

# ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2015**

**№ 1(33)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658  
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА  
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

**H-index:** <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

**ООО «Издательство научно-технической литературы»**

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 16.02.2015.  
Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 9,68. Уч.-изд. л. 10,84. Тираж 300 экз. Заказ № 56.

---

Отпечатано на оборудовании

**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ 854.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Лазарев В.Р.</b> Зависимые подпространства в $C_p C_p(X)$ и наследственные кардинальные инварианты .....                       | 5  |
| <b>Рахмелевич И.В.</b> О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным .....                     | 12 |
| <b>Устинова И.Г., Пахомова Е.Г.</b> Сплайновая оценка тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений ..... | 20 |

### МЕХАНИКА

|                                                                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Дозморов П.С.</b> Контроль гранулометрического состава и проницаемости горных пород программно-аппаратными методами .....                                      | 37  |
| <b>Ершов И.В.</b> Устойчивость сверхзвукового течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа .....                                                   | 47  |
| <b>Крайнов А.Ю., Моисеева К.М.</b> Влияние скорости подачи газа на устойчивость горения метановоздушной смеси в щелевой горелке с внутренней вставкой .....       | 63  |
| <b>Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А., Тимченко С.В.</b> Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев ..... | 72  |
| <b>Осипенко М.А.</b> Задача об одностороннем контакте гибкой нерастяжимой нити и твердого тела .....                                                              | 82  |
| <b>Пикущак Е.В., Миньков Л.Л.</b> Влияние поправки Озеена на выражение для скорости оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии .....                         | 88  |
| <b>Порязов В.А.</b> Влияние дисперсности частиц алюминия на скорость горения металлизированных смесевых твердых топлив .....                                      | 96  |
| <b>Шабловский О.Н.</b> Параметрические решения уравнения Монжа – Ампера и течения газа с переменной энтропией .....                                               | 105 |
| <b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....                                                                                                                                  | 119 |

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Lazarev V.R.</b> Dependent subspaces in $C_p C_p(X)$ and hereditary cardinal invariants.....                                        | 5  |
| <b>Rakhmelevich I.V.</b> On two-dimensional hyperbolic equations with power-law non-linearity in the derivatives .....                 | 12 |
| <b>Ustinova I.G., Pakhomova E.G.</b> Spline estimate of the time series trend for a random number of data at measurement instants..... | 20 |

### MECHANICS

|                                                                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Dozmorov P.S.</b> Control for the granulometric composition and permeability of rocks by software and hardware methods .....                                           | 37  |
| <b>Ershov I.V.</b> Stability of a supersonic Couette flow of vibrationally excited diatomic gas.....                                                                      | 47  |
| <b>Krainov A.Yu., Moiseeva K.M.</b> The influence of gas flow rate on the methane-air mixture burning in a flat burner with an inert body .....                           | 63  |
| <b>Orlov S.A., Peigin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V.</b> Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings..... | 72  |
| <b>Osipenko M.A.</b> The problem of unilateral contact of flexible nonstretchable rope and rigid solid.....                                                               | 82  |
| <b>Pikushchak E.V., Minkov L.L.</b> Influence of Oseen's correction on fine particle settling velocity formula for bidisperse suspension .....                            | 88  |
| <b>Poriazov V.A.</b> The influence of aluminum particle dispersion on the burning rate of metallized solid propellants .....                                              | 96  |
| <b>Shablovskii O.N.</b> Parametric solutions for the Monge – Ampere equation and gas flow with variable entropy.....                                                      | 105 |
| <b>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS</b> .....                                                                                                                          | 119 |

## МАТЕМАТИКА

УДК 515.12

В.Р. Лазарев

ЗАВИСИМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В  $C_p C_p(X)$   
И НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Описан класс тихоновских топологических пространств  $Y$ , в рамках которого сохраняются неравенства  $s(Y) \leq \tau$ ,  $hl(Y) \leq \tau$ ,  $hd(Y) \leq \tau$ . Доказано, что если этому классу принадлежит подпространство  $B$  пространства  $\hat{L}_p(X)$  функционалов с конечным носителем, то ему принадлежит и объединение  $X(B)$  всех носителей элементов из  $B$ . Установлено, что  $B$  допускает непрерывную факторизацию через множество  $X(B)$  и, тем более, зависит от  $X(B)$ , что даёт частичный положительный ответ на один вопрос О.Г. Окунева. Доказано также, что в роли подпространства  $B$  может выступать любое открытое или канонически замкнутое подмножество в пространстве  $C_p^0 C_p(X)$ .

**Ключевые слова:** топология поточечной сходимости, наследственные кардинальные инварианты.

## 0. Обозначения и вводные замечания

В данной статье рассматриваются только тихоновские топологические пространства, называемые «пространствами». В топологической терминологии и обозначениях придерживаемся монографии [1]. Напомним, что записи  $s(X)$ ,  $hl(X)$ ,  $hd(X)$  означают соответственно спрэд, наследственное число Линделёфа и наследственную плотность пространства  $X$ . Символами  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  обозначаются множества натуральных и соответственно вещественных чисел.

Основные сведения о пространствах непрерывных вещественнозначных функций  $C_p(X)$ , определённых на пространстве  $X$ , в топологии поточечной сходимости, а также об основных конструкциях и терминах, связанных с ними, можно найти в [2]. В частности, запись  $C_p(X|A)$  означает пространство всех непрерывных функций на подпространстве  $A \subset X$ , допускающих непрерывное продолжение на всё  $X$ . Вместо  $C_p(C_p(X))$  пишем  $C_p C_p(X)$ . Обозначаем  $C_p^0 C_p(X)$  подпространство пространства  $C_p C_p(X)$ , состоящее из функций, обращающихся в ноль в точке  $0 \in C_p(X)$ . Элементы пространства  $C_p^0 C_p(X)$  называем функционалами.

Если задано гомеоморфное вложение  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ , то, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что  $h(0) = 0$ . Вместе с таким вложением задано непрерывное отображение  $h^*: Y \rightarrow C_p^0 C_p(X)$  правилом  $h^*(y)(\varphi) = h(\varphi)(y)$ .

(Заметим, что  $h^*$  – гомеоморфизм, если  $h(C_p(X))$  – регулярное семейство функций в  $C_p(Y)$ ). Таким образом,  $h^*(Y)$  – семейство функционалов на  $C_p(X)$ , и, в силу непрерывности  $h^*$ , выполняются неравенства  $s(h^*(Y)) \leq s(Y)$ ,  $hl(h^*(Y)) \leq hl(Y)$ ,  $hd(h^*(Y)) \leq hd(Y)$ .

В [3], при наличии гомеоморфного вложения  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ , установлены неравенства  $s(Y^n) \leq s(X^n)$ ,  $hl(Y^n) \leq hl(X^n)$ ,  $hd(Y^n) \leq hd(X^n)$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Естественно спросить, можно ли отвлечься от вложения  $h$  и установить неравенства такого рода просто для подпространства  $Y \subset C_p^0 C_p(X)$ ? В [3] сформулирована следующая проблема (Problem 3.3 и Problem 3.4):

**Проблема 0.1.** Для каждого ли подпространства  $B \subset C_p^0 C_p(X)$  существует подпространство  $A \subset X$ , такое, что  $s(A) \leq s(B)$ ,  $hl(A) \leq hl(B)$ ,  $hd(A) \leq hd(B)$  и  $B$  либо зависит от  $A$ , либо допускает непрерывную факторизацию через  $A$ ?

При этом понятия зависимости и непрерывной факторизуемости определяют следующим образом.

**Определение 0.2.** Говорят, что подпространство  $B \subset C_p^0 C_p(X)$  зависит от подмножества  $A \subset X$ , если  $f(\varphi) = f(\psi)$  при всех  $f \in B$ ,  $\varphi, \psi \in C_p(X)$ , таких, что  $\varphi|_A \equiv \psi|_A$ .

**Определение 0.3.** Скажем, что  $B$  допускает непрерывную факторизацию через  $A$ , если для каждого  $f \in B$  найдётся непрерывное отображение  $f_0: C_p(X|A) \rightarrow \mathbb{R}$ , такое, что  $f = f_0 \circ p_A$ , где  $p_A: C_p(X) \rightarrow C_p(X|A)$  – отображение сужения.

Непосредственно из определений 0.2 и 0.3 следует, что если  $B$  допускает непрерывную факторизацию через  $A$ , то  $B$  зависит от  $A$ .

Сформулированная выше проблема 0.1, как указано в конце [3], имеет положительное решение, если  $B$  содержится в пространстве  $L_p(X)$  линейных непрерывных функционалов на  $C_p(X)$ . В данной статье даётся положительный ответ на поставленный вопрос в более общем случае, а именно в случае, когда  $B$  содержится в пространстве  $\hat{L}_p(X)$  так называемых функционалов с конечным носителем (см. определение 1.1).

В заключение этого вводного раздела установим один простой факт относительно свойства зависимости.

**Лемма 0.4.** Если  $B \subset C_p^0 C_p(X)$  и  $B$  зависит от  $A \subset X$ , то  $\bar{B}$  также зависит от  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in \bar{B}$ . Предположим, что нашлись такие функции  $\varphi, \psi \in C_p(X)$ , совпадающие на  $A$ , что  $f(\varphi) < f(\psi)$ . Положим  $\delta = 0,5(f(\psi) - f(\varphi))$  и рассмотрим стандартную окрестность  $W = W(f, \varphi, \psi, \delta)$  функционала  $f$  в пространстве  $C_p^0 C_p(X)$ . Ясно, что если  $g \in W$ , то  $g(\varphi) < g(\psi)$ , а значит,  $g \notin B$ . Следовательно,  $W \cap B = \emptyset$  в противоречие с  $f \in \bar{B}$ . ■

## 1. Функционалы с конечным носителем

Понятие функционала с конечным носителем можно рассматривать как обобщение понятия линейного непрерывного функционала, которое сохраняет некоторые существенные свойства последнего (см. ниже).

**Определение 1.1.** (см. [4]) Пусть для функционала  $f$  существует конечное подмножество  $K \subset X$ , такое, что выполнены два условия:

(i) Для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\varphi \in C_p(X)$  найдётся  $\delta > 0$ , такое, что если  $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta$  для всех  $x \in K$ , то  $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$ ,

(ii) Существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что для любого  $x \in K$  и любой его окрестности  $O(x)$  найдётся функция  $\psi \in C_p(X)$ , такая, что  $\psi|_{X \setminus O(x)} = 0$ , но  $|f(\psi)| > \varepsilon$ .

Тогда  $f$  называется функционалом с конечным носителем, а множество  $K$  называется носителем функционала  $f$ .

Ниже без доказательств приводятся те факты о функционалах с конечным носителем, которые необходимы для дальнейшего изложения. Эти факты (леммы 1.2 – 1.5) установлены в статьях [4, 5].

**Лемма 1.2.** Функционал  $f \equiv 0 \Leftrightarrow K = \emptyset$ .

**Лемма 1.3.** Если  $f$  – функционал с конечным носителем  $K$ ,  $\varphi, \psi \in C_p(X)$  и  $\varphi$  совпадает с  $\psi$  в точках  $K$ , то  $f(\varphi) = f(\psi)$ .

**Лемма 1.4.** Каждый функционал с конечным носителем имеет единственный носитель.

Множество всех функционалов с конечным носителем, с топологией, индуцированной из  $C_p^0 C_p(X)$ , обозначаем  $\hat{L}_p(X)$ . Лемма 1.4 означает, что правилом  $f \rightarrow K(f)$  корректно определено конечнозначное отображение  $K : \hat{L}_p(X) \rightarrow X$ .

Различие между пространствами  $\hat{L}_p(X)$  и  $L_p(X)$  видно из следующей леммы.

**Лемма 1.5.**  $\hat{L}_p(X)$  есть всюду плотное в  $C_p^0 C_p(X)$  линейное подпространство, содержащее  $L_p(X)$ .

Как и  $L_p(X)$ , пространство  $\hat{L}_p(X)$  можно «рассортировать» по количеству точек в носителях его элементов. А именно, обозначим  $L^{(n)} = \{f \in \hat{L}_p(X) : |K(f)| = n\}$ . Кроме того, обозначим  $E_n(X) = \{A \subset X : |A| = n\}$  для всякого  $n \in \mathbb{N}$ . Будем считать множество  $E_n(X)$  наделённым топологией Вьеториса. Напомним, что стандартную базу этой топологии образуют множества вида

$$U = \langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in E_n(X) : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n, A \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\},$$

где множества  $U_i$  открыты в  $X$  и  $U_i \cap U_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Справедлива следующая лемма, аналогичная предложению 2.5 из [6].

**Лемма 1.6.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  отображение  $s_n : L^{(n)} \rightarrow E_n(X)$ ,  $s_n(f) = K(f)$  непрерывно.

**Доказательство.** Пусть  $f \in L^{(n)}$ ,  $s_n(f) = \{x_1, \dots, x_n\} \in E_n(X)$ ,  $U$  – окрестность точки  $s_n(f)$ . Можем считать, что  $U = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$  и  $x_i \in U_i$  при  $i = 1, \dots, n$ . Укажем окрестность  $V$  элемента  $f \in L^{(n)}$ , для которой  $s_n(V) \subset U$ . В силу (ii) существуют функции  $\varphi_i \in C_p(X)$ , тождественно равные 0 вне  $U_i$  и такие, что  $f(\varphi_i) \neq 0$  при каждом  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим образы  $\hat{\varphi}_i : C_p C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$  этих функций при каноническом отображении вычисления  $\Lambda : C_p(X) \rightarrow C_p C_p C_p(X)$  (см., например, [2]).

Положим  $V_i = (\hat{\varphi}_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \cap L^{(n)}$ ,  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ .

Ясно, что множество  $V$  открыто в  $L^{(n)}$ . Включение  $f \in V$  следует из того, что  $\hat{\varphi}_i(f) = f(\varphi_i) \neq 0$  при всех  $i = 1, \dots, n$ .

Наконец, убедимся, что  $s_n(V) \subset U$ . Пусть  $g \in L^{(n)}$  таково, что  $s_n(g) = \{y_1, \dots, y_n\} \notin U$ . Это означает, что для некоторого  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , имеем  $U_k \cap s_n(g) = \emptyset$ . Следовательно,  $\varphi_k(y_i) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . По лемме 1.3,  $g(\varphi_k) = \hat{\varphi}_k(g) = 0$ , а значит,  $g \notin V_k$  и, тем более,  $g \notin V$ . ■

**Лемма 1.7.** Пусть  $f \in \hat{L}_p(X)$ ,  $K = K(f)$  – (конечный) носитель  $f$ . Тогда найдётся непрерывное отображение  $f' : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ , такое, что  $f = f' \circ p_K$ , где  $p_K : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}^K$  – отображение сужения.

**Доказательство.** Из леммы 1.3 следует, что формулой  $f'(r) = f(p_K^{-1}(r))$ ,  $r \in \mathbb{R}^K$ , корректно определено отображение  $f' : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ , причём, очевидно, выполнено равенство  $f = f' \circ p_K$ . Осталось показать, что отображение  $f'$  непрерывно. Так как отображение  $f$  непрерывно, а  $p_K$  – открыто, то достаточно установить равенство  $f'^{-1}(U) = p_K(f^{-1}(U))$  для произвольного открытого множества  $U \subset \mathbb{R}$ . Но оно элементарно выводится из того, что  $f = f' \circ p_K$ . ■

Условимся для каждого подпространства  $B \subset \hat{L}_p(X)$  обозначать символом  $X(B)$  объединение носителей всех функционалов из  $B$ .

**Лемма 1.8.** Пусть  $B \subset \hat{L}_p(X)$ . Тогда  $B$  допускает непрерывную факторизацию через  $X(B)$  (следовательно, зависит от  $X(B)$ ).

**Доказательство.** Пусть  $f \in B$ . По лемме 1.7,  $f = f' \circ p_K$ . Обозначим символом  $p_K^{X(B)}$  отображение сужения функций с  $X(B)$  на подмножество  $K \subset X(B)$ . Определим отображение  $f_0 : C_p(X|X(B)) \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $f_0 = f' \circ p_K^{X(B)}$ . Тогда  $f_0$  непрерывно, будучи композицией непрерывных отображений. Кроме того, имеем  $f_0 \circ p_{X(B)} = f' \circ p_K^{X(B)} \circ p_{X(B)} = f' \circ p_K = f$ . ■

## 2. Основные результаты

В этом разделе докажем основную теорему этой статьи (см. теорему 2.3 ниже), а также её приложения к наследственным кардинальным инвариантам (следствия 2.4 – 2.6). Предварительно установим некоторые вспомогательные факты.

Зафиксируем число  $n \in \mathbb{N}$  и рассмотрим произвольное  $Y \subset E_n(X)$ . Для каждого  $y = \{x_1, \dots, x_n\} \in E_n(X)$  положим  $u_n(y) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ , а также  $Z = u_n(Y) = \bigcup \{u_n(y) : y \in Y\} \subset X$ .

**Лемма 2.1.** Многозначное отображение  $u_n : Y \rightarrow Z$  обладает свойствами:

- (а) Отображение  $u_n$  ровно  $n$ -значно и биективно;
- (б) Отображение  $u_n$  полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу.

**Доказательство.** Пункт (а) очевиден. Справедливость (б) проверяется легко. Докажем, например, полунепрерывность снизу. Возьмём открытое множество  $G \subset Z$  и рассмотрим  $V = \{y \in Y : u_n(y) \cap G \neq \emptyset\}$ . Пусть  $v \in V$ . Тогда найдутся дизъюнктные окрестности  $U_x$  всех точек  $x \in u_n(v) \subset Z$ , такие, что  $U_x \subset G$  при  $x \in G$ . Значит, стандартная окрестность  $U = \langle U_x : x \in u_n(v) \rangle$  точки  $v \in Z$  в топологии Вьеториса содержится в  $V$ , то есть множество  $V$  открыто в  $Y$ . ■

**Определение 2.2.** Будем называть ровно  $n$ -значные, полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу отображения  $n$ -бинепрерывными.

Заметим, что каждое непрерывное отображение, очевидно, является 1-бинепрерывным.

**Теорема 2.3.** Пусть  $P$  – некоторое свойство топологических пространств, сохраняющееся при следующих операциях:

1. Переход к подпространству.
2. Переход к образу при непрерывном отображении.
3. Переход к образу при биективном  $n$ -бинепрерывном отображении для любого  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Взятие объединения не более чем счётного семейства пространств, обладающих свойством  $P$ .

Тогда, если  $B \subset \hat{L}_p(X)$ ,  $B$  обладает свойством  $P$ , то и  $X(B)$  обладает свойством  $P$ .

**Доказательство.** Пусть  $B \subset \hat{L}_p(X)$ . Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  произвольно и рассмотрим  $B_n = B \cap L^{(n)}$ . Если  $B$  обладает свойством  $P$ , то по п. 1,  $B_n \subset B$  также обладает свойством  $P$ . По лемме 1.6, отображение носителя  $s_n : B_n \rightarrow E_n(X)$  непрерывно, поэтому, в силу п. 2,  $Y_n = s_n(B_n)$  также обладает свойством  $P$ . Далее, по лемме 2.1, отображение  $u_n : Y_n \rightarrow A_n = u_n(Y_n)$  биективно и  $n$ -бинепрерывно. Значит, по п. 3, подпространство  $A_n \subset X$  обладает свойством  $P$ . Наконец, ясно, что  $X(B) = \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ , и потому  $X(B)$ , в силу п. 4, обладает свойством  $P$ . ■

**Следствие 2.4.** Пусть  $\tau$  – некоторый кардинал,  $B$  – произвольное подпространство в  $\hat{L}_p(X)$ , обладающее одним из свойств  $hl(B) \leq \tau$ ,  $hd(B) \leq \tau$ ,  $s(B) \leq \tau$ . Тогда и  $X(B)$  обладает соответствующим свойством.

