [7].

Для новых частных классов n-вершинных орграфов приводятся достаточные условия примитивности и оценки экспонентов с использованием чисел Фробениуса.

1. Оценки экспонентов орграфов

Пусть $\tilde{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ — система контуров в n-вершинном орграфе Γ, длины контуров равны $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, где $k \geqslant 2$ и $l_1 < \cdots < l_k$. Систему $\tilde{C}$ назовём примитивной, если $(l_1, \ldots, l_k) = 1$. Тогда универсальный критерий примитивности орграфа Γ [2, с. 226] допускает следующую формулировку: сильносвязный орграф Γ примитивный, если и только если в Γ имеется примитивная система контуров.

Систему $\tilde{C}$ назовем i-связанной, если каждый из контуров $C_1, \ldots, C_k$ содержит вершину i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$. В частности, система контуров перемешивающего графа биективного регистра левого (правого) сдвига длины n является n-связанной (1-связанной). Через $g(l_1, \ldots, l_k)$ обозначим число Фробениуса для натуральных аргументов $l_1, \ldots, l_k$.

Теорема 1. Пусть в сильносвязном орграфе Γ имеется примитивная i-связанная система контуров $\tilde{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, состоящая из q вершин орграфа. Тогда

$$\exp\Gamma \leqslant g(l_1, \ldots, l_k) + 2(n - q + l_k) - 1.$$

Обозначим через $[i, j]_C$ простой путь, проходящий через вершины i, j и являющийся частью простого контура C. Длину пути w в Γ, равную числу дуг, составляющих путь, обозначим $l(w)$. Символом $\cdot$ обозначим конкатенацию путей графа Γ.

Пусть в орграфе Γ контур C длины t, где $4 \leqslant t \leqslant n$, содержит различные вершины i, j и r, тогда возможны два варианта:

$$C = [i, r]_C \cdot [r, j]_C \cdot [j, i]_C, \tag{1}$$

в этом случае положим $l([i, j]_C) = h > 2$, $l([i, r]_C) = \tau < h$;

$$C = [i, j]_C \cdot [j, r]_C \cdot [r, i]_C, \tag{2}$$

в этом случае положим $l([i, j]_C) = h < t - 2$, $l([j, r]_C) = \theta < t - h$.

Теорема 2.

1) Пусть (i, r) и (r, j) — дуги орграфа Γ, тогда Γ — примитивный:

— в случае равенства (1), если $(t-h+2, t-\tau+1, t-h+\tau+1) = 1$, при этом

$$\exp \Gamma \leqslant g(t-h+2, t-\tau+1, t-h+\tau+1) + 2(n-t+\max\{\tau, h-\tau\}) - 1;$$

— в случае равенства (2), если $(\theta+1, t-h-\theta+1, t) = 1$, при этом

$$\exp \Gamma \leqslant g(\theta+1, t-h-\theta+1, t) + 2n - 1.$$

2) Пусть (r, i) и (j, r) — дуги орграфа Γ, тогда Γ — примитивный:

— в случае равенства (1), если $(\tau+1, h-\tau+1, t) = 1$, при этом

$$\exp \Gamma \leqslant g(\tau+1, h-\tau+1, t) + 2n - 1;$$

— в случае равенства (2), если $(t-\theta+1, h+2, h+\theta+1) = 1$, при этом

$$\exp \Gamma \leqslant g(t-\theta+1, h+2, h+\theta+1) + 2(n-t+\max\{\theta, t-h-\theta\}) - 1.$$

Примеры. Пусть $n = 100$, $C = (1, \ldots, 80)$, $t = 80$, $i = 1$, $j = 41$, тогда $h = 40$.

1) Пусть $r = 33$, $(1, 33)$ и $(33, 41)$ — дуги орграфа Γ, тогда $\tau = 32$ и

$$(t-h+2, t-\tau+1, t-h+\tau+1) = (42, 49, 73) = 1,$$

то есть по п. 1 теоремы 2 орграф Γ примитивный и $\exp \Gamma \leqslant g(42, 49, 73) + 103$.

Используя обозначения работы [8], определим $g(42, 49, 73)$. Вычисляем: $d = (42, 49) = 7$, $z = 7 \cdot 29 = 203$, тогда $|\overline{\langle 42, 49 \rangle}| = |C(42, 49)| = 30/2 = 15$,

$$\overline{\langle 42, 49 \rangle} = 7 \cdot \{0, 6, 7, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28\},$$
$$C(42, 49) = 7 \cdot \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29\},$$

$S(73) = \varnothing$, $g(42, 49, 73) = z + (d-1)73 = 203 + 6 \cdot 73 = 641$ и $\exp \Gamma \leqslant 744$.