**Доказательство.** Убедимся, что все три упомянутых свойства удовлетворяют условиям 1 – 4 теоремы 2.3. Выполнение условия 1 очевидно, так как все три кардинальных инварианта являются наследственными.

Поскольку сужение непрерывного отображения на произвольное подпространство непрерывно и непрерывные отображения не увеличивают ни числа Линделёфа, ни плотности, ни числа Суслина, заключаем, что выполнено условие 2.

Далее, в [3] показано (propositions 1.7 – 1.9 при  $n = 1$ ), что кардинальные инварианты  $hl$ ,  $hd$ ,  $s$  не возрастают при переходе к образам при конечнозначных почти полунепрерывных снизу отображениях [3, definition 1.4]. Из определения 1.4 в [3] и определения 2.2 выше следует, что каждое  $n$ -бинепрерывное отображение является конечнозначным почти полунепрерывным снизу. Отсюда вытекает выполнение условия 3.

Наконец, взятие не более чем счётного объединения пространств не увеличивает наследственных кардинальных инвариантов, что означает выполнение условия 4. ■

Таким образом, следствие 2.4 вместе с леммой 1.8 даёт положительное решение проблемы 0.1 для всех подпространств  $B \subset \hat{L}_p(X)$ .

**Следствие 2.5.** Пусть  $\tau$  – некоторый кардинал, подпространство  $Z \subset C_p^0 C_p(X)$  представимо в виде  $Z = \bar{B}$ , где  $B \subset \hat{L}_p(X)$ . Пусть выполнено какое-либо из неравенств  $hl(Z) \leq \tau$ ,  $hd(Z) \leq \tau$ ,  $s(Z) \leq \tau$ . Тогда соответствующее неравенство выполнено и для  $X(B)$ .

**Доказательство.** Пусть, например,  $hl(Z) \leq \tau$ . По лемме 0.4,  $Z$  зависит от  $X(B)$ . Так как  $B \subset Z$ , то  $hl(B) \leq \tau$ . По следствию 2.4,  $hl(X(B)) \leq \tau$ . Ясно, что те же рассуждения верны и для кардиналов  $hd$  и  $s$ . ■

**Следствие 2.6.** Каждое открытое или канонически замкнутое подпространство  $G$  в  $C_p^0 C_p(X)$ , отвечающее одному из неравенств  $hl(G) \leq \tau$ ,  $hd(G) \leq \tau$ ,  $s(G) \leq \tau$ , зависит от некоторого  $A \subset X$ , для которого также выполнено соответствующее неравенство.

**Доказательство.** По лемме 1.5 найдётся  $B \subset \hat{L}_p(X)$ , такое, что  $G \subset \bar{B}$ . В случае канонически замкнутого  $G$  имеем  $G = \bar{B}$ . Поэтому, достаточно положить  $A = X(B)$  и применить следствие 2.5.

Пусть  $G$  открыто. Поскольку  $\bar{B}$  зависит от  $X(B)$  (лемма 0.4), то  $G$  – тем более. Так как  $B \subset G$ , то  $hl(B) \leq \tau$  ( $hd(B) \leq \tau$ ,  $s(B) \leq \tau$ ). Попадаем в условия следствия 2.4. ■

В связи со следствием 2.6 представляется естественным следующий (открытый) вопрос.

**Вопрос 2.7.** Пусть подмножество  $M \subset C_p^0 C_p(X)$  имеет тип  $G_\delta$ . Верно ли, что  $M$  зависит (или допускает непрерывную факторизацию) от некоторого  $A \subset X$ , такого, что выполнено какое-либо из трех неравенств  $hl(A) \leq hl(M)$ ,  $hd(A) \leq hd(M)$ ,  $s(A) \leq s(M)$ ?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // *Topol. and it's Appl.* 1997. V. 80 P. 177–188.
4. Лазарев В.Р. О модификации понятия функционала с конечным носителем // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 298. С. 119–120.
5. Лазарев В.Р. О пространстве функционалов с конечным носителем // Вестн. ТГУ. Бюлл. оперативной научной информации «Актуальные проблемы алгебры и анализа». 2005. № 54. Декабрь. С. 80–87.
6. Tkachuk V.V. Some non-multiplicative properties are l-invariant // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 1997. V. 38. No. 1. P. 169–175.

Статья поступила 05.11.2014 г.

Lazarev V.R. DEPENDENT SUBSPACES IN  $C_p C_p(X)$  AND HEREDITARY CARDINAL INVARIANTS

In this paper, for a given arbitrary subset  $B \subset C_p C_p(X)$  consisting of finite support functionals (see Definition 1.1), we prove its continuous factorizability (see Definition 0.3) through some subset  $A \subset X$  satisfying the conditions  $hl(A) \leq hl(B)$ ,  $hd(A) \leq hd(B)$ , and  $s(A) \leq s(B)$ .

Finite support functionals have some essential properties of linear continuous functionals. In particular, the set  $B$  above may be “ranked” by subsets  $B_n$  according to the number  $n$  of points in the supports of functionals. In addition, the support mapping  $s_n : B_n \rightarrow E_n(X)$  is continuous (see Lemma 1.6). It permit us to formulate conditions on a topological property that are sufficient for the union  $X(B) \subset X$  of the supports of the functionals from  $B$  to have this topological property together with  $B$  (see Theorem 2.3). Since  $B$  admits continuous factorization through  $X(B)$  (see Lemma 1.8) and inequalities  $hl(B) \leq \tau$ ,  $hd(B) \leq \tau$ ,  $s(B) \leq \tau$  keep true under any operations from the formulation of Theorem 2.3 (see Corollary 2.4), we get a partially positive answer to the Problem 3.3 and Problem 3.4 from [3].

In addition, we extend Corollary 2.4 to all open and all canonical closed subsets of the space  $C_p^0 C_p(X)$  (see Corollary 2.6).

Keywords: pointwise convergence topology, hereditary cardinal invariants.

LAZAREV Vadim Remirovich (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: lazarev@math.tsu.ru

## REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moscow, Mir Publ., 1986. (in Russian)
2. Arkhangel'skiy A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsiy*. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., 1989. (in Russian)
3. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants. *Topol. and it's Appl.*, 1997, vol. 80, pp. 177–188.
4. Lazarev V.R. O modifikatsii ponyatiya funktsionala s konechnym nositelem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2007, no. 298, pp. 119–120. (in Russian)
5. Lazarev V.R. O prostranstve funktsionalov s konechnym nositelem. *Vestn. TGU. Byull. operativnoy nauchnoy informatsii «Aktual'nye problemy algebrы i analiza»*, 2005, no. 54, pp. 80–87. (in Russian)
6. Tkachuk V.V. Some non-multiplicative properties are l-invariant. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 169–175.

УДК 517.957

И.В. Рахмелевич

## О ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

Рассматривается класс двумерных нелинейных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции, при этом используется метод функционального разделения переменных. Найдены решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Проанализированы решения при регулярных и особых значениях параметров, характеризующих нелинейность.

**Ключевые слова:** нелинейное гиперболическое уравнение, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.

В современной теории уравнений в частных производных существенное место занимает анализ нелинейных гиперболических уравнений и методов их точного интегрирования [1–3]. С точки зрения общности результатов серьезный интерес представляют исследования классов нелинейных уравнений, содержащих произвольные функции [3]. Одним из наиболее эффективных методов исследования нелинейных уравнений остается метод разделения переменных. В работах [3, 4] подробно изложены основы метода и его современные варианты (обобщенное и функциональное разделение переменных). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, в работах [5, 6] методом разделения переменных исследованы некоторые многомерные уравнения, содержащие однородные и мультиоднородные функции от частных производных. В [7–9] с помощью данного метода были получены решения некоторых нелинейных эллиптических и гиперболических уравнений. В настоящей работе этот метод применяется для построения решений двумерных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным с произвольными показателями и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции.

### 1. Постановка задачи. Решения типа бегущей волны

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение следующего вида относительно неизвестной функции  $u(x, y)$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\beta_2}. \quad (1)$$

Здесь  $g(u)$  – некоторая заданная функция,  $\beta_1, \beta_2$  – вещественные параметры. В частном случае  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  уравнение (1) переходит в нелинейное волновое уравнение, сводящееся путем замены переменных к нелинейному уравнению Клейна – Гордона. В случае  $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ ,  $g(u) = \text{const}$  (1) переходит в уравнение Гурса [3].

Так как уравнение (1) не содержит явно независимых переменных, то оно допускает решение типа бегущей волны:

$$u(x, y) = U(z), \quad z = c_1 x + c_2 y, \quad (2)$$

где  $c_1, c_2$  – некоторые постоянные. Подставив решение (2) в уравнение (1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции  $U(z)$ :

$$U''(z) = c_1^{\beta_1-1} c_2^{\beta_2-1} g(U) (U'(z))^{\beta_1+\beta_2}. \quad (3)$$

Проанализируем решения уравнения (3) в зависимости от значений параметров  $\beta_1, \beta_2$ , характеризующих нелинейность.

**Случай 1.**  $\beta_1 + \beta_2 \neq 2$ .

Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$(U'(z))^{1-(\beta_1+\beta_2)} U''(z) = C_0 \frac{d}{dz} G(U(z)), \quad (4)$$

где  $C_0 = c_1^{\beta_1-1} c_2^{\beta_2-1}$ ,  $G(U) = \int g(U) dU$ . Уравнение (4) сводится к уравнению первого порядка:

$$\frac{[U'(z)]^v}{v} = C_0 G(U) + A, \quad (5)$$

где  $v = 2 - (\beta_1 + \beta_2)$ . Решение уравнения (5) в неявном виде запишется так:

$$z - z_0 = \int [v(C_0 G(U) + A)]^{\frac{1}{v}} dU. \quad (6)$$

Здесь и далее  $A, z_0$  – произвольные постоянные.

В частности, при  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  получаем  $v = 2$  и решение (6) принимает вид

$$z - z_0 = \int \frac{dU}{\sqrt{2(C_0 G(U) + A)}}. \quad (6a)$$

При  $\beta_1 + \beta_2 = 1$  имеем  $v = 1$ , а решение (6) приводится к следующему:

$$z - z_0 = \int \frac{dU}{C_0 G(U) + A}. \quad (6b)$$

**Случай 2.**  $\beta_1 + \beta_2 = 2$ .

Понижая порядок уравнения (3), аналогично предыдущему случаю, нетрудно получить решение в неявном виде:

$$z - z_0 = A \int \exp(-C_0 G(U)) dU. \quad (7)$$

**Пример.** Пусть  $g(u) = g_0 = \text{const}$ . Тогда для рассмотренных выше случаев 1 и 2 из формул (6), (7) находим

$$u(x, y) = (v C_0 g_0)^{1/(v-1)} \left[ \frac{v-1}{v} (c_1 x + c_2 y - z_0) \right]^{v/(v-1)}; \quad (8a)$$

$$u(x, y) = \exp[C_0 g_0 (c_1 x + c_2 y - z_0)]; \quad (8b)$$

$$u(x, y) = -\frac{1}{C_0 g_0} \ln(c_1 x + c_2 y - z_0). \quad (8в)$$

Решения (8а), (8б), (8в) существуют при выполнении условий  $\beta_1 + \beta_2 \neq 1, 2$ ;  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ;  $\beta_1 + \beta_2 = 2$  соответственно.

**Случай 3.**  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 \neq 1$ .

Покажем, что в этом случае имеется решение в виде обобщенной бегущей волны:

$$u(x, y) = U(z), \quad z = X(x) + c_2 y. \quad (9)$$

Подставляя решение (9) в уравнение (1), находим, что функция  $X(x)$  может быть произвольной, а  $U(z)$  должна удовлетворять уравнению

$$U''(z) = c_2^{\beta_2-1} g(U) (U'(z))^{1+\beta_2}. \quad (10)$$

Уравнение (10) является частным случаем (3), если положить в последнем  $\beta_1 = 1$ . В случае  $\beta_1 \neq 1$ ,  $\beta_2 = 1$  имеется решение аналогичное (9), но в этом случае  $z = c_1 x + Y(y)$ .

**Случай 4.**  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$ .

В этом случае, как нетрудно проверить, решение зависит от двух произвольных функций  $X(x), Y(y)$ :

$$u(x, y) = U(z), \quad z = X(x) + Y(y),$$

причем функция  $U(z)$  удовлетворяет уравнению

$$U''(z) = g(U) (U'(z))^2.$$

Его решение определяется выражением (7), в котором необходимо положить  $C_0 = 1$ .

## 2. Автомодельные решения

Для нахождения других (в частности, автомодельных) решений удобно использовать функциональное разделение переменных [3, 4, 9] мультипликативного типа. Тогда решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(x, y) = U(z); \quad (11)$$

$$z = X(x)Y(y), \quad (11а)$$

где  $U(z), X(x), Y(y)$  – неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем. Подставляя (11), (11а) в уравнение (1), после несложных преобразований получаем следующее:

$$\Phi(z) = (X'(x))^{\beta_1-1} (X(x))^{\beta_2} (Y'(y))^{\beta_2-1} (Y(y))^{\beta_1}, \quad (12)$$

$$\text{где} \quad \Phi(z) \equiv \frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{\beta_1+\beta_2}} \frac{d}{dz} (zU'(z)). \quad (12а)$$

Правая часть уравнения (12) представляет собой произведение функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая – только от  $y$ . Поэтому, прологариф-

мировав уравнение (12) и затем дважды продифференцировав по  $x$  и по  $y$ , приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \Phi(z) = 0. \quad (13)$$

Выполнив дифференцирование в левой части (13) с учетом (11а), преобразуем это уравнение к виду

$$X'(x)Y'(y)(\Psi(z) + z\Psi'(z)) = 0, \quad (14)$$

где  $\Psi(z) \equiv \Phi'(z)/\Phi(z)$ . Предполагаем, что искомое решение (11) существенно зависит от обеих переменных  $x, y$ , т.е.  $X(x) \neq \text{const}$ ,  $Y(y) \neq \text{const}$ . Тогда (14) сводится к уравнению

$$\Psi(z) + z\Psi'(z) = 0. \quad (15)$$

Решая уравнение (15) и возвращаясь к функции  $\Phi(z)$ , находим

$$\Phi(z) = C_0 z^\lambda, \quad (16)$$

где  $C_0, \lambda$  – произвольные постоянные. Из (16) и (12а) следует, что функция  $U(z)$  должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{\beta_1 + \beta_2}} \frac{d}{dz} (zU'(z)) = C_0 z^\lambda. \quad (17)$$

Далее, поскольку левая часть (12) является функцией  $z$ , то и правая часть может зависеть только от  $z$ . Отсюда, с учетом (16), следует

$$(X'(x))^{\beta_1 - 1} (X(x))^{\beta_2} = C_1 (X(x))^\lambda; \quad (18)$$

$$(Y'(y))^{\beta_2 - 1} (Y(y))^{\beta_1} = C_2 (Y(y))^\lambda. \quad (19)$$

Произвольные постоянные  $C_1, C_2$ , согласно (12) и (16), должны удовлетворять условию  $C_1 C_2 = C_0$ .

В результате решения уравнений (18) и (19) находим функции  $X(x)$  и  $Y(y)$ :

$$X(x) = \left( \frac{C_1^{1/(\beta_1 - 1)}}{\mu_1} (x + a_1) \right)^{\mu_1}, \quad Y(y) = \left( \frac{C_2^{1/(\beta_2 - 1)}}{\mu_2} (y + a_2) \right)^{\mu_2}, \quad (20)$$

где  $a_1, a_2$  – произвольные постоянные, а показатели  $\mu_1, \mu_2$  определяются формулами

$$\mu_1 = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1)}, \quad \mu_2 = \frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1)}. \quad (21)$$

При  $a_1 = a_2 = 0$  формулы (20) соответствуют автомодельному решению.

Таким образом, уравнение (1) имеет решение в виде (11), (11а), где функции  $X(x), Y(y)$  определяются выражениями (20), (21), а функция  $U(z)$  находится в результате решения уравнения (17). Из (20) и (21) следует, что указанное решение не существует, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1) = 0. \quad (22)$$

Особые случаи, для которых выполняется одно из условий (22), будут проанализированы в п.3.

Рассмотрим решение задачи для простейшего случая  $g(u) = g_0 = \text{const}$ , предполагая, что ни одно из равенств (22) не выполнено.

Тогда уравнение (17) можно переписать так:

$$\frac{1}{(zU'(z))^{\beta_1+\beta_2}} \frac{d}{dz}(zU'(z)) = g_0 C_0 z^{\lambda-(\beta_1+\beta_2)}. \quad (23)$$

В свою очередь, при решении уравнения (23) необходимо разделять следующие случаи:

а)  $\beta_1 + \beta_2 \neq 1$ . Тогда решение уравнения (23) имеет вид

$$U(z) = v^{1/v} \int (\tilde{A}_0 z^\lambda + A_0 z^{-v})^{1/v} dz, \quad (24)$$

где  $v = 1 - (\beta_1 + \beta_2)$ ,  $\tilde{A}_0 = \frac{g_0 C_0}{(\lambda + 1) - (\beta_1 + \beta_2)}$ .

б)  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ,  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $U(z)$  определяется формулой

$$U(z) = \int \frac{A_0}{z} \exp\left(\frac{g_0 C_0}{\lambda} z^\lambda\right) dz. \quad (25)$$

В формулах (24) – (25)  $A_0, z_0$  – произвольные постоянные.

### 3. Анализ особых случаев

Рассмотрим отдельно особые случаи, соответствующие выполнению одного из условий (22).

**Случай 1.**  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 \neq 1$ .

Тогда уравнение (12) можно записать в виде

$$\Phi(z) = (X(x))^{\beta_2} (Y'(y))^{\beta_2-1} Y(y). \quad (26)$$

Поскольку правая часть уравнения (26) должна зависеть только от  $z$ , то это уравнение может быть удовлетворено только в том случае, если  $Y(y)$  является решением уравнения

$$(Y'(y))^{\beta_2-1} Y(y) = C_0 (Y(y))^{\beta_2}, \quad (27)$$

откуда следует, что  $\lambda = \beta_2$ . Решая уравнение (27), находим

$$Y(y) = a \exp(\mu y), \quad (28)$$

где  $a, C_0$  – произвольные постоянные,  $\mu = C_0^{1/(\beta_2-1)}$ . Из (12а), (26) и (27) следует уравнение для  $U(z)$ :

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{1+\beta_2}} \frac{d}{dz}(zU'(z)) = C_0 z^{\beta_2}. \quad (29)$$

Уравнение (29) можно преобразовать к виду

$$\frac{d/dz(zU'(z))}{(zU'(z))^{\beta_2}} = C_0 dG(U(z))/dz, \quad (30)$$

где 
$$G(U) = \int g(U) dU . \quad (30a)$$

С помощью несложных преобразований уравнение (30) приводим к ОДУ 1-го порядка относительно  $U(z)$ :

$$\frac{1}{1-\beta_2} (zU'(z))^{1-\beta_2} - C_0 G(U(z)) = A . \quad (31)$$

Далее, (31) сводится к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого в неявном виде запишется следующим образом:

$$z = z_0 \exp \left\{ \left( \frac{1}{1-\beta_2} \right)^{\frac{1}{1-\beta_2}} \int \frac{dU}{(C_0 G(U) + A)^{\frac{1}{1-\beta_2}}} \right\} . \quad (32)$$

Таким образом, в рассмотренном случае функции  $U(z)$ ,  $Y(y)$  определяются формулами (32) и (28) соответственно, а функция  $X(x)$  является произвольной. Аналогично, в случае  $\beta_1 \neq 1$ ,  $\beta_2 = 1$  функция  $Y(y)$  является произвольной,  $X(x) = a \exp(\mu x)$ , а  $U(z)$  определяется формулой (32) с заменой  $\beta_2 \rightarrow \beta_1$ .

**Случай 2.**  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$ .

В этом случае из (12) и (12a) получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^2} \frac{d}{dz} (zU'(z)) = X(x)Y(y) . \quad (33)$$

Учитывая (11a) и (30a), преобразуем (33) к виду

$$\frac{1}{dG(U(z))/dz} \frac{d}{dz} (zU'(z)) = zU'(z) . \quad (34)$$

Из уравнения (34) получаем решение в неявном виде для функции  $U(z)$ :

$$z = z_0 \exp \left\{ A \int \exp(-G(U)) dU \right\} . \quad (35)$$

Здесь  $z_0, A$  – произвольные постоянные. В данном случае обе функции  $X(x), Y(y)$  являются произвольными.

**Случай 3.**  $\beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1) = 0$ .

Тогда из (17) с учетом (30a), получаем уравнение

$$\frac{1}{dG(U(z))/dz} \frac{d}{dz} (zU'(z)) = C_0 (zU'(z))^{\beta_1 + \beta_2 - 1} . \quad (36)$$

а)  $\beta_1 + \beta_2 \neq 2$ .

Тогда, аналогично предыдущим случаям, решение уравнения (36) можно записать в неявном виде:

$$z = z_0 \exp \left\{ \left( \frac{1}{2-\beta_1-\beta_2} \right)^{\frac{1}{2-\beta_1-\beta_2}} \int \frac{dU}{(C_0 G(U) + A)^{\frac{1}{2-\beta_1-\beta_2}}} \right\} . \quad (37)$$

б)  $\beta_1 + \beta_2 = 2, \lambda = 1$ .

В этом случае, аналогично (35), решение уравнения (36) запишется в виде

$$z = z_0 \exp \left\{ A \int \exp(-C_0 G(U)) dU \right\}. \quad (38)$$

Решая уравнения (18) и (19) с учетом третьего из условий (22), находим

$$X(x) = a \exp(C_1 x), \quad Y(y) = b \exp(C_2 y). \quad (39)$$

Итак, в данном случае функция  $U(z)$  в неявном виде задается формулами (37) или (38), а функции  $X(x), Y(y)$  – формулой (39).

### Заключение

Таким образом, в данной работе исследован класс двумерных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным с произвольными показателями и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции. С помощью метода функционального разделения переменных получены решения типа классической и обобщенной бегущей волны. Кроме того, при мультипликативном разделении переменных получены решения, зависящие от степенных и экспоненциальных функций от  $x, y$ , в том числе автомодельные решения, а также решения, содержащие произвольные функции этих переменных. Отдельно проанализированы решения при особых значениях параметров уравнения. Результаты могут быть обобщены на многомерные гиперболические уравнения со степенными нелинейностями.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевого типа. // Успехи математических наук. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
2. Кузнецова М.Н. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными постановками с уравнением Клейна – Гордона // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 3. С. 86–103.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
4. Полянин А.Д., Журов А.И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.
5. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
6. Рахмелевич И.В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 42–50.
7. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V.26. P.1901–1913.
8. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
9. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No. 7. P. 2498–2503.

Статья поступила 10.12.2014 г.

*Rakhmelevich I.V.* ON TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH POWER-LAW NON-LINEARITY IN THE DERIVATIVES

In recent years, extensive studies of nonlinear hyperbolic equations are carried out. Special attention is focused on equations of the Liouville type. However, of special interest is the study of nonlinear hyperbolic equations of a more general form, including those containing power-law nonlinearities in the derivatives. They are considered in this work.

To study two-dimensional nonlinear hyperbolic equations containing power-law nonlinearities in the derivatives and a nonlinearity of an arbitrary type of an unknown function, the method of functional separation of variables is applied.

For this class of equations, solutions of the traveling wave type and solutions depending on power and exponential functions of independent variables (in particular, self-similar solutions) were obtained, as well as solutions containing arbitrary functions of these variables. Solutions for regular and special values of parameters characterizing the nonlinearity have been obtained.

The obtained solutions are valid for a wide class of two-dimensional hyperbolic equations with a power-law nonlinearity in derivative. The results can be generalized for multidimensional nonlinear hyperbolic equations with power-law nonlinearities.

Keywords: nonlinear hyperbolic equation, functional separation of variables, power-law nonlinearity.

*RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich* (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Zhiber A.V., Sokolov V.V. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 2001, vol. 56, no. 1, pp. 63–106. (in Russian)
2. Kuznetsova M.N. O nelineynykh giperbolicheskikh uravneniyakh, svyazannykh differentsial'nymi podstanovkami s uravneniem Kleyna – Gordona. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 86–103. (in Russian)
3. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 432 p. (in Russian)
4. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Obobshchennoe i funktsional'noe razdelenie peremennykh v matematicheskoy fizike i mekhanike. *Doklady RAN*, 2002, vol. 382, no. 5, pp. 606–611. (in Russian)
5. Rakhmelevich I.V. O primenении метода razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, sodержashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 3(23), pp. 37–44. (in Russian)
6. Rakhmelevich I.V. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, sodержashchikh mult'iodnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1(27), pp. 42–50. (in Russian)
7. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.
8. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
9. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 1992, vol. 33, no. 7, pp. 2498–2503.

УДК 519.25

И.Г. Устинова, Е.Г. Пахомова

## СПЛАЙНОВАЯ ОЦЕНКА ТРЕНДА ВРЕМЕННОГО РЯДА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЧИСЛЕ ДАННЫХ В МОМЕНТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрена возможность выделения тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений сплайнами первого, второго и третьего порядков. Получены оценки коэффициентов сплайна в явном виде. Исследованы статистические характеристики полученных оценок.

**Ключевые слова:** *тренд временного ряда, сплайн первого, второго и третьего порядков, оценки параметров, статистические свойства оценок.*

Во многих задачах экономики, науки и техники приходится иметь дело с временными рядами. Наблюдаемые значения случайного процесса  $y(t)$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N, \dots$  образуют временной ряд. Одной из основных задач анализа временных рядов является задача выделения тренда [1] – систематической составляющей, так как выделенный тренд позволяет:

- а) предсказывать будущее на основе знания прошлого;
- б) управлять процессом, порождающим ряд;
- в) описывать характерные особенности ряда [2].

Идея использовать сплайны в задаче выделения тренда временного ряда не нова. В классической теории временных рядов измерения процесса производят через равные промежутки времени, причем в каждый момент времени производится ровно одно наблюдение [2–6]. Однако возможна такая организация измерений процесса, когда число проводимых измерений случайно [7]. Особенно часто такие ситуации возникают в экономических системах, например на фондовом рынке. Это приводит к необходимости разработки теории анализа временных рядов для ситуации, когда в каждый момент времени число измерений случайно.

Заметим, что выделение тренда в виде полинома, порядок которого выше четырех, нецелесообразно, ибо при оценке коэффициентов полинома получается большая погрешность. С другой стороны, если количество наблюдений велико, полином невысокого порядка может неудовлетворительно описывать истинный тренд. Выход состоит в сплайновой оценке тренда временного ряда.

В данной работе строится теория выделения тренда временного ряда, когда число измерений в каждый момент времени случайно сплайнами первого, второго и третьего порядков. В этом состоит принципиальное отличие данного исследования от работ других авторов.

### Постановка задачи

Пусть имеется временной ряд  $\bar{y}(t) = \varphi(t) + \xi(t)$ , являющийся суммой некоторой детерминированной функции  $\varphi(t)$ , которая является трендом процесса  $\bar{y}(t)$ , и  $\xi(t)$  – случайной функции, наличие которой обусловлено ошибками измерений,

внешними помехами и т.д. Предполагается, что помехи измерений  $\xi_i = \xi(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием  $M[\xi_i] = 0$  и дисперсией  $D[\xi_i] = \sigma^2$ . Нам известна последовательность значений

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N, \text{ где } \bar{y}_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in_i}}{n_i}.$$

Здесь  $n_i$  – случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ .

Будем считать, что сами моменты времени  $t_i$  нам известны. Относительно тренда предполагается, что он представляет собой сплайн. В этом случае весь отрезок наблюдения  $[0; T]$  разбивается на части одинаковой длины:

$$[0; T_0], [T_0; 2T_0], \dots, [(k-1)T_0; kT_0].$$

На каждом таком отрезке тренд оценивается в виде полинома соответствующей степени. На границах отрезков эти полиномы сшиваются так, чтобы получилась непрерывная кривая. Такая кусочно-полиномиальная кривая носит название сплайна [8–10].

### Выделение тренда в виде сплайна первого порядка

Уточним поставленную задачу для случая, когда  $\varphi_{is}$  – заданные функции времени. В качестве функций  $\varphi_{is}$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , возьмем функции вида

$$\varphi_s(t_i) = \varphi_{is} = \begin{cases} a_s t_i + b_s, & \text{если } t_i \in [sT_0; (s+1)T_0], \\ 0, & \text{если } t_i \notin [sT_0; (s+1)T_0]. \end{cases} \quad (1)$$

Потребуем, чтобы  $\varphi_s((s+1)T_0) = \varphi_{s+1}((s+1)T_0)$ . Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок  $\hat{a}_s, \hat{b}_s$  неизвестных параметров  $a_s, b_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , и исследованию этих оценок.

### Оценки параметров тренда

Найдем оценки  $\hat{a}_s, \hat{b}_s$  неизвестных параметров  $a_s, b_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , методом наименьших квадратов, исходя из условия

$$Q = \sum_{s=0}^k \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} n_i [\bar{y}_i - (\hat{a}_s t_i + \hat{b}_s)]^2 \Rightarrow \min_{\hat{a}_s, \hat{b}_s}. \quad (2)$$

Продифференцировав (2) по  $\hat{a}_s, \hat{b}_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , и приравняв частные производные к нулю, получаем систему  $2k$  уравнений с  $2k$  неизвестными, которая с введением матричных обозначений:  $\hat{\theta} = [\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{b}_{k-1}]^T$  – матрица-столбец оценок неизвестных параметров  $\theta = [a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{k-1}, b_{k-1}]^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=0}^{T_0} t_i n_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{T_0} t_i n_i & \sum_{i=0}^{T_0} n_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i n_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i n_i & \sum_{i=T_0}^{2T_0} n_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i n_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i n_i & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i \\ \sum_{i=T_0}^{2T_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=T_0}^{2T_0} n_i \bar{y}_i \\ \dots \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i \end{bmatrix},$$

будет иметь вид

$$A\hat{\theta} = Y, \quad (3)$$

откуда получаем решение системы

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (4)$$

Оценки (4) трудно исследовать и трудно считать, так как  $n_i$  – случайные величины и, следовательно, матрица  $A$  – матрица со случайными элементами, соответственно и матрица  $A^{-1}$  становится случайной. Поэтому вместо матрицы  $A$  в уравнении (3) возьмем  $M[A] = \lambda A_0$ , где

$$A_0 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T_0} t_i^2 & \sum_{i=0}^{T_0} t_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{T_0} t_i & \sum_{i=0}^{T_0} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i^2 & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=T_0}^{2T_0} t_i & \sum_{i=T_0}^{2T_0} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i^2 & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i & \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислив отдельно суммы, входящие в матрицу  $A_0$ , с учетом того, что  $t_i = i$ , получим

$$\frac{T_0}{6} \begin{bmatrix} 2T_0^2 + 3T_0 + 1 & 3(T_0 + 1) & \dots & 0 & 0 \\ 3(T_0 + 1) & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2T_0^2(3k^2 - 3k + 1) + 3T_0(2k - 1) + 1 & 3(2k - 1)(T_0 + 1) \\ 0 & 0 & \dots & 3(2k - 1)(T_0 + 1) & 6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению  $\lambda A_0 \hat{\theta} = Y$ , в котором  $A_0$  представлена (5). Заметим, что матрица  $A_0$  является квазидиагональной. Обозначим ( $\mathbf{0}$  – нулевая матрица)

$$A_0 = \frac{T_0}{6} \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} = \frac{T_0}{6} [A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}].$$

Тогда для обратной матрицы имеет место равенство

$$A_0^{-1} = \frac{6}{T_0} [A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \dots, A_{kk}^{-1}].$$

Убедившись, что матрица  $A_0$  является невырожденной, находим обратную матрицу  $A_0^{-1}$ , которая так же, как и исходная матрица, является квазидиагональной, с элементами, стоящими на главной диагонали вида

$$\frac{6}{T_0} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{2}{T_0^2 - 12s(2s + 1)T_0 - (12s^2 + 12s + 1)},$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{(2s + 1)(T_0 + 1)}{T_0^2 - 12s(2s + 1)T_0 - (12s^2 + 12s + 1)},$$

$$a_{22} = \frac{2(3s_2 + 3s + 1)T_0^2 + 3(2s + 1)T_0 + 1}{3(T_0^2 - 12s(2s + 1)T_0 - (12s^2 + 12s + 1))}, \quad s = \overline{0, k - 1}.$$

Знание обратной матрицы позволяет в явном виде записать оценки неизвестных параметров тренда в виде

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda} (A_0^T A_0)^{-1} A_0^T Y. \quad (6)$$

### Выделение тренда в виде сплайна второго порядка

Теперь в условиях предыдущей задачи в качестве функций  $\varphi_{is}$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , возьмем функции вида

$$\varphi_{is} = \begin{cases} a_s t_i^2 + b_s t_i + c_s, & \text{если } t_i \in [sT_0; (s+1)T_0], \\ 0, & \text{если } t_i \notin [sT_0; (s+1)T_0]. \end{cases}$$

Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок  $\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s$  неизвестных параметров  $a_s, b_s, c_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , и исследованию этих оценок. Так же как и в предыдущем пункте, воспользовавшись методом наименьших квадратов исходя из условия

$$Q = \sum_{s=0}^k \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} n_i \left[ \bar{y}_i - (\hat{a}_s t_i^2 + \hat{b}_s t_i + \hat{c}_s) \right]^2 \Rightarrow \min_{\hat{a}_s, \hat{b}_s},$$

найдем оценки неизвестных параметров. После дифференцирования предыдущего выражения по  $\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , получим систему уравнений (3), в которой  $\hat{\theta} = [\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{c}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{b}_{k-1}, \hat{c}_{k-1}]^T$ ,  $A$  – квазидиагональная матрица с диагональными элементами вида

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i \\ \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i \\ \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} n_i \end{bmatrix}, \quad s = \overline{1, k}, \quad \text{и} \quad Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i^2 \\ \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i \\ \dots \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i t_i^2 \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i \end{bmatrix}.$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению  $\lambda A_0 \hat{\theta} = Y$ , в котором  $A_0$  есть квазидиагональная матрица, в которой диагональные элементы имеют вид

$$\frac{T_0 + 1}{60} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = 2T_0 \left[ 6T_0^3(1 + 10s^2 - 5s + 5s^4 - 10s^3) + 3T_0^2(10s^2 - 10s + 3) + T_0 - 1 \right],$$

$$a_{33} = 60, \quad a_{12} = a_{21} = 15T_0^2(2s - 1)((2s^2 - 2s + 1)T_0 + 1),$$

$$a_{13} = a_{22} = a_{31} = 10T_0(2(3s^2 - 3s + 1)T_0 + 1), \quad a_{23} = a_{32} = 30(2s - 1)T_0, \quad s = \overline{0, k-1}.$$

Тогда обратная матрица к матрице  $A_0$  будет также квазидиагональной матрицей с диагональными элементами вида

$$\frac{60}{T_0 + 1} \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$a_{11}^0 = \frac{3}{T_0(T_0^3 + 4T_0^2 + T_0 - 6)}, \quad a_{12}^0 = a_{21}^0 = \frac{-3(2s - 1)}{(T_0^3 + 4T_0^2 + T_0 - 6)},$$

$$a_{13}^0 = a_{22}^0 = a_{31}^0 = \frac{(6s^2 - 6s + 1)T_0 - 1}{2(T_0^3 + 4T_0^2 + T_0 - 6)},$$

$$a_{23}^0 = a_{32}^0 = \frac{-3(T_0^2(20s^3 - 30s^2 + 14s - 2) - (2k - 1)T_0 - (2s - 1))}{10(T_0^3 + 4T_0^2 + T_0 - 6)},$$

$$a_{33}^0 = \frac{T_0^3(60s^4 - 120s^3 + 84s^2 - 24s + 3) - (12T_0^2s(s - 1) + T_0(12s^2 - 12s + 1) + 2)}{20(T_0^3 + 4T_0^2 + T_0 - 6)},$$

$$s = \overline{0, k-1}.$$

Оценки неизвестных параметров тренда задаются выражением (6).

### Выделение тренда в виде сплайна третьего порядка

Теперь, в качестве функций  $\varphi_{is}$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , рассмотрим функции вида

$$\varphi_{is} = \begin{cases} a_s t_i^3 + b_s t_i^2 + c_s t_i + d_s, & \text{если } t_i \in [sT_0; (s+1)T_0], \\ 0, & \text{если } t_i \notin [sT_0; (s+1)T_0]. \end{cases}$$

Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок  $\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s, \hat{d}_s$  неизвестных параметров  $a_s, b_s, c_s, d_s$ ,  $s = \overline{0, k-1}$ , и исследованию этих оценок. Так же как и ранее, воспользовавшись методом наименьших квадратов исходя из условия

$$Q = \sum_{i=1}^N n_i \left[ \bar{y}_i - \sum_{s=0}^k (\hat{a}_s t_i^3 + \hat{b}_s t_i^2 + \hat{c}_s t_i + d_s) \right]^2 \Rightarrow \min_{\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s, \hat{d}_s},$$

найдем оценки неизвестных параметров. После дифференцирования предыдущего

выражения по  $\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s, \hat{d}_s, s = \overline{0, k-1}$ , получим систему уравнений (3), в которой  $\hat{\theta} = [\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{c}_0, \hat{d}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{b}_{k-1}, \hat{c}_{k-1}, \hat{d}_{k-1}]^T$ ,  $A$  – квазидиагональная матрица с диагональными элементами вида

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^6 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^5 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i \\ \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^5 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i \\ \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i \\ \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i & \sum_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} n_i \end{bmatrix}, \quad s = \overline{1, k}, \quad \text{и} \quad Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i^3 \\ \sum_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i^2 \\ \dots \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i \end{bmatrix}.$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению  $\lambda A_0 \hat{\theta} = Y$ , в котором  $A_0$  есть квазидиагональная матрица, в которой диагональные элементы имеют вид

$$\frac{T_0 + 1}{420} \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & a_{14}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 & a_{24}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 & a_{34}^0 \\ a_{41}^0 & a_{42}^0 & a_{43}^0 & a_{44}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^0 &= 10T_0[6T_0^5(7s^6 + 21s^5 + 35s^4 + 35s^3 + 21s^2 + 7s + 1) + \\ &+ 3T_0^4(35s^4 + 70s^3 + 63s^2 + 28s + 5) + 3T_0^3(7s^2 + 7s + 2) - 3T_0^2(7s^2 + 7s + 2) - T_0 + 1], \\ a_{12}^0 &= a_{21}^0 = 35T_0^2(2s + 1)[2T_0^3(3s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 4s + 1) + 2T_0^2(5s^2 + 5s + 2) + T_0 - 1], \\ a_{13}^0 &= a_{22}^0 = a_{31}^0 = 14T_0[6T_0^3(5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1) + 3T_0^2(10s^2 + 10s + 3) + T_0 - 1], \\ a_{14}^0 &= a_{23}^0 = a_{32}^0 = a_{41}^0 = 105T_0^2(2s + 1)(T_0(2s^2 + 2s + 1) + 1), \\ a_{24}^0 &= a_{33}^0 = a_{42}^0 = 70T_0(2T_0(3s^2 + 3s + 1) + 1), \\ a_{34}^0 &= a_{43}^0 = 210(2s + 1)T_0, \quad a_{44}^0 = 420, \quad s = \overline{0, k-1}. \end{aligned}$$

Вычисление обратной матрицы к матрице  $A_0$  приведено в приложении. Оценки неизвестных параметров тренда задаются выражением (6).

### Исследование статистических характеристик полученных оценок

Из условия

$$M[\hat{\theta}] = M\left[\frac{1}{\lambda}(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T (A\theta + \xi)\right] = \frac{1}{\lambda}(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \lambda A_0 \theta = \theta$$

закключаем, что полученные оценки являются несмещенными. Здесь  $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{2k}]^T$ . Найдем вариационную матрицу оценок. Имеем

$$\hat{\theta} - \theta = \left(\frac{1}{\lambda}(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T A - E_{2k}\right)\theta + \frac{1}{\lambda}(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \xi,$$

$E_{2k}$  – единичная матрица размерности  $2k \times 2k$ . Тогда матрица вариаций оценок  $\theta$  имеет вид

$$V[\hat{\theta}] = M[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = \frac{1}{\lambda^2}(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T M[\xi\xi^T] A_0 \left((A_0^T A_0)^{-1}\right)^T,$$

где учтено, что  $M[\xi] = \theta$ . Так как  $M[\xi\xi^T] = \sigma^2 E_{2k}$ , то

$$V[\hat{\theta}] = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}(A_0^T A_0)^{-1}. \quad (7)$$

Это выражение позволяет находить матрицу вариаций оценок неизвестных параметров тренда временного ряда, когда в каждый момент времени производится случайное число измерений.

Обычно  $\sigma^2$  заранее неизвестна, однако ее оценку можно построить, исходя из минимума выражения

$$\bar{Q}_{\min 1} = \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} [(a_s - \hat{a}_s)t_i + (b_s - \hat{b}_s) + \xi_i]^2$$

для сплайна первого порядка,

$$\bar{Q}_{\min 2} = \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} [(a_s - \hat{a}_s)t_i^2 + (b_s - \hat{b}_s)t_i + (c_s - \hat{c}_s) + \xi_i]^2$$

для сплайна второго порядка и

$$\bar{Q}_{\min 3} = \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} [(a_s - \hat{a}_s)t_i^3 + (b_s - \hat{b}_s)t_i^2 + (c_s - \hat{c}_s)t_i + (d_s - \hat{d}_s) + \xi_i]^2$$

для сплайна третьего порядка. Вычислив математическое ожидание

$$M[\bar{Q}_{\min 1}] = \lambda \sigma^2 k(T_0 - 1), \quad M[\bar{Q}_{\min 2}] = \lambda \sigma^2 k(T_0 - 2), \quad M[\bar{Q}_{\min 3}] = \lambda \sigma^2 k(T_0 - 3),$$

возьмем в качестве оценки  $s^2$  дисперсии  $\sigma^2$  величину

$$s^2 = \frac{M[\bar{Q}_{\min 1}]}{\lambda k(T_0 - 1)}, \quad s^2 = \frac{M[\bar{Q}_{\min 2}]}{\lambda k(T_0 - 2)}, \quad s^2 = \frac{M[\bar{Q}_{\min 3}]}{\lambda k(T_0 - 3)}$$

для сплайнов первого, второго и третьего порядков соответственно. Подставив в (7) соответствующую оценку  $\sigma^2$  получим в явном виде оценку матрицы вариаций оценок неизвестных параметров тренда временного ряда, когда в каждый момент времени производится случайное число измерений.

### Выводы

Выделен тренд временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений в виде сплайна первого, второго и третьего порядков. Показана несмещенность оценок тренда. Найдена вариационная матрица оценок, а также оценка дисперсии, входящей в  $V[\hat{\theta}]$ . Получена оценка вариационной матрицы оценок параметров тренда, которая позволяет обычным образом вычислять доверительные интервалы параметров  $\theta$ .

### Приложение

Пусть  $A$  – матрица порядка  $4n$  вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

где  $A_m = \begin{pmatrix} \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^6 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^5 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \\ \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^5 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 \\ \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i \\ \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 & \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i & 1 + T_0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$

Требуется найти ее обратную матрицу  $A^{-1}$ .

Известно, что если  $A$  – блочно-диагональная матрица, то ее обратная матрица  $A^{-1}$  (если она существует) тоже является блочно-диагональной, причем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_n \end{pmatrix},$$

где  $B_m$  – обратная для  $A_m$ .

Для нахождения  $\mathbf{B}_m$  воспользуемся формулой  $\mathbf{B}_m = \frac{1}{|\mathbf{A}_m|} \cdot \mathbf{S}^T$ , где  $\mathbf{S}$  – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы  $\mathbf{A}_m$ . Поскольку  $\mathbf{A}_m$  – симметрическая, то  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$  и, следовательно,  $\mathbf{B}_m$  тоже симметрическая. Найдем  $|\mathbf{A}_m|$  и все элементы матрицы  $\mathbf{S}$ . При этом нам понадобятся следующие семь определителей третьего порядка:

$$1) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & k^2 \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^2 - k^2 & j^2 - k^2 & k^2 \\ i - k & j - k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^2 - k^2 & j^2 - k^2 \\ i - k & j - k \end{vmatrix} =$$

$$= (i - k)(j - k) \begin{vmatrix} i + k & j + k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (i - k)(j - k)(i - j);$$

$$2) \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 - k^3 & j^3 - k^3 & k^3 \\ i - k & j - k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 - k^3 & j^3 - k^3 \\ i - k & j - k \end{vmatrix} =$$

$$= (i - k)(j - k) \begin{vmatrix} i^2 + ik + k^2 & j^2 + jk + k^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (i - k)(j - k)(i^2 + ik - j^2 - jk) =$$

$$= (i - k)(j - k)(i - j)(i + j + k);$$

$$3) \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 - k^3 & j^3 - k^3 & k^3 \\ i^2 - k^2 & j^2 - k^2 & k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 - k^3 & j^3 - k^3 \\ i^2 - k^2 & j^2 - k^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (i - k)(j - k) \begin{vmatrix} i^2 + ik + k^2 & j^2 + jk + k^2 \\ i + k & j + k \end{vmatrix} = (i - k)(j - k)(i - j)(ij + ik + jk);$$

$$4) \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = ijk \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & k^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ijk \cdot \Delta_1 = ijk(i - k)(j - k)(i - j);$$

$$5) \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i & j & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ 1 & 1 & 1 + T_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \right) \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \right) \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1 + T_0) \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ i & j \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \right) \cdot (i-j) - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \right) \cdot (i^2 - j^2) + (1+T_0) \cdot (i^2 j - i j^2) = \\
&= (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} [k^2 - k(i+j) + ij] \right) = (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right); \\
6) \quad \Delta_6 &= \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i & j & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \\
&= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \right) \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \right) \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1+T_0) \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ i & j \end{vmatrix} = \\
&= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \right) \cdot (i-j) - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \right) \cdot (i^3 - j^3) + (1+T_0) \cdot (i^3 j - i j^3) = \\
&= (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} [k^3 - k(i^2 + ij + j^2) + ij(i+j)] \right) = \\
&= (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(k+i+j) \right); \\
7) \quad \Delta_7 &= \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^2 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \\
&= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \right) \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \right) \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1+T_0) \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ i^2 & j^2 \end{vmatrix} = \\
&= \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \right) \cdot (i^2 - j^2) - \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \right) \cdot (i^3 - j^3) + (1+T_0) \cdot (i^3 j^2 - i^2 j^3) = \\
&= (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} [k^3(i+j) - k^2(i^2 + ij + j^2) + i^2 j^2] \right) = \\
&= (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(ij + ik + jk) \right).
\end{aligned}$$

Найдем  $|A_m|$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 |A_m| &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \\ i^5 & j^4 & k^3 & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \\ i^4 & j^3 & k^2 & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \\ i^3 & j^2 & k & 1+T_0 \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \\ i & j & k & \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \\ 1 & 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \times \\
 &\times \left( - \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \right) \cdot \Delta_1 + \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \right) \cdot \Delta_2 - \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \right) \cdot \Delta_3 + (1+T_0) \cdot \Delta_4 \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \times \\
 &\times \left( - \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 + \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \right) \cdot (i+j+k) - \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \right) \cdot (ij+ik+jk) + (1+T_0) \cdot ijk \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \times \\
 &\times \left( - \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} [t^3 - t^2(i+j+k) + t \cdot (ij+ik+jk) - ijk] \right) = \\
 &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \left( \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} (t-i)(t-j)(t-k) \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k)(i-t)(j-t)(k-t). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Найдем алгебраические дополнения  $A_{ij} = A_{ji}$  элементов матрицы  $A_m$ :

$$\begin{aligned}
 1) \quad A_{11} &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^4 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^3 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^2 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j \cdot \Delta_5 = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j \cdot (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j (i-j)(i-k)(j-k); \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad A_{22} &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^4 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^4 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot \Delta_6 = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(k+i+j) \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j (i-j)(i-k)(j-k)(k+i+j); \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad A_{33} &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^2 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \Delta_6 = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(ij+ik+jk) \right) = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k)(ij+ik+jk); \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$4) \quad A_{44} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^5 & j^4 & k^3 \\ i^4 & j^3 & k^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=j_{m-1}}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 \cdot j^3 \cdot k^2 \cdot \Delta_1 = \\
&= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 \cdot j^3 \cdot k^2 \cdot (i-j)(i-k)(j-k); \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad A_{12} = A_{21} &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^4 & j^2 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} = \\
&= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot \Delta_5 = - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) = \\
&= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j (i-j)(i-k)(j-k); \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad A_{13} = A_{31} &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^4 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^4 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j^2 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \Delta_5 = \\
&= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) = \\
&= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k); \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad A_{14} = A_{41} &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^4 & k^3 \\ i^4 & j^3 & k^2 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix} = \\
&= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot \Delta_1 = \\
&= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \cdot j^2 \cdot k \cdot (i-j)(i-k)(j-k); \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad A_{23} = A_{32} &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^4 & j^3 & \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j^2 & 1+T_0 \end{vmatrix} = - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \Delta_6 = \\
 &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j) \cdot \left( \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(k+i+j) \right) = \\
 &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k)(k+i+j); \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad A_{24} = A_{42} &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^4 & j^3 & k^2 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot \Delta_2 = \\
 &= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \cdot j^2 \cdot k \cdot (i-j)(i-k)(j-k)(i+j+k); \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad A_{34} = A_{43} &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^5 & j^4 & k^3 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix} = \\
 &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \cdot j^2 \cdot k \cdot \Delta_3 = \\
 &= - \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \cdot j^2 \cdot k \cdot (i-j)(i-k)(j-k)(ij+ik+jk). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Итак, формулы (8) – (18) позволяют вычислить все элементы матрицы

$$B_m = \frac{1}{|A_m|} \cdot S, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

и, следовательно, искомая матрица  $A^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix}$  найдена.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тривоженко Б.Е. Выделение трендов временных рядов и потоков событий. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 284 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
3. Кендалл М.Д., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
4. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Аркабаев Н.К. Построение и оптимизация прогнозов на основе рекуррентных сплайнов первой степени // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13. № 2. С. 227–241.
5. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Метод рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 1. URL: <http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9440/index.html> (дата обращения 16.11.2014).
6. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Метод рекуррентной сплайн-прогнозирования степени 3 глубины 1. URL: <http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9354/index.html> (дата обращения 16.11.2014).
7. Идрисов Ф.Ф., Константинова И.Г. Выделение трендов временных рядов при случайном числе измерений // Изв. вузов. Физика. 1999. Т. 42. № 4. С. 14–18.
8. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
9. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. Лифшиц К.И. Сглаживание экспериментальных данных сплайнами. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 180 с.

Статья поступила 05.10.2014 г.

*Ustinova I.G., Pakhomova E.G. SPLINE ESTIMATE OF THE TIME SERIES TREND FOR A RANDOM NUMBER OF DATA AT MEASUREMENT INSTANTS*

In many problems of economy, science, and technology one deals with time series. The observed values of a random process  $y(t)$  at instants  $t_1, t_2, \dots, t_N, \dots$  form a time series. One of the main goals of time series analysis is the problem of separating the trend. It is a systematic component because a selected trend allows one:

- (a) to predict the future based on the knowledge of the past;
- (b) to manage the process generating the series;
- (c) to describe characteristic features of the series.

In the classical theory of time series, the process is measured at regular intervals, exactly one observation at each time instant. However, there exists an organization of the measurement process when the number of measurements is random. Such situations arise especially often in economic systems, for example, in the stock market. This leads to the necessity of developing the theory of time series analysis for a situation where the number of measurements at each time instant is random.

Note that selecting a trend polynomial whose order exceeds four is inexpedient in view of a large error in the evaluation of polynomial coefficients. At the same time, if the number of observations is large, a low order polynomial can be inadequate to describe the true trend. The solution is in a spline estimate of the time series trend.

In this work, we construct a theory of selecting a time series trend by splines of the first, second, and third orders when the number of measurements in each time is random. The estimates for the spline coefficients are obtained in an explicit form. We have investigated statistical characteristics of the obtained estimates.

Keywords: time series trend, spline of the first, second and third orders, parameter estimation, statistical properties of estimates.

*USTINOVA Irina Georgievna* (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof.,  
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: [igu@sibmail.com](mailto:igu@sibmail.com)

PAKHOMOVA Elena Grigoryevna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: peg@tpu.ru

## REFERENCES

1. Trivozhenko B.E. *Vydelenie trendov vremennykh ryadov i potokov sobytiy*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 1989, 284 p. (in Russian)
2. Anderson T. *Statisticheskii analiz vremennykh ryadov*. Moscow, Mir Publ., 1976, 755 p. (in Russian)
3. Kendall M.D., St'yuart A. *Mnogomernyy statisticheskii analiz i vremennye ryady*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 736 p. (in Russian)
4. Shumilov B.M., Esharov E.A., Arkabaev N.K. Postroenie i optimizatsiya prognozov na osnove rekurrentnykh splaynov pervoy stepeni. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 227–241. (in Russian)
5. Shumilov B.M., Esharov E.A. *Metod rekurrentnoy splayn-approksimatsii stepeni 3 glubiny 1*. Available at: <http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9440/index.html> (accessed 16.11.2014). (in Russian)
6. Shumilov B.M., Esharov E.A. *Metod rekurrentnoy splayn-prognozirovaniya stepeni 3 glubiny 1*. Available at: <http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9354/index.html> (accessed 16.11.2014). (in Russian)
7. Idrisov F.F., Konstantinova I.G. Vydelenie trendov vremennykh ryadov pri sluchaynom chisle izmereniy. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 1999, vol. 42, no. 4, pp. 14–18. (in Russian)
8. Zav'yalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. *Splayny v inzhenernoy geometrii*. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1985, 224 p. (in Russian)
9. Korneychuk N.P. *Splayny v teorii priblizheniya*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p. (in Russian)
10. Lifshits K.I. *Sglazhivanie eksperimental'nykh dannykh splaynami*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 1991, 180 p. (in Russian)

## МЕХАНИКА

УДК 519.688

**П.С. Дозморов**

### **КОНТРОЛЬ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА И ПРОНИЦАЕМОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫМИ МЕТОДАМИ**

Представлены программно-аппаратные комплексы для анализа гранулометрического состава и проницаемости горных пород, один из которых основан на комплексировании геометрического и гидродинамического методов гранулометрического анализа горных пород, что позволило учитывать коэффициент формы, в том числе и отличной от шарообразной. Другой из рассматриваемых комплексов позволяет проводить контроль проницаемости, основанный на комплексировании данных, получаемых с различных датчиков.

**Ключевые слова:** *комплексирование, гранулометрический состав, удельная поверхность, проницаемость пород, программно-аппаратный комплекс.*

Повышение экономической эффективности и конкурентоспособности в нефтяной и газовой промышленности невозможно без методов контроля гранулометрического состава горных пород и их проницаемости. Существует множество методов контроля характеристик исследуемого объекта. Одни и те же характеристики объекта могут контролироваться различными методами, каждый из которых выдает ошибку, заложенную в принцип реализации соответствующего метода, что уменьшает достоверность полученных данных. Существующие методики контроля не дают полного описания таких характеристик, как размер частиц, их формы, а также проницаемости горных пород, которые необходимо учитывать при разработке и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

В существующих методах контроля гранулометрического состава и проницаемости горных пород применяются эмпирические зависимости и поправочные коэффициенты, что затрудняет комплексно описывать характеристики материалов. В исследованиях Литвина И.Я. [1], Браславского Д.А. [2] и других авторов (например, [3–5]) используются методы комплексирования в различных областях науки и производства с целью увеличения достоверности получаемых характеристик исследуемых объектов. Комплексирование – процесс сочетания, объединения, создания комплексов. Как показывают исследования, оптимальное комплексирование методов позволяет повысить надёжность принимаемых проектных решений для организации контроля. Однако данные методы не используются для контроля процессов седиментации и определения проницаемости горных пород.

**Целью** данного исследования является разработка контроля программно-аппаратными способами гранулометрического состава осадочных горных пород и их проницаемости. Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

1) исследовать влияние комплексирования на контроль процессов осаждения частиц и определения проницаемости горных пород;

2) разработать программно-аппаратный измерительный комплекс для анализа гранулометрического состава горных пород на основе комплексирования методов микроскопии и седиментации для увеличения точности гранулометрического анализа и программно-аппаратный измерительный комплекс для анализа проницаемости горных пород, особенностью которого является контроль за расходом жидкости в расширенном диапазоне (0,0001–30 мл/мин) и поддержанием разности давления в созданном комплексе;

3) разработать практические рекомендации по использованию программно-аппаратных комплексов для контроля гранулометрического состава и проницаемости горных пород.

### Основная часть

Теоретический анализ методов определения гранулометрического состава частиц и проницаемости горных пород выявил ряд преимуществ и недостатков. Каждый метод с позиции контроля имеет свое преимущество [6]. Очевидными преимуществами рассмотренных методов являются: достоверность визуализации (метод микроскопии); широкий диапазон измеряемых размеров частиц (ситовой и дифракционный методы); быстрота расчета (дифракционный метод); простота методов (метод седиментации). К существенным недостаткам этих методов следует отнести предположение о сферичности частиц, что влияет на точность определения их размеров, а также на физико-химические свойства исследуемых образцов и недостаточную точность измерений проницаемости для низкопроницаемых пород.

Принцип седиментационного метода анализа дисперсности лег в основу различных измерительных приборов, отличающихся методами реализации. Для данного исследования выбрана модель седиментации из стартового слоя, которая обеспечивает осаждение с одной высоты всех частиц анализируемой пробы порошка. В результате фиксируются все, даже самые крупные частицы, которые при обычных методах седиментационного анализа успевают достигнуть дна кюветы до начала измерений. Данная модель реализована в измерительном приборе «Весовой седиментометр ВС-4» [7]. Однако его использование имеет ряд ограничений:

- Связь проходит в жесткой привязке к персональному компьютеру с операционной системой (ОС) Windows. Данная операционная система не обеспечивает точной привязки к реальному времени. Например, пользователю необходимо получать информацию с частотой один раз в секунду. ОС выполняет ряд своих функций и задачу пользователя. Если ОС занята выполнением другой задачи, то происходит передержка сигнала, что ведет к искажению времени (вместо 1 с – может пройти 1,5 с).

- Данная сборка лишена возможности контролировать среду осаждения, например температуру жидкости, в которой происходит анализ, что вносит большие ограничения в эксплуатационные характеристики прибора.

- Калибровка прибора осуществляется пользователем прибора, которому необходимо знать физический принцип его построения, что требует дополнительного времени для обучения.

- Аппаратная часть прибора разрабатывалась около 20 лет назад. В настоящее время точность микросхем, а также интерпретация сигналов улучшена.

В исследовании процессов, происходящих при добыче нефти, кроме важнейшего параметра – размера частиц горной породы, необходимо учитывать способность горной породы пропускать к забоям скважин нефть или газ при перепадах давления. Такая способность характеризуется проводимостью коллектора (горная порода, содержащая пустоты (поры, каверны или системы трещин) и способная вмещать и фильтровать флюиды (нефть, газ, воду)) и называется проницаемостью горной породы.

В существующих нефтяных пластах при сравнительно небольших перепадах давлений) многие породы, из-за малых размеров пор, оказываются практически малопроницаемыми или совсем непроницаемыми для жидкостей и газов (глины, сланцы и др.). Для таких пород существует недостаточное количество прямых методов контроля.

### Пути решения выявленных проблем

Проведенный анализ работ показал, что перспективным методом является метод, основанный на комплексировании измерительных устройств, комплексировании имеющейся информации с целью минимизирования ошибки оценивания полученного результата. Наибольшее количество исследований с использованием необходимости комплексирования связаны с методами изучения земных недр и видов геофизических комплексов, что связано с разнообразием разведываемых объектов, многообразием их свойств и связей, и геологическая эффективность при их изучении тем выше, чем более широким будет комплекс. Возрастание количества комплекслируемых методов является условием достоверности контроля. На основании проведенного анализа научно-методических исследований и методик комплексирования в различных областях применения предлагается его классификация по методикам использования (рис. 1).

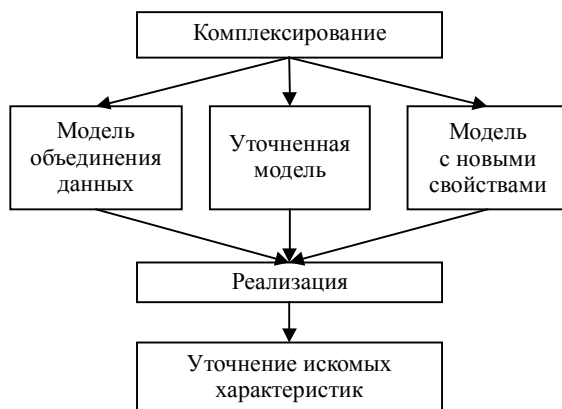


Рис. 1. Классификация комплексирования по методикам использования

Данная классификация позволяет выбирать ту или иную модель комплексирования в зависимости от целей решаемой задачи.

Характеристика моделей, представленных на рис. 1.

Кластер «Уточнённая модель» (рис. 2) подставляет собой внедрение характеристик одной модели в другую, тем самым увеличивая точность исходной модели.

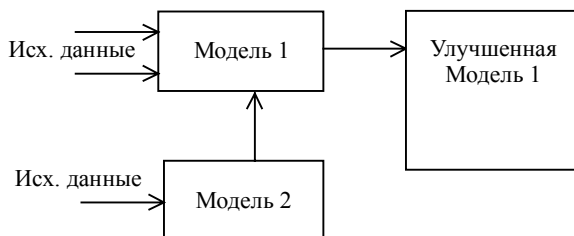


Рис. 2. Улучшенная модель

В кластере «Модель с новыми свойствами» (рис. 3) в результате комплексирования получаемая модель обладает хотя бы одним свойством, отличным от свойств в исходных моделях.



Рис. 3. Модель с новыми свойствами

Кластер «Реализация» (рис. 4) получается в результате комплексирования с её программной или программно-аппаратной реализацией при выполнении условия, что программная не влияет на свойства модели, но может уточнять качество модели.

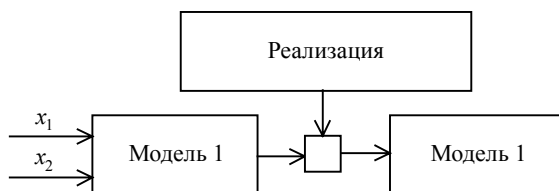


Рис. 4. Комплексирование модели с программной реализацией

Предложенная классификация позволяет, в зависимости от решаемой задачи повышения точности, выбрать объекты комплексирования.

На основании представленного в литературе физико-математического описания процессов седиментации предлагается использование одного из кластеров комплексирования «Модель с новыми свойствами». С этой целью используется уравнение Розина – Раммлера – Беннета [8] путем преобразования получаемой информации в аппаратной части с целью создания алгоритма для машинной обработки данных о гранулометрическом составе с учетом формы частиц, в том числе отличной от шарообразной. В работе [9] представлен алгоритм нахождения коэф-

коэффициентов для уравнения Розина – Раммлера – Беннета, зная которые, можно найти следующие величины:

- медиану полученного распределения;
- удельную поверхность частиц с учетом их форм;
- дифференциальное распределение частиц по размерам;
- интегральную функцию распределения частиц по размерам;
- массовую долю частиц по фракциям в процентном соотношении;
- количество частиц в процентном соотношении;
- коэффициент формы для каждого диапазона измерений.

Представленный метод анализа гранулометрического состава, с позиции преобразования получаемой информации с аппаратной части прибора, является наиболее применимым в качестве метода для алгоритмизации процедуры и аппаратной обработки данных для данного прибора, а также при использовании данных, полученных методом микроскопии. Появляется возможность измерять коэффициент формы частиц (что невозможно было определить отдельными методами) и увеличить точность расчета удельной поверхности частиц. Это позволяет более подробно рассматривать фильтрационные свойства горной породы.

Разработанный программно-аппаратный комплекс для анализа гранулометрического состава горных пород позволяет определять коэффициент формы частиц и учитывать её при анализе. С этой целью была улучшена аппаратная часть прибора «Весовой седиментометр ВС-4».

В разработанной аппаратной части использован датчик температуры для контроля среды осаждения, в которой происходит анализ, что позволяет исключить большие ограничения в эксплуатационные характеристики прибора. Калибровка разработанного программно-аппаратного комплекса осуществляется автоматически, что позволяет случайную погрешность при проведении измерений заменить на статическую погрешность прибора, которую программная часть комплекса учитывает. За процесс сбора и обработку информации отвечает микроконтроллер с операционной системой с жесткой привязкой времени, что позволяет осуществлять достоверный контроль времени.

Общая схема комплекса представлена на рис. 5.

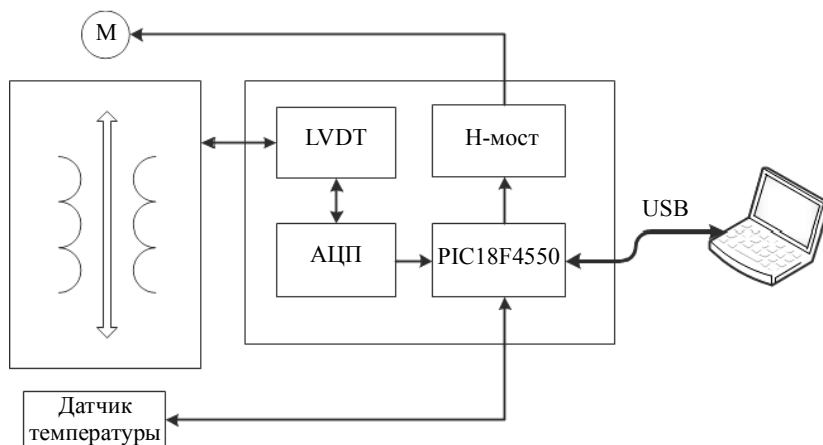


Рис. 5. Блок-схема аппаратной части комплекса для анализа гранулометрического состава

Для разработанной аппаратной части создан программный комплекс, который позволяет:

- вести запись полученных результатов;
- производить калибровку в автоматизированном режиме (при необходимости калибровки программа спрашивает у пользователя производить ли её);
- производить расчет гранулометрического состава по трем методам:
  - методу Розина – Рамлера – Беннета (для его использования достаточно данных, полученных с прибора);
  - комплексирования данных с использованием метода Розина – Рамлера – Беннета (для его использования необходимы данные как с седиметметра, так и с микроскопа);
  - вариационного ряда (для его использования необходимы данные с микроскопа) [10].

Полученный комплекс позволяет учесть коэффициент формы частиц горных пород и учитывать его при анализе гранулометрического состава, а также определять более достоверные характеристики исследуемого образца горной породы.

На основании характеристик кластеров объектов комплексирования с выделением их свойств, описанных выше, создан комплекс программной и аппаратной части прибора, которая позволяет определять проницаемость у низкопроницаемых горных пород (рис. 6).

Данный комплекс состоит из пяти датчиков давления, блока управления плунжерами, а также двух плунжеров, каждый из которых имеет шаговый двигатель и два концевика.

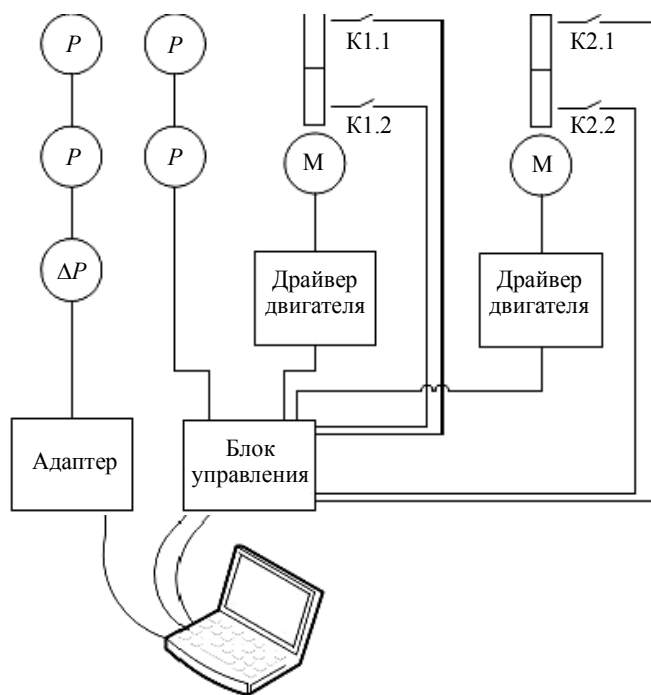


Рис. 6. Блок-схема электрической части комплекса для анализа проницаемости

Для работы с данным комплексом разработано программное обеспечение, позволяющее:

- задавать скорость прокачки жидкости;
- получать данные каждую секунду со всех датчиков давления;
- отображать графически положение плунжера в реальном времени;
- отображать полученные данные в виде графиков;
- задавать режим поддержания давления в системе с учетом критического давления;
- вести запись всех полученных результатов, а также обрабатывать их в ходе анализа.

В процессе использования полученного программно-аппаратного комплекса были отмечены его преимущества:

- расширение диапазона скорости подачи жидкости от 0,0001 до 30 мл/мин;
- возможность автоматического поддержания перепада давления или избыточного давления в гидравлической системе при использовании пяти датчиков давления в составе одноплунжерного насоса и системы фильтрации установки;
- реализация единой системы сбора и подготовки данных к анализу, что позволяет вести запись полученных результатов в реальном времени.

Таким образом, реализация методов комплексирования позволяет осуществлять более достоверный контроль горных пород путем учета несферичности частиц при анализе гранулометрического состава, а также увеличивать диапазон измерений проницаемости при анализе горных пород.

### Сравнение экспериментальных данных

Сравнение экспериментальных данных определения гранулометрического состава горных пород, полученных с прибора «Весовой седиментометр ВС-4», и данных, полученных с разработанного программно-аппаратного комплекса, с позиции несферичности показало, что, как видно из таблицы, форма частиц в «Весовом седиментометре ВС-4» одинакова во всех диапазонах измеренных частиц, в то время как в разработанном комплексе форма частиц при изменении диапазона меняется (близка к сфере).

#### Сравнение критерия формы в приборах

| Диапазон размера частиц, мкм | Коэффициент формы            |                        |
|------------------------------|------------------------------|------------------------|
|                              | «Весовой седиментометр ВС-4» | Разработанный комплекс |
| 3/0                          | 0                            | 0,0638                 |
| 5/3                          | 0                            | 0,0869                 |
| 7/5                          | 0                            | 0,0302                 |
| 10/7                         | 0                            | 0,0803                 |
| 14/10                        | 0                            | 0,027                  |
| 18/14                        | 0                            | 0,0361                 |
| 20/18                        | 0                            | 0,0345                 |
| 22/20                        | 0                            | 0,014                  |
| 24/22                        | 0                            | 0,0217                 |
| 26/24                        | 0                            | 0,0244                 |
| 28/26                        | 0                            | 0,0246                 |

Данный параметр (коэффициент формы) значительно влияет на удельную поверхность частиц, которая является важным параметром для расчета остаточных нефтяных запасов при прогнозировании добычи нефти.

Диапазон исследованных размеров частиц – 1–60 мкм, а воспроизводимость и достоверность результатов находится в пределах 5 % погрешности (по t-критерию Стьюдента), при этом точность созданного комплекса возросла на 2 % относительно получаемого гранулометрического распределения размеров частиц.

Результаты расчета показывают, что с уменьшением задаваемого расхода жидкости для измерения проницаемости погрешность разработанного комплекса уменьшается (рис. 7).

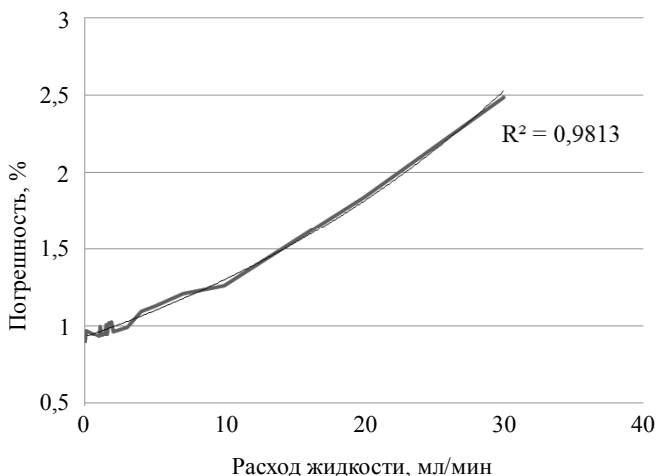


Рис. 7. Зависимость погрешности измерений от задаваемого расхода жидкости

В настоящее время для измерения проницаемости горных пород используются приборы с диапазоном расхода жидкости от 0,001 до 30 мл/мин. Разработанный комплекс позволяет задавать расход жидкости от 0,0001 мл/мин и проводить анализ низкопроницаемых горных пород (нижняя граница измерений в 10 раз меньше, чем в существующих приборах, используемых в нефтяной промышленности).

### Выводы

В исследовании получены следующие основные результаты:

- впервые исследовано влияние комплексирования на контроль осаждения частиц, что позволило создать методику комплексирования гидродинамического и геометрического методов контроля размера частиц;
- разработан и внедрен метод комплексирования способов анализа гранулометрического состава (методы седиментации и микроскопии), что позволило учитывать форму частиц, отличную от шарообразной, с целью повышения точности измерений (на 2 %). На основе полученного метода разработан программно-аппаратный измерительный комплекс для анализа гранулометрического состава горных пород. Полученный комплекс позволяет анализировать размер частиц с учетом их формы в диапазоне от 1 до 60 мкм экспресс-методом. Воспроизводимость и достоверность результатов лежит в пределах 5 %-й погрешности (по t-критерию Стьюдента);

- разработан и внедрен программно-аппаратный измерительный комплекс для контроля определения проницаемости горных пород, что позволило задавать расход жидкости в 10 раз более точно с погрешностью не более 1%;

- разработаны и внедрены практические рекомендации по использованию созданных программно-аппаратных комплексов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин И.Я. Комплексирование газогеохимических и геотермических методов при поисках месторождений нефти и газа: дис. ... канд. геол.-мин. наук. М., 1994. 166 с.
2. Браславский Д.А., Петров В.В. Точность измерительных устройств. М.: Машиностроение, 1976. 312 с.
3. Абабков К.В., Сулейманов Д.Д., Султанов Ш.Х., Котенев Ю.А., Варламов Д.И. Основы трехмерного цифрового геологического моделирования: учеб. пособие. Уфа: Нефтегазовое дело, 2010. 199 с.
4. Баранцев Р.Г. Комплексирование целостности // Глобализация: синергетический подход. М.: РАГС, 2002. С. 83–89.
5. Белая книга по нанотехнологиям: исследования в области наночастиц, наноструктур и нанокompозитов в Российской Федерации: по материалам Первого Всероссийского совещания ученых, инженеров и производителей в области нанотехнологий / Комиссия РАН по нанотехнологиям [и др.]; [сост.: В.И. Аржанцев и др.]. М.: Издательство ЛКИ, 2008]. 327 с.
6. Квеско Н.Г., Росляк А.Т., Дергунов А.С. Анализ гранулометрического состава горных пород и буровых растворов на основе слоевой седиментации. Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики // Материалы VI Всероссийской научной конференции. Томск, 2008. С. 379–380
7. Патент РФ № 2000563. / Седиментометр. Квеско Н.Г., Колесников А.А. Оpubл. Б.И. № 33–36, 1993. 4 с.
8. Коузов П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1974. 279 с.
9. Дозморов П.С., Росляк А.Т. Методика преобразования накопительной функции седиментометра в гранулометрический состав горной породы // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 06. С. 267–274.
10. Регистрация программы № 2012660447. Программное обеспечение для определения размера дисперсных частиц с применением прямого микроскопа проходящего света.

Статья поступила 16.12.2014 г.

#### *Dozmorov P.S. CONTROL FOR THE GRANULOMETRIC COMPOSITION AND PERMEABILITY OF ROCKS BY SOFTWARE AND HARDWARE METHODS*

There are many methods of control for characteristics of an object in oil and gas industry. Similar characteristics of the object can be controlled by a variety of methods each of which produces an error inherent in the implementation of the principle of an appropriate method, which reduces the reliability of the data. Existing control methods do not provide a complete description of characteristics (such as particle size, shape, and permeability of rocks) that need to be considered in the development and operation of oil and gas fields. In this paper, it is proposed to increase the reliability of the characteristics using the method of combination.

Based on the analysis of scientific and methodological researches and combination techniques in different application areas, a classification of combination methods in the aspect of operation techniques is proposed and a cluster characteristic of combination objects with a description of their properties is presented. This classification permits one to choose one or another combination model depending on purposes of the solved problem.

This paper presents the hardware and software systems for the analysis of particle size distribution and permeability of rocks. These complexes permit one to control for the particle size with

allowance for the shape factor and determine the permeability in low-permeability rocks by enhancing the range specified by the liquid flow (0.0001–30 ml/min).

The designed device for monitoring the particle size distribution is based on a combination of geometric and hydrodynamic methods, which makes it possible to measure the coefficient of the particle shape, including other than spherical. As a result, the device allows measuring the particle size in the range of 1–60 microns, repeatability, and reliability of results within the error of 5% (by Student's t-test), the accuracy of the created complex increased by 2% with respect to the particle size distribution regardless of the shape.

The proposed device allows one to find the median of the obtained distribution and specific surface area of particles in accordance with their shapes, differential particle size distribution, cumulative particle size distribution function, weight percentage of particle fractions, particle number percentage, and formfactor for each measurement range.

The author of the article also proposes a device allowing one to determine the permeability in low-permeability rocks based on a combination of data from different sensors (pressure, differential pressure, and temperature) in a single system for collecting and analyzing information. This allows one to automatically maintain the pressure (for any sensors, depending on the method) in the experiments.

Keywords: combination, particle size distribution, specific surface area, permeability rocks, software and hardware system.

DOZMOROV Pavel Sergeevich (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia)

E-mail: dozmorov88@gmail.com

#### REFERENCES

1. Litvin I.Ya. *Kompleksirovanie gazogeokhimicheskikh i geotermicheskikh metodov pri poiskakh mestorozhdeniy nefti i gaza*. Diss. kand. geol.-min. nauk. M., 1994, 166 p. (in Russian)
2. Braslavskiy D.A., Petrov V.V. *Tochnost' izmeritel'nykh ustroystv*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 312 p. (in Russian)
3. Ababkov K.V., Suleymanov D.D., Sultanov Sh.Kh., Kotenev Yu.A., Varlamov D.I. *Osnovy trekhmernogo tsifrovogo geologicheskogo modelirovaniya*. Ufa, Neftegazovoe delo Publ., 2010, 199 p. (in Russian)
4. Barantsev R.G. Kompleksirovanie tselostnosti. *Globalizatsiya: sinergeticheskii podkhod*. Moscow, RAGS Publ., 2002, pp. 83–89. (in Russian)
5. *Belaya kniga po nanotekhnologiyam: issledovaniya v oblasti nanochastits, nanostruktur i nanokompozitov v Rossiyskoy Federatsii: po materialam Pervogo Vserossiyskogo soveshchaniya uchenykh, inzhenerov i proizvoditeley v oblasti nanotekhnologiy*. Moscow, LKI Publ., 2008, 327 p. (in Russian)
6. Kvesko N.G., Roslyak A.T., Dergunov A.S. Analiz granulometricheskogo sostava gornykh porod i burovnykh rastvorov na osnove sloevoy sedimentatsii. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki. Materialy VI Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii*. Tomsk, 2008, pp. 379–380. (in Russian)
7. Kvesko N.G., Kolesnikov A.A. *Sedimentometr*. Patent RF, no. 2000563, 1993. (in Russian)
8. Kouzov P.A. *Osnovy analiza dispersnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov*. Leningrad, Khimiya Publ., 1974, 279 p. (in Russian)
9. Dozmorov P.S., Roslyak A.T. Metodika preobrazovaniya nakopitel'noy funktsii sedimentometra v granulometricheskii sostav gornoy porody. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie*, 2013, no. 06, pp. 267–274. (in Russian)
10. Registratsiya programmy no. 2012660447. *Programmnoe obespechenie dlya opredeleniya razmera dispersnykh chastits s primeneniem pryamogo mikroskopa prokhodyashchego sveta*. (in Russian)

УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

## УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ДВУХАТОМНОГО ГАЗА<sup>1</sup>

В рамках линейной теории исследована устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа с параболическим профилем статической температуры. Исходной математической моделью течения газа служила система уравнений двухтемпературной аэродинамики. В результате было показано, что при определенном сочетании значений параметров исследуемого течения (чисел Рейнольдса  $Re$ , Маха  $M$ , объемной вязкости  $\alpha_1$ , степени колебательной неравновесности  $\gamma_{vib}$  и времени колебательной релаксации  $\tau$ ) оно может быть как устойчиво, так и неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Для вязких возмущений рассчитаны спектры собственных значений, инкременты нарастания и кривые нейтральной устойчивости в плоскости  $(Re, \alpha)$  для первой и второй растущих мод в диапазоне чисел  $M = 2-6$  и  $Re = 10^4-10^7$ . Найден диапазон изменения критических чисел Рейнольдса  $Re_{cr} \approx (2-5) \cdot 10^4$ . Показано, что при всех уровнях возбуждения наиболее неустойчивой является вторая мода. Возбуждение практически не меняет форму области неустойчивости, но ее границы с ростом возбуждения смещаются в сторону больших волновых чисел. Можно констатировать, что, в общем, возбуждение внутренних степеней свободы молекул газа снижает инкременты нарастания возмущений и оказывает стабилизирующее воздействие на течение.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, неустойчивые вязкие моды возмущений, критическое число Рейнольдса.

В работах [1, 2] устойчивость плоского дозвукового течения Куэтта термически неравновесного молекулярного газа рассматривалась на основе нелинейной энергетической теории. Проведенное в этих работах обобщение теории на случай сжимаемых течений позволило получить значения критических чисел Рейнольдса  $Re_{cr}$ , в том числе и для слабо неравновесного газа. Найденные значения  $Re_{cr}$  по порядку величины совпадают с критическими числами Рейнольдса, полученными в аналогичной постановке для несжимаемого течения [3]. Этот результат подтверждает известное представление о том, что дозвуковое течение Куэтта можно считать практически несжимаемым. Вместе с тем экспериментальные данные по  $Re_{cr}$  в обоих случаях превосходят расчетные значения на несколько порядков. При этом для несжимаемой жидкости в настоящее время отсутствуют подходы, которые позволили бы сблизить данные теории и эксперимента. До последнего времени единственной альтернативой энергетической теории была классическая линейная теория устойчивости. В ее рамках плоское течение Куэтта несжимаемой жидкости изучалось многими авторами. Краткий обзор работ в этом направлении приведен в [4]. Центральным здесь является строгий математический результат

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00274).

[5] о его абсолютной устойчивости при всех числах Рейнольдса и произвольных длинах волн возмущений.

Для случая течения Куэтта сжимаемого газа к настоящему времени сложилась не столь определенная ситуация. Действительно, приложению линейной теории устойчивости к исследованию плоского течения Куэтта с учетом сжимаемости посвящено гораздо меньшее число работ. Кроме ранних публикаций (см. библиографию в [4]), в которых рассматривались упрощенные модели, достаточно полные результаты получены в работах [4, 6] и в сравнительно недавних работах [7, 8], объединенных общей постановкой задачи. Асимптотические исследования устойчивости в невязком пределе, а также при больших, но конечных числах Рейнольдса, представлены только в [4]. При этом для нахождения асимптотики спектра собственных мод для конечных чисел Рейнольдса использовался метод возмущений, отличный от традиционного подхода линейной теории [9]. В частности, не рассматривалось асимптотическое построение кривой нейтральной устойчивости.

Основные численные результаты во всех трех работах получены методом колокаций с использованием QZ-алгоритма для нахождения спектра фазовых скоростей возмущений. Тем не менее результаты работ [6–8] противоречат более ранним результатам [4]. Авторы [4] констатировали сильное стабилизирующее влияние вязкости и отсутствие растущих вязких мод вплоть до чисел  $Re = 5 \cdot 10^6$  при числах Маха  $M \leq 5$ . Отсутствие растущих вязких мод было также зафиксировано на основе асимптотических поправок к результатам в невязком пределе. В то же время в численных расчетах [6–8] были найдены неустойчивые вязкие моды при близких числах Рейнольдса. Более того, авторами [6, 7] было обнаружено, что в некотором диапазоне длин волн, чисел Рейнольдса и Маха вязкость оказывает дестабилизирующее воздействие. В частности, возникает неустойчивость выделенной моды, устойчивой в невязком пределе.

Возможной причиной такого расхождения является несовершенство реализации численного метода в [4], где использовалась авторская разработка, в отличие от работ [6–8], применявших профессиональное математическое обеспечение, которое в [6, 7] дополнительно тестировалось на основе альтернативного конечно-разностного метода.

Общие характеристики линейной устойчивости плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного газа рассматривалось в [10, 11], где было показано значительное стабилизирующее воздействие релаксационного процесса. Линейная устойчивость течения Куэтта в условиях сильного отклонения от термодинамического равновесия до последнего времени не исследовалась. Следует отметить, что в цитированных работах влияние объемной вязкости, отражающей слабую неравновесность внутренних степеней свободы молекул газа, исключалось с помощью соотношения Стокса. Поэтому обращение к линейной теории с целью исследования влияния термической неравновесности на характеристики устойчивости классического течения представляет самостоятельный интерес. Результаты, полученные на основе линейной теории для невозбужденного газа, в принципе позволяют надеяться на сближение по порядку величины расчетных и экспериментальных значений критических чисел Рейнольдса по сравнению с результатами [1, 2], по крайней мере, для сверхзвуковых чисел Маха.

### Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается линейная устойчивость плоского течения Куэтта термически неравновесного двухатомного газа. В координатной плоскости  $(x, y)$  поток ограничен двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $h$  друг от друга. Считается, что плоскость  $y = 0$  покоится, а граница  $y = h$  движется равномерно в собственной плоскости со скоростью  $U_0$ . Исходной математической моделью течения газа служит система уравнений двухтемпературной аэродинамики. В соответствии с физическими представлениями [12, 13] модель двухтемпературной аэродинамики является общепринятой физико-математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

В качестве характерных величин для обезразмеривания были выбраны ширина канала  $h$ , скорость границы  $U_0$ , плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$  основного течения на движущейся границе канала и образованные из них время  $\tau_0 = L/U_0$  и давление  $p_0 = \rho_0 U_0^2$ . В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной аэродинамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} &= 0, \quad \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \\ = \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2 \text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left( \alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right], \\ \gamma_v \rho \left( \frac{\partial T_v}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right) &= \frac{20 \gamma \gamma_v}{33 \text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T_v}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}, \\ \gamma M^2 p &= \rho T, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом. Коэффициент  $\alpha_1 = \eta_b/\eta$  есть отношение объемной и сдвиговой вязкостей. Коэффициент  $\gamma = c_p/c_v$  – показатель адиабаты,  $c_v = c_{v\tau} + c_{v\text{r}}$ ,  $c_p = c_{v\tau} + R$  – соответственно удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении, где выделены составляющие, обусловленные поступательным  $c_{v\tau}$  и вращательным  $c_{v\text{r}}$  движением молекул газа,  $R$  – газовая постоянная. Коэффициент  $\gamma_{\text{vib}} = c_{v\text{v}}/(c_{v\tau} + c_{v\text{r}} + c_{v\text{v}})$  характеризует степень неравновесности колебательной моды,  $c_{v\text{v}}$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме, связанная с колебательным движением молекул газа,  $\tau$  – характерное время колебательной релаксации. Параметры  $\text{Re} = \rho_0 h U_0/\eta$  и  $M = U_0/(\gamma R T_0)^{1/2}$  есть соответственно числа Рейнольдса и Маха несущего потока.  $\text{Pr} = \eta c_v/\lambda$  – число Прандтля, где коэффициент теплопроводности  $\lambda = \lambda_{\tau} + \lambda_{\text{r}}$  определяется поступательными и вращательными степенями свободы молекул газа.

Нижний предел  $\gamma_{\text{vib}} = 0$  соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равнораспределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра  $\gamma_{\text{vib}}$ . Поскольку закон равнораспределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока  $T$  и колебательной температурой  $T_{\text{vib}}$  может быть достаточно велик. В [13] показано, что при  $T = 300$  К неравновесная теплоемкость  $c_{\text{vib}} \approx 1,8R$ . Используя равнораспределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр  $\gamma_{\text{vib}} \approx 0,42$ . С ростом разрыва между температурами  $T_{\text{vib}}$  и  $T$  значение  $\gamma_{\text{vib}}$  увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. В расчетах максимальное значение параметра  $\gamma_{\text{vib}}$  было выбрано равным 0,4 для того, чтобы остаться в рамках используемой модели, избежав возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

Предполагается, что в невозмущенном стационарном потоке все параметры зависят только от поперечной координаты  $y$ , статическая  $T_S$  и колебательная  $T_{\text{vib},S}$  температуры равны:  $T_S(y) = T_{\text{vib},S}(y)$ . Для исходного течения ставятся следующие граничные условия:

$$U_S(0) = 0, \quad U_S(1) = 1, \quad \left. \frac{dT_S}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad T_S(1) = 1.$$

В результате получаем, что точное решение системы (1) имеет вид

$$U_S(y) = y, \quad T_S(y) = T_{\text{vib},S}(y) = 1 + \frac{(\gamma - 1) \text{Pr} M^2}{2} (1 - y^2),$$

$$\rho_S(y) = \frac{1}{T_S(y)}, \quad p_S(y) = \frac{1}{\gamma M^2}. \quad (2)$$

Подстановка мгновенных значений гидродинамических переменных возмущенного потока в виде

$$u_1 = U_S + \hat{u}_x, \quad u_2 = \hat{u}_y, \quad \rho = \rho_S + \hat{\rho}, \quad T = T_S + \hat{T}, \quad T_{\text{vib}} = T_{\text{vib},S} + \hat{T}_{\text{vib}}, \quad p = p_S + \hat{p}$$

(где  $\hat{u}_x(x, y, t)$ ,  $\hat{u}_y(x, y, t)$ ,  $\hat{\rho}(x, y, t)$ ,  $\hat{p}(x, y, t)$ ,  $\hat{T}(x, y, t)$ ,  $\hat{T}_{\text{vib}}(x, y, t)$  – возмущения компонент скорости, плотности, давления, статической и колебательной температур газа) в уравнения системы (1) и последующая их линеаризация относительно стационарного решения (2) приводит в первом приближении к системе уравнений для малых возмущений:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \rho_S \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) + \hat{u}_y \frac{\partial \rho_S}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_S \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial U_S}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}
 \rho_S \left( \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right), \quad (3) \\
 \rho_S \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_S}{\partial y} \right) &+ \gamma(\gamma-1)M^2 \rho_S \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) = \\
 &= \frac{\gamma}{\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right) + \frac{\gamma_v \rho_S (\hat{T}_{\text{vib}} - \hat{T})}{\tau} + \frac{2\gamma(\gamma-1)M^2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) \frac{dU_S}{dy}, \\
 \gamma_v \rho_S \left( \frac{\partial \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_S}{\partial y} \right) &= \frac{20\gamma\gamma_v}{33\text{RePr}} \left( \frac{\partial^2 \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\gamma_v \rho_S (\hat{T}_{\text{vib}} - \hat{T})}{\tau}, \\
 \gamma M^2 \hat{p} &= \rho_S \hat{T} + \hat{p} T_S.
 \end{aligned}$$

Принималось, что на границах канала при  $y = 0$  и  $y = 1$  все возмущения обращаются в нуль и периодичны по продольной координате  $x$ .

Представляем периодические по  $x$  возмущения в виде бегущих плоских волн:

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}_0(y) \cdot e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \mathbf{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{p}, \hat{T}, \hat{T}_{\text{vib}}, \hat{p}),$$

$$\mathbf{q}_0(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – волновое число вдоль периодической переменной  $x$ ,  $c = c_r + ic_i$  – комплексная фазовая скорость,  $i$  – мнимая единица. Подставляя (4) в уравнения системы (3), получим, что амплитуды возмущений будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 D\rho + \alpha \rho'_S v + \rho_S \sigma &= 0, \quad \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - \rho_S D u - \alpha \rho_S v U'_S - i\alpha \varepsilon = 0, \quad \frac{\alpha}{\text{Re}} \Delta v - \alpha \rho_S D v - \varepsilon' = 0, \\
 \frac{\gamma}{\text{RePr}} \Delta \theta - \rho_S D \theta - \alpha \rho_S v T'_S - (\gamma-1)\sigma &+ \frac{2\gamma(\gamma-1)M^2}{\text{Re}} (u' + i\alpha^2 v) U'_S + \frac{\gamma_v \rho_S}{\tau} (\theta_v - \theta) = 0, \quad (5) \\
 \frac{20\gamma\gamma_v}{33\text{RePr}} \Delta \theta_v - \gamma_v \rho_S D \theta_v - \alpha \gamma_v \rho_S v T'_S &- \frac{\gamma_v \rho_S}{\tau} (\theta_v - \theta) = 0, \quad \gamma M^2 p = \rho_S \theta + \rho T_S,
 \end{aligned}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = \theta|_{y=0} = \theta|_{y=1} = \theta_v|_{y=0} = \theta_v|_{y=1} = p|_{y=0} = p|_{y=1} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где} \quad D = i\alpha(U_S - c), \quad \sigma = \alpha(v' + iu),$$

$$\varepsilon = p - \frac{\sigma}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right), \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2,$$

а штрих у функций здесь и далее обозначает дифференцирование по переменной  $y$ . Система (5) вместе с однородными граничными условиями (6) определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений  $c = c_r + ic_i$ , а числа Маха  $M$ , Рейнольдса  $\text{Re}$  и волновое число  $\alpha$  служат параметрами.

### Методы решения спектральной задачи

Для расчета собственных значений  $c = c_r + ic_i$  неустойчивых мод система уравнений (5) сводилась к матричному виду и далее решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций, основанный на полиномиальной интерполяции собственных функций полиномами Чебышева [14, 15]. В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса – Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi n}{N} \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

в которых полином Чебышева  $N$ -й степени имеет экстремумы на отрезке  $y = [0, 1]$ . Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных  $D_N^1$  размером  $(N+1) \times (N+1)$ , элементы которой определяются по формулам [14, 15]

$$D_{N,ij}^1 = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell+j} s_\ell}{s_j(y_\ell - y_j)}, & \ell \neq j, \\ -\frac{y_j}{2(1-y_j^2)}, & 1 \leq \ell = j \leq N-1, \\ \frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = 0, \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = N, \end{cases} \quad s_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

При этом элементы  $\ell$ -й строки матрицы  $D_N^1$  являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в  $\ell$ -м узле коллокации на шаблоне  $\{y_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией  $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$  [14, 15].

В терминах введенных аппроксимаций задача (3) сводится к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра  $c = c_r + ic_i$ :

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - cF_{kj})r_j = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5N+4. \quad (7)$$

В (7) вектор неизвестных  $r$  размером  $5(N+1)$  состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$r(x_2) = (p_0, p_1, \dots, p_N, u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

а матрицы  $G$ ,  $F$  размером  $5(N+1) \times 5(N+1)$  вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A_1 \otimes D_N^2 + A_2 \otimes D_N^1 + A_3 \otimes I_N, \quad F = A_4 \otimes I_N.$$

Здесь знак « $\otimes$ » обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [16];  $I_N$  – единичная матрица размером  $(N+1) \times (N+1)$ ;  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) – матрицы размером  $5 \times 5$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{4}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20 \gamma \gamma_v}{33 \text{Re Pr}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i\alpha^2}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{T_S}{\gamma M^2} & \frac{i\alpha}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & 0 & -\frac{\rho_S}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & \frac{2\gamma(\gamma-1)M^2 U'_S}{\text{Re}} & -\alpha(\gamma-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -iU_S & -i\rho_S & -\rho'_S & 0 & 0 \\ -\frac{i\alpha T_S}{\gamma M^2} & -\alpha a_1 & -\alpha \rho_S U'_S & -\frac{i\alpha \rho_S}{\gamma M^2} & 0 \\ -\frac{T'_S}{\gamma M^2} & 0 & -\alpha^2 a_2 & -\frac{\rho'_S}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & -i\alpha(\gamma-1) & \alpha a_5 & -a_3 & \frac{\gamma_v \rho_S}{\tau} \\ 0 & 0 & -\alpha \gamma_v \rho_S T'_S & \frac{\gamma_v \rho_S}{\tau} & -\gamma_v a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\rho_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha^2 \rho_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha \rho_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha \gamma_v \rho_S \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{4}{3} \right) + i\rho_S U_S, \quad a_2 = \frac{\alpha}{\text{Re}} + i\rho_S U_S, \quad a_3 = \frac{\gamma \alpha^2}{\text{Re Pr}} + \frac{\gamma_v \rho_S}{\tau} + i\alpha \rho_S U_S,$$

$$a_4 = \frac{20 \gamma \alpha^2}{33 \text{Re Pr}} + \frac{\rho_S}{\tau} + i\alpha \rho_S U_S, \quad a_5 = \frac{2 i \alpha \gamma (\gamma-1) M^2 U'_S}{\text{Re}} - \rho_S T'_S, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}.$$

Однородные граничные условия (6) для уравнения (7) учитываются неявно через оператор  $D_N^1$  и на дискретном уровне реализуются заменой матриц  $D_N^k$  ( $k = 1, 2$ ) на окаймленные матрицы размером  $(N-1) \times (N-1)$  [14, 15], которые получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^\ell = D_{N,j}^\ell = 0, \quad D_{i,0}^\ell = D_{i,N}^\ell = 0, \\ i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \ell = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (7) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм, который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц  $G, F$  к обобщенной верхней треугольной форме [17]. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений чисел Рейнольдса  $Re$  и Маха  $M$ , объемной вязкости  $\alpha_1$ , степени неравновесности колебательной энергии  $\gamma_{vib}$ , времени колебательной релаксации  $\tau$  и волнового числа  $\alpha$  получается набор  $(N+1)$ -го собственных значений  $c = c_r + ic_i$ .

Для проверки точности вычислений параллельно были проведены расчеты собственных значений  $c = c_r + ic_i$  с помощью метода «стрельбы». Для этого уравнения (5) заменялись фундаментальной системой уравнений и граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций  $\rho, u, v, \theta$  и  $\theta_{vib}$ . Полученная система при фиксированных наборах параметров  $Re, M, \gamma_{vib}, \tau$  и  $\alpha$  интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге-Кутты четвертого порядка на интервалах  $y \in [0; 0,5]$  и  $y \in [0,5; 1]$  с шагом  $\Delta y = 10^{-3}$ . Шаг по волновому числу  $\Delta \alpha = 10^{-3}$ . Точкой «прицеливания» служила середина канала  $y = 0,5$ . Значения  $c_r$  и  $c_i$  подбирались таким образом, чтобы вычисленные «слева» и «справа» в точке  $y = 0,5$  значения функций  $\rho_r, u_r, v_r, \theta_r, \theta_{vib,r}$  и  $\rho_i, u_i, v_i, \theta_i, \theta_{vib,i}$  совпадали с точностью до  $10^{-8}$ . Соответствующее такому совпадению значение  $c$  принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров  $Re, M, \alpha_1, \gamma_{vib}, \tau, \alpha$ . Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и «стрельбы», показало, что различия в значениях  $c = c_r + ic_i$  наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Таким образом, была обеспечена необходимая точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

Расчеты велись при следующих значениях параметров:  $\gamma_{vib} = 0-0,4$ ;  $\tau = 10^{-2}-10$ ;  $\alpha_1 = 0-2$ ;  $M = 0,5-15$ ;  $Pr = 3/4$ ;  $\gamma = 7/5$ . Значение волнового числа менялось в диапазоне  $\alpha = 0-10$  с шагом  $\Delta \alpha = 10^{-3}$ . Число узлов коллокаций в интервале  $[0, 1]$  варьировалось в диапазоне от  $N+1 = 100$  до  $N+1 = 500$  и в большинстве расчетов принималось равным  $N+1 = 300$ .

### Результаты расчетов

Классификация вязких мод возмущений на четные и нечетные осуществляется аналогично классификации этих мод в невязком приближении [4] и сохраняется для случая колебательно-возбужденного газа [11]. Параметрические расчеты спектральной задачи показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне  $10^{-2} \leq \tau \leq 10$  слабо влияет на поведение кривых  $c_r(\alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}, M, Re)$  и  $c_i(\alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}, M, Re)$ . Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения характерного времени  $\tau = 1$ .

Расчет нейтральных кривых для  $n$ -й вязкой моды возмущений проводится следующим образом. Для фиксированных значений параметров  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{\text{vib}}$  и числа Маха  $M$  вычисляются двумерные массивы инкрементов (декрементов)  $n$ -й вязкой моды  $\omega_{i,jk}^n(\alpha_j, \text{Re}_k) = \alpha_j c_i^n(\alpha_j, \text{Re}_k)$ , где одномерные массивы  $\alpha_j$ ,  $\text{Re}_k$  рассчитываются по формулам  $\alpha_j = \alpha_0 + j \Delta\alpha$  ( $j = 0, 1, \dots, J$ ) и  $\text{Re}_k = \text{Re}_0 + k \Delta\text{Re}$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ),  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\text{Re}$  – шаги по волновому числу и числу Рейнольдса соответственно. Массив  $\omega_{i,jk}^n(\alpha_j, \text{Re}_k)$  определяет поверхность  $\omega_i(\alpha, \text{Re})$  для  $n$ -й вязкой моды возмущений. Координаты точек, определяющих геометрическое место данной изолинии поверхности  $\omega_i(\alpha, \text{Re})$  на плоскости  $(\alpha, \text{Re})$ , вычисляется по формуле  $|\omega_{i,jk}^n(\alpha_j, \text{Re}_k) - C| \leq 10^{-8}$ , где  $C$  представляет собой некоторое заданное числовое значение. При  $C = 0$  получаем нейтральную кривую  $\omega_i(\alpha, \text{Re}) = 0$  для  $n$ -й вязкой моды возмущений. Используя подход, описанный выше для случая, когда фиксируются значения параметров  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{\text{vib}}$  и  $\text{Re}$ , получим поверхность  $\omega_i(M, \alpha)$  и нейтральную кривую  $\omega_i(\alpha, M) = 0$  на плоскости  $(\alpha, M)$  для  $n$ -й вязкой моды возмущений.

Графики зависимостей фазовых скоростей  $c_r(\alpha)$  для семейств четных и нечетных мод возмущений приведены на рис. 1, где сплошной и штриховой линиями показаны зависимости  $c_r(\alpha)$  для четных и нечетных невязких мод возмущений соответственно при  $\gamma_{\text{vib}} = 0$  и  $\gamma_{\text{vib}} = 0,4$ . Из данного рисунка, следует, что варьирование числа Рейнольдса  $\text{Re}$  при фиксированных значениях параметров  $M$ ,  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{\text{vib}}$  не оказывает влияния на  $c_r(\alpha)$ . Из поведения кривых на рис. 1 следует, что рост значений параметра  $\gamma_{\text{vib}}$  приводит к уменьшению для  $c_r < 0$  и  $c_r > 1$  и к возрастанию для  $c_r \in (0; 1)$  по модулю значений фазовых скоростей  $c_r$ , но при этом их значения не выходят за границы  $c_r = 0$  и  $c_r = 1$ . Для нечетных мод при  $\alpha \rightarrow 0$   $c_r > 1$  и для всех мод, кроме моды I,  $c_r \rightarrow +\infty$ . В то же время для четных мод при  $\alpha \rightarrow 0$   $c_r < 0$  и для всех мод, за исключением моды II,  $c_r \rightarrow -\infty$ . Выделенные моды I и II при  $\alpha = 0$  имеют конечные пределы.

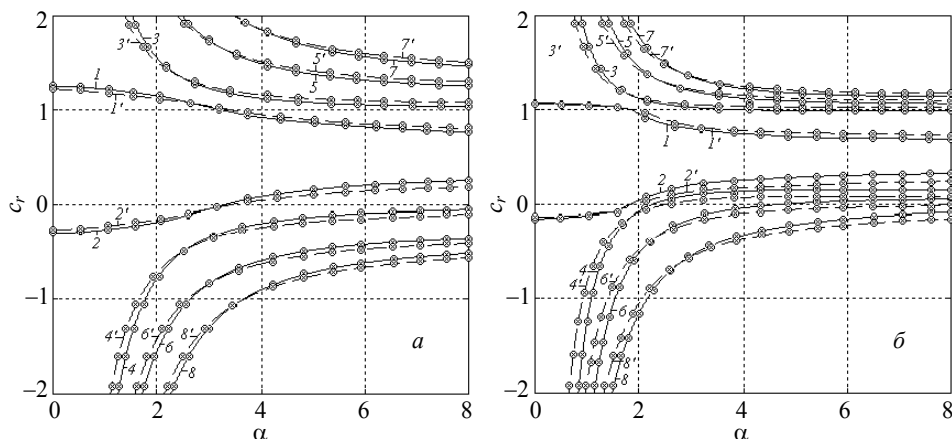


Рис. 1. Фазовые скорости  $c_r(\alpha)$  при  $\alpha_1 = 0$  ( $a - M = 2$ ,  $b - M = 5$ ; 1, 1' – мода I, 2, 2' – мода II, 3, 3' – мода III, 4, 4' – мода IV, 5, 5' – мода V, 6, 6' – мода VI, 7, 7' – мода VII, 8, 8' – мода VIII;  $\circ - \text{Re} = 5 \cdot 10^5$ ,  $\times - \text{Re} = 5 \cdot 10^6$ ; сплошная линия – невязкие моды при  $\gamma_{\text{vib}} = 0$ , пунктирная – невязкие моды при  $\gamma_{\text{vib}} = 0,4$ )

Расчеты зависимостей  $c_r(\alpha)$  для четных и нечетных вязких мод возмущений показали, что первыми пересекают границы интервала  $c_r \in [0; 1]$ , в котором в соответствии с первым условием Рэлея [9–11] возможно развитие неустойчивости, вязкие моды I и II (см. рис. 1). При этом, как мы видим, моды I и II пересекают линию  $c_r = 1$  для  $M = 2$  при  $\alpha \approx 3,4$ , а для  $M = 5$  при  $\alpha \approx 1,9$ . Значения  $c_r$  для старших четных (IV, VI и т.д.) и нечетных (III, V и т.д.) мод возмущений в диапазоне волновых чисел  $0 \leq \alpha < 3,4$  для  $M = 2$  и при  $0 \leq \alpha < 1,9$  для  $M = 5$  лежат вне интервала неустойчивости  $c_r \in [0; 1]$ . Из рис. 1 следует, что рост числа Рейнольдса  $Re$  не оказывает влияния на изменение фазовых скоростей  $c_r$  как четных, так и нечетных мод возмущений.

**а) Влияние вязкости на инкременты наиболее неустойчивых вязких мод возмущения в совершенном газе.** На рис. 2 и 3 демонстрируется влияние варьирования числа Рейнольдса  $Re$  на поведение зависимостей инкрементов  $\omega_i = i\alpha c_i(\alpha)$  для наиболее неустойчивых вязких мод I и II в совершенном газе ( $\alpha_1 = \gamma_{vib} = 0$ ) при фиксированных числах Маха  $M = 2$  и  $M = 5$  соответственно. Из графиков рис. 2 следует, что при  $M = 2$  для широкого интервала изменения числа Рейнольдса значения  $\omega_i$  возрастают с ростом  $Re$ , но остаются в отрицательной полуплоскости  $\omega_i$  во все диапазоне изменения волнового числа  $\alpha$ .

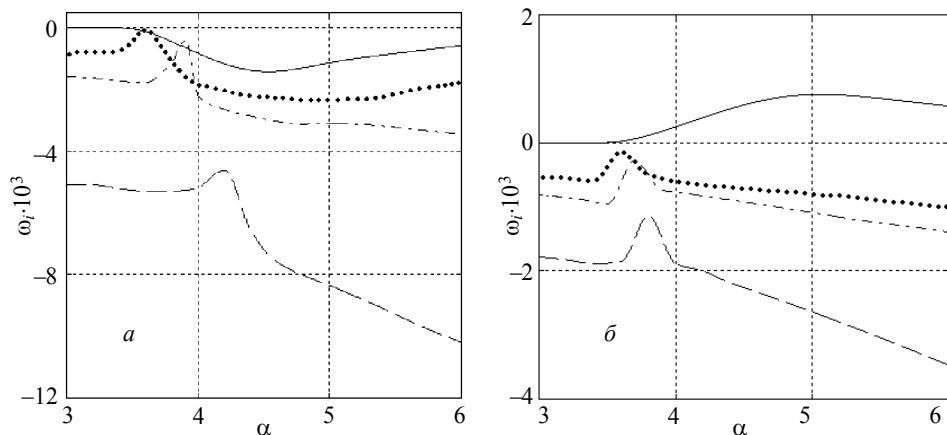


Рис. 2. Зависимости  $\omega_i(\alpha)$  для моды I (а) и моды II (б) в совершенном газе при  $M = 2$  (линия в виде точек –  $Re = 10^7$ , штрихпунктирная –  $Re = 10^6$ , штриховая –  $Re = 10^5$ , сплошная –  $Re = \infty$ )

Из рис. 3 следует, что графики зависимостей  $\omega_i(\alpha)$  для наиболее неустойчивой моды II при  $M = 5$  и различных значениях  $Re$  имеют два четко выраженных «пика», ширина первого из которых существенно меньше ширины второго. С ростом значений  $Re$ , как мы видим, ширина второго «пика» увеличивается, а ширина первого «пика» уменьшается. При этом высота первого «пика» падает, приближаясь в пределе  $Re \rightarrow \infty$  к нулю, а высота второго «пика» наоборот растет. Причем рост значений  $\omega_i$  в диапазоне волновых чисел  $\alpha$ , принадлежащих области второго «пика», ограничен сверху кривой, полученной в невязком приближении  $Re \rightarrow \infty$  (сплошная линия на рис. 3). В полуплоскости  $\omega_i < 0$  рост значений  $Re$  сопровождается ростом значений  $\omega_i$ .

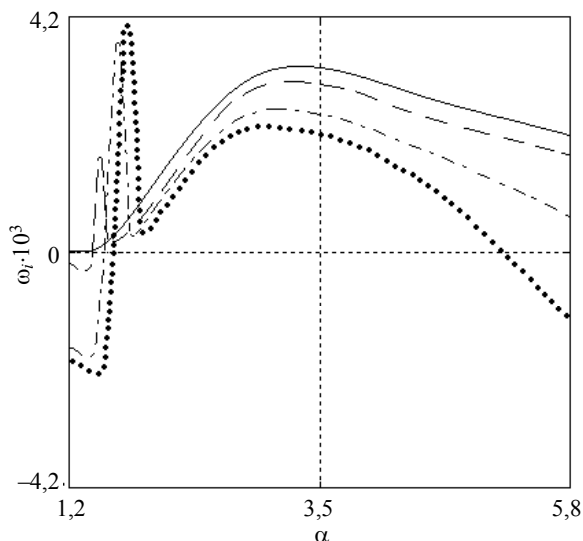


Рис. 3. Зависимости  $\omega_i(\alpha)$  для моды II в совершенном газе при  $M=5$  (линия в виде точек –  $Re = 5 \cdot 10^5$ , штрихпунктирная –  $Re = 5 \cdot 10^6$ , штриховая –  $Re = 5 \cdot 10^7$ , сплошная –  $Re = \infty$ )

На основании сказанного выше можно констатировать, что, в общем, рост значений числа Рейнольдса  $Re$  приводит к росту значений инкрементов  $\omega_i$  наиболее неустойчивых вязких мод возмущений и тем самым оказывает дестабилизирующее воздействие на течение. Отметим, что ранее аналогичный результат был также получен в работах [6–8].

**б) Влияние термической неравновесности газа на инкременты наиболее неустойчивых вязких мод возмущений.** На рис. 4 представлены изолинии инкрементов роста  $\omega_i(M, \alpha)$  вязких мод I и II для числа Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^5$  и различных значений объемной вязкости  $\alpha_1$  и степени колебательной неравновесности  $\gamma_{vib}$ . Сплошные линии соответствуют совершенному газу, а штриховые –  $\alpha_1 = 2$ ,  $\gamma_{vib} = 0,4$ . Замкнутые линии  $\omega_i(M, Re, \alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}) = 0$  представляют собой нейтральные кривые устойчивости первой и второй вязких мод возмущений на плоскости  $(M, \alpha)$  для заданных значений параметров  $Re$ ,  $\alpha_1$ , и  $\gamma_{vib}$ . Внутри областей, ограниченных линиями  $\omega_i(M, Re, \alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}) = 0$ , значения  $\omega_i > 0$  (течение неустойчиво), а вне –  $\omega_i < 0$  (течение устойчиво). Точки  $A_1, A'_1, A_2, A'_2$  и  $B_1, B'_1, B_2, B'_2$  на нейтральных кривых  $\omega_i(M, Re, \alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}) = 0$  представляют собой соответственно левые и правые критические точки на плоскости  $(M, \alpha)$ .

Из рис. 4 следует, что рост параметров  $\alpha_1$  и  $\gamma_{vib}$  не меняет форм областей неустойчивости мод I и II, но их границы с ростом возбуждения внутренних степеней свободы молекул газа смещаются в сторону больших волновых чисел  $\alpha$ . При этом абсциссы точек  $A_1, A_2$  на нейтральных кривых  $\omega_i(M, Re, \alpha, \alpha_1, \gamma_{vib}) = 0$  смещаются в сторону больших значений числа Маха  $M$  (абсциссы точек  $A'_1, A'_2$ ), а абсциссы точек  $B_1, B_2$  – в сторону меньших значений  $M$  (абсциссы точек  $B'_1, B'_2$ ). Следовательно, с ростом значений параметров  $\alpha_1, \gamma_{vib}$  размеры областей неустойчивости вязких мод I и II уменьшаются.

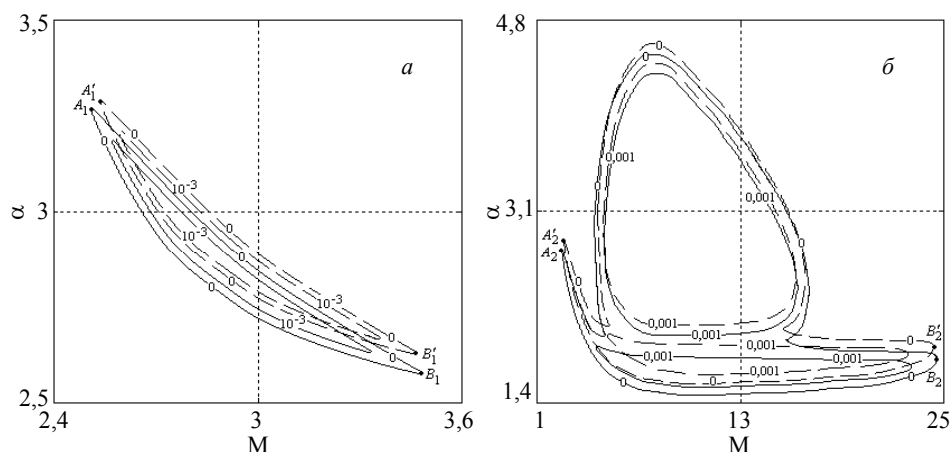


Рис. 4. Изолинии инкрементов роста  $\omega_i(M, \alpha)$  при  $Re = 2 \cdot 10^5$  (а – мода I, б – мода II; сплошная линия – совершенный газ, штриховая –  $\alpha_1 = 2$ ,  $\gamma_{vib} = 0,4$ )

Влияние варьирования параметров  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{vib}$  на поведение инкрементов роста  $\omega_i(\alpha)$  представлено на рис. 5. Из графиков на рис. 5 следует, что при  $Re = 5 \cdot 10^5$  и  $M = 3$  кривые  $\omega_i(\alpha)$  как для моды I, так и для моды II достигают своих максимальных значений, которые лежат в полуплоскости  $\omega_i > 0$ . С ростом  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{vib}$  значения максимумов падают, а значения волновых чисел  $\alpha$ , при которых они достигаются, смещаются в область больших  $\alpha$ . При этом мы наблюдаем, что на достаточно узких интервалах изменения волнового числа  $2,68 \leq \alpha \leq 2,78$  для моды I и  $2,29 \leq \alpha \leq 2,40$  для моды II рост значений параметров  $\alpha_1$ ,  $\gamma_{vib}$  приводит к дестабилизации первой и второй мод возмущений, а вне указанных интервалов к их стабилизации.

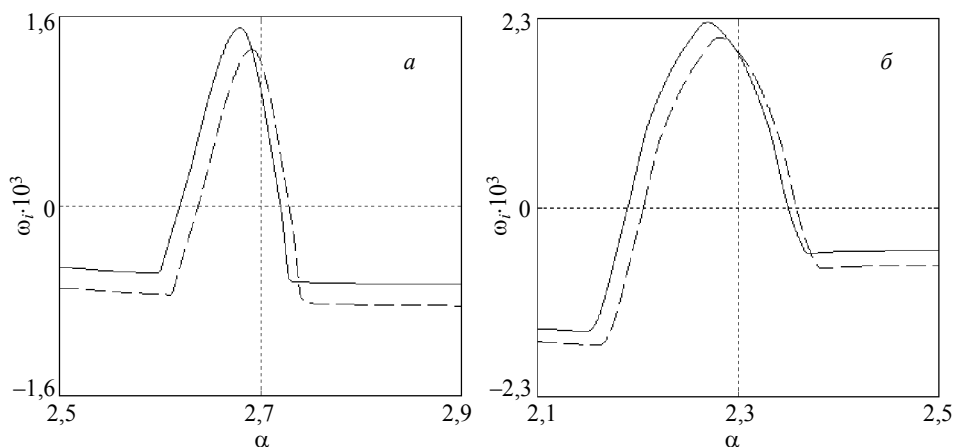


Рис. 5. Зависимости инкрементов роста  $\omega_i(\alpha)$  при  $Re = 5 \cdot 10^5$  и  $M = 3$  (а – мода I, б – мода II; сплошная линия – совершенный газ, штриховая –  $\alpha_1 = 2$ ,  $\gamma_{vib} = 0,4$ )

Таким образом, можно констатировать, что термическая релаксация снижает значения инкрементов роста наиболее неустойчивых мод возмущений  $\omega_i$  и тем самым оказывает стабилизирующее воздействие на течение.

**в) Критические параметры течения. Влияние сжимаемости и неравновесности внутренних мод молекул газа.** На рис. 6 представлены изолинии инкрементов роста  $\omega_i(\text{Re}, \alpha)$  вязких мод I и II для различных значений числа Маха  $M$  и параметров  $\alpha_1, \gamma_{\text{vib}}$ . Сплошные линии соответствуют случаю  $\alpha_1 = \gamma_{\text{vib}} = 0$ , а штриховые –  $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ . Точки  $K_1, K'_1, K_2, K'_2$  и  $K_3, K'_3$  на нейтральных кривых устойчивости  $\omega_i(\alpha, \text{Re}) = 0$  представляют собой критические точки для вязких мод I и II, а их координаты определяют критические значения числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{cr}}$  и соответствующие им значения волновых чисел  $\alpha_{\text{cr}}$ .

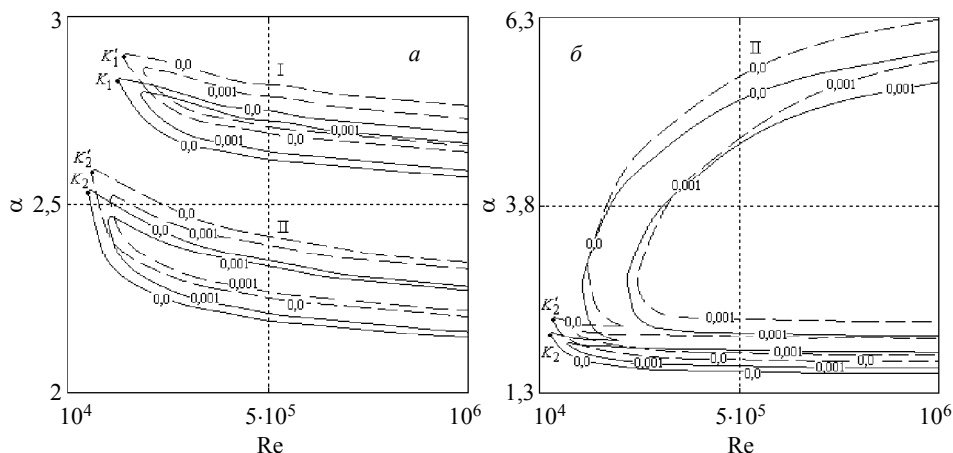


Рис. 6. Изолинии инкрементов роста  $\omega_i(\text{Re}, \alpha)$  при  $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$ ,  $M = 3$  (а) и  $M = 5$  (б) (сплошная линия – совершенный газ, штриховая –  $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ )

Из рис. 6 следует, что с ростом возбуждения внутренних степеней свободы молекул газа (параметров  $\alpha_1, \gamma_{\text{vib}}$ ) нейтральные кривые  $\omega_i = 0$  не меняют своей формы, но смещаются в сторону больших значений чисел Рейнольдса  $\text{Re}$  и волновых чисел  $\alpha$ . В результате рост параметров  $\alpha_1$  и  $\gamma_{\text{vib}}$  приводит к росту значений  $\text{Re}_{\text{cr}}$  и  $\alpha_{\text{cr}}$ . Так, например, критические значения числа Рейнольдса и соответствующие им значения волновых чисел вязкой моды I при числе Маха  $M = 3$  равны  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{I}} = 123900$ ,  $\alpha_{\text{cr}}^{\text{I}} = 2,837$  для  $\alpha_1 = \gamma_{\text{vib}} = 0$  и  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{I}} = 125600$ ,  $\alpha_{\text{cr}}^{\text{I}} = 2,859$  для  $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ , а вязкой моды II –  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{II}} = 50060$ ,  $\alpha_{\text{cr}}^{\text{II}} = 2,546$  для  $\alpha_1 = \gamma_{\text{vib}} = 0$  и  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{II}} = 50060$ ,  $\alpha_{\text{cr}}^{\text{II}} = 2,546$  для  $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ . В качестве критического числа Рейнольдса течения  $\text{Re}_{\text{cr}}$  при фиксированных значениях параметров  $\alpha_1, \gamma_{\text{vib}}$  принимается минимальное числовое значение из  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{I}}$  и  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{II}}$ :  $\text{Re}_{\text{cr}} = \min(\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{I}}, \text{Re}_{\text{cr}}^{\text{II}})$ .

На рис. 7 представлены графики зависимостей  $\text{Re}_{\text{cr}}(M)$  и  $\alpha_{\text{cr}}(M)$  для совершенного ( $\alpha_1 = \gamma_{\text{vib}} = 0$ ) и термически неравновесного ( $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ ) газов. Из вида графиков на этом рисунке следует, что на интервале  $3 \leq M < 6,2$  кривые  $\text{Re}_{\text{cr}}(M)$  падают, а при  $6,2 \leq M < 15$  наоборот возрастают. При  $M = 6,2$  кривые  $\text{Re}_{\text{cr}}(M)$  достигают своих минимальных значений, которые равны  $\text{Re}_{\text{cr}, \text{min}} = 20169$  для  $\alpha_1 = \gamma_{\text{vib}} = 0$  и  $\text{Re}_{\text{cr}, \text{min}} = 20473$  для  $\alpha_1 = 2, \gamma_{\text{vib}} = 0,4$ . В таблице приведены значения  $\text{Re}_{\text{cr}}$  и  $\alpha_{\text{cr}}$  для различных чисел Маха  $M$  и параметров  $\alpha_1, \gamma_{\text{vib}}$ . Из данных таблицы следует, что критические значения числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{cr}}$  в среднем по числу Маха  $M$  увеличиваются примерно на 12,6 % при возрастании параметров  $\alpha_1$  и  $\gamma_{\text{vib}}$  до их максимальных значений, принятых в расчетах.

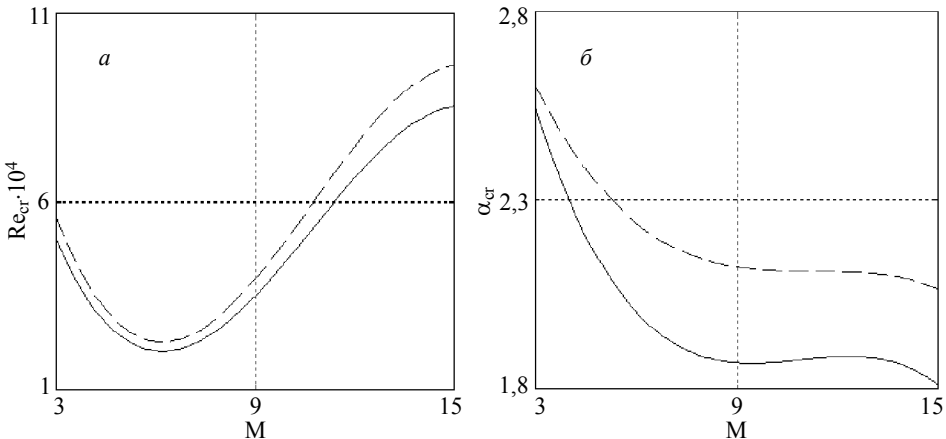


Рис. 7. Зависимости  $Re_{cr}(M)$  (а) и  $\alpha_{cr}(M)$  (б) (сплошная линия – совершенный газ, штриховая –  $\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0,4$ )

**Критические числа Рейнольдса  $Re_{cr}$  и соответствующие им значения волновых чисел  $\alpha_{cr}$**

| М  | Совершенный газ<br>( $\alpha_1 = \gamma_{vib} = 0$ ) |               | Колебательно-возбужденный газ<br>( $\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0,4$ ) |               |
|----|------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------|
|    | $Re_{cr}$                                            | $\alpha_{cr}$ | $Re_{cr}$                                                               | $\alpha_{cr}$ |
| 3  | 50060                                                | 2,5460        | 50801                                                                   | 2,5570        |
| 5  | 23830                                                | 2,1310        | 24186                                                                   | 2,1830        |
| 7  | 21640                                                | 1,9301        | 21967                                                                   | 1,9934        |
| 9  | 35083                                                | 1,8706        | 35613                                                                   | 1,9275        |
| 11 | 55753                                                | 1,8794        | 56594                                                                   | 1,9246        |
| 13 | 75244                                                | 1,8839        | 76379                                                                   | 1,9240        |
| 15 | 85150                                                | 1,8110        | 86436                                                                   | 1,8650        |

**Заключение**

Проведен анализ линейной устойчивости сжимаемого течения Куэтта термически неравновесного молекулярного газа. В результате получено, что при определенном сочетании значений параметров исследуемого течения (чисел Рейнольдса  $Re$ , Маха  $M$ , объемной вязкости  $\alpha_1$ , степени колебательной неравновесности  $\gamma_{vib}$  и времени колебательной релаксации  $\tau$ ) оно может быть как устойчиво, так и неустойчиво по отношению к малым возмущениям.

Для вязких возмущений рассчитаны спектры собственных значений, инкременты нарастания и кривые нейтральной устойчивости в плоскости  $(Re, \alpha)$  для первой и второй растущих мод в диапазоне чисел  $M = 2-6$  и  $Re = 10^4-10^7$ . Найден диапазон изменения критических чисел Рейнольдса  $Re_{cr} \approx (2-5) \cdot 10^4$ . Показано, что при всех уровнях возбуждения наиболее неустойчивой является вторая мода. Возбуждение практически не меняет форму области неустойчивости, но ее границы с ростом возбуждения смещаются в сторону больших волновых чисел. Можно констатировать, что, в общем, возбуждение внутренних степеней свободы молекул газа снижает инкременты нарастания возмущений и оказывает стабилизирующее воздействие на течение.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю.Н., Еришов И.В. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 5. С. 59–67.
2. Григорьев Ю.Н., Еришов И.В. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 4. С. 57–73.
3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 367 с.
4. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. of Fluid Mech. 1994. V. 258. P 131–165.
5. Романов В.А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // ДАН СССР. 1971. Т. 196. № 5. С. 1049–1051.
6. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. of Fluids. 1998. V. 10. No. 3. P. 709–729.
7. Ebrinç A.A. High speed-viscous plane Couette-Poiseuille flow stability. Ph.D. Thesis. Department of Mechanical Engineering. Middle East Technical University. Ankara, Turkey, 2004. 125 p.
8. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Physical Rev. E. 2008. V. 77. Issue 3. P. 036322(1)–036322(15).
9. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 195 с.
10. Григорьев Ю.Н., Еришов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 45. Вып. 4. С. 581–593.
11. Григорьев Ю.Н., Еришов И.В. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 230 с.
12. Жданов В. М., Алиевский М.Е. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. 272 с.
14. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 564 p.
15. Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000. 160 p.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
17. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. No. 2. P. 241–256.

Статья поступила 08.10.2014 г.

## Ershov I.V. STABILITY OF A SUPERSONIC COUETTE FLOW OF VIBRATIONALLY EXCITED DIATOMIC GAS

Within the linear theory, we study stability of the Couette flow of vibrationally excited diatomic gas with a parabolic profile of static temperature. The original mathematical model of the gas flow is the system of equations of two-temperature aerodynamics. As a result, it has been shown that when a certain combination of values of the parameters of the test flow (Reynolds number  $Re$ , Mach number  $M$ , bulk viscosity  $\alpha_1$ , the degree of vibrational nonequilibrium  $\gamma_{vib}$ , and vibrational relaxation time  $\tau$ ), it can be both stable and unstable with respect to small perturbations. For viscous perturbations, the spectra of eigenvalues, the growth increments, and neutral stability curves in the plane  $(Re, \alpha)$  were calculated for the first and second growing modes in the range of numbers  $M=2-6$  and  $Re=10^4-10^7$ . The range of variation of the critical Reynolds number  $Re_{cr} \approx (2-5) \cdot 10^4$  was found. It is shown that the second mode is most unstable for all lev-

els of excitation. The excitation does not actually change the shape of the region of instability, but its boundaries shift to higher wave numbers with increasing excitation. It can be stated that, in general, the excitation of internal degrees of freedom of the gas molecules reduces the disturbance growth increments and has a stabilizing effect on the flow.

Keywords: hydrodynamic stability, vibrational relaxation, equations of two-temperature aerodynamics, unstable viscous excitation modes, critical Reynolds number.

*ERSHOV Igor Valer'evich* (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i\_ershov@ngs.ru

## REFERENCES

1. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v szhimaemom techenii Kuetta. Vliyanie ob'emnoy vyazkosti. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 59–67. (in Russian)
2. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Kriticheskie chisla Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no vzbuzhdenного dvukhatomного газа. Energeticheskiy podkhod. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 57–73. (in Russian)
3. Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. *Gidrodinamicheskaya ustoychivost' i turbulentnost'*. Novosibirsk, Nauka, 1977, 367 p. (in Russian)
4. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow. *J. of Fluid Mech.*, 1994, vol. 258, pp. 131–165.
5. Romanov V.A. Ustoychivost' ploskoparallel'nogo techeniya Kuetta. *Doklady AN SSSR*, 1971, vol. 196, no. 5, pp. 1049–1051. (in Russian)
6. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow. *Phys. of Fluids*, 1998, vol. 10, no. 3, pp. 709–729.
7. Ebrinç A.A. *High speed-viscous plane Couette-Poiseuille flow stability*. Ph.D. Thesis. Department of Mechanical Engineering. Middle East Technical University. Ankara, Turkey, 2004, 125 p.
8. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow. *Physical Rev. E*, 2008, vol. 77, issue 3, pp. 036322(1)–036322(15).
9. Lin' Tszya-tszyao. *Teoriya gidrodinamicheskoy ustoychivosti*. Moskow, IL Publ., 1958, 195 p. (in Russian)
10. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Lineynaya ustoychivost' nevyazkogo sdvigovogo techeniya kolebatel'no vzbuzhdenного dvukhatomного газа. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2011, vol. 45. Vyp. 4, pp. 581–593. (in Russian)
11. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. *Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov*. Novosibirsk, SO RAN Publ., 2012, 230 p. (in Russian)
12. Zhdanov V.M., Alievskiy M.E. *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh*. Moskow, Nauka Publ., 1989, 336 p. (in Russian)
13. Nagnibeda E.A., Kustova E.V. *Kineticheskaya teoriya protsessov perenosa i relaksatsii v potokakh neravnovesnykh reagiruyushchikh gazov*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 2003, 272 p. (in Russian)
14. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1988, 564 p.
15. Trefethen L.N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000, 160 p.
16. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike*. Moskow, Nauka Publ., 1970, 720 p. (in Russian)
17. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1973, vol. 10, no. 2, pp. 241–256.

УДК 536.46

А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

### ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ПОДАЧИ ГАЗА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРЕНИЯ МЕТАНОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ЩЕЛЕВОЙ ГОРЕЛКЕ С ВНУТРЕННЕЙ ВСТАВКОЙ<sup>1</sup>

Сформулирована математическая постановка задачи горения газовой смеси в щелевой горелке с инертной внутренней вставкой, учитывающая зависимость коэффициентов диффузии, теплообмена и теплопроводности от температуры. Проведено численное исследование горения 6 %-й метано-воздушной смеси. Показано, что скорость подачи газа на входе в щелевую горелку определяет устойчивость режима горения.

**Ключевые слова:** метано-воздушная смесь, щелевая горелка, тепловое расширение, устойчивость горения газов.

Задача горения газовой смеси в микрогорелке представляет собой одно из перспективных направлений в современных исследованиях. Актуальность задачи связана с тенденцией в промышленности к миниатюризации горелочных устройств и топливных элементов. Как известно, основным требованием, предъявляемым к горелочным устройствам, является энергоэффективность и устойчивость режимов работы горелки. При горении газа в микрогорелке, в роли которой может выступать узкая трубка или канал, потери тепла через боковую поверхность горелки могут привести к неустойчивости горения и затуханию пламени.

Для сокращения тепловых потерь и поддержания горения в узкой трубке или радиальном канале в [1, 2] предложено использовать дополнительный подогрев стенок трубки или канала. В [3] предложена модель горения газов в противоточном теплообменнике. Газы, перемещаясь вдоль параллельных трубок в противоположных направлениях, обмениваются теплом через общую границу трубок, тем самым поддерживая горение. Авторами [4, 5] показано, что можно организовать и поддержать горение метано-воздушной смеси в узкой U-образной трубке прямоугольного сечения за счет зажигания смеси предварительно разогретой внутренней стенкой трубки. Реакционная смесь дополнительно подогревается за счет теплообмена газа в верхней и нижней частях трубки через тонкую внутреннюю стенку, что позволяет поддержать горение бедной смеси [4, 5]. Устойчивость горения газовой смеси определяется не только величиной тепловых потерь, но и совокупным влиянием параметров скорости потока и теплообмена [6]. В [4, 5] проведен анализ совокупного влияния процессов тепло-массопереноса в горелке и определены диапазоны значений скорости и теплообмена смеси на внешних стенках U-трубки, при которых устанавливается высокотемпературный или колебательный режим горения.

Классическая тепло-диффузионная модель горения газов предполагает