Оценки $\exp \Gamma$ по формулам работ [1, 2, 3] равны 9802, 4216 и 3109 соответственно.

2) Пусть $r = 55$, $(1, 55)$ и $(55, 41)$ — дуги орграфа Γ, тогда $\theta = 14$ и

$$(\theta+1, t-h-\theta+1, t) = (15, 27, 80) = 1,$$

то есть по п. 1 теоремы 2 орграф Γ примитивный и $\exp \Gamma \leqslant g(15, 27, 80) + 199$.

Определим $g(15, 27, 80)$. Вычисляем: $d = (15, 27) = 3$, $z = 3 \cdot 31 = 93$, тогда $|\overline{\langle 15, 27 \rangle}| = |C(15, 27)| = 32/2 = 16$,

$$\overline{\langle 15, 27 \rangle} = 3 \cdot \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30\},$$
$$C(42, 49) = 3 \cdot \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26, 31\},$$

$S(73) = \varnothing$, $g(15, 27, 80) = z + (d-1)80 = 93 + 2 \cdot 80 = 253$ и $\exp \Gamma \leqslant 452$.

Оценки $\exp \Gamma$ по формулам работ [1, 2, 3] равны 9802, 1570 и 2226 соответственно.

3) Пусть $r = 33$, $(33, 1)$ и $(41, 33)$ — дуги орграфа Γ, тогда $\tau = 32$ и

$$(\tau+1, h-\tau+1, t) = (33, 9, 80) = 1,$$

то есть по п. 2 теоремы 2 орграф Γ примитивный и $\exp \Gamma \leqslant g(9, 33, 80) + 199$.

Определим $g(9, 33, 80)$. Вычисляем: $d = (9, 33) = 3$, $z = 3 \cdot 19 = 57$, тогда $|\overline{\langle 9, 33 \rangle}| = |C(9, 33)| = 20/2 = 10$,

$$\overline{\langle 9, 33 \rangle} = 3 \cdot \{0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18\},$$
$$C(42, 49) = 3 \cdot \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 19\},$$

$S(73) = \varnothing$, $g(9,33,80) = z + (d-1)80 = 57 + 2 \cdot 80 = 217$ и $\exp \Gamma \leqslant 416$.

Оценки $\exp \Gamma$ по формулам работ [1, 2, 3] равны 9802, 982 и 814 соответственно.

4) Пусть $r = 59$, $(59,1)$ и $(41,59)$ — дуги орграфа Γ, тогда $\theta = 18$ и

$$(t - \theta + 1, h + 2, h + \theta + 1) = (63, 42, 59) = 1,$$

то есть по п. 2 теоремы 2 орграф Γ примитивный и $\exp \Gamma \leqslant g(42,59,63) + 83$. Так как $(42,59) = 1$, то $g(42,59,63) \leqslant g(42,59) = 2377$, отсюда получаем $\exp \Gamma \leqslant 2460$.

Оценки $\exp \Gamma$ по формулам работ [1, 2, 3] равны 9802, 4216 и 2535 соответственно.

Анализ числовых примеров позволяет считать, что полученная оценка, как правило, значительно точнее известных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. No. 52. P. 642–648.
2. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. 448 с.
3. *Фомичев В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 101–112.
4. *Князев А. В.* Оценки экстремальных значений основных метрических характеристик псевдосимметрических графов: дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 2002. 203 с.
5. *Коренева А. М., Фомичев В. М.* Об одном обобщении блочных шифров Фейстеля // Прикладная дискретная математика. 2012. № 3(17). С. 34–40.
6. *Дорохова А. М., Фомичев В. М.* Уточненные оценки экспонентов перемешивающих графов биективных регистров сдвига над множеством двоичных векторов // Прикладная дискретная математика. 2014. № 1(23). С. 77–83.
7. *Когос К. Г., Фомичев В. М.* Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4(18). С. 5–13.
8. *Фомичев В. М.* Оценка экспонента некоторых графов с помощью чисел Фробениуса для трёх аргументов // Прикладная дискретная математика. 2014. № 2(24). С. 88–96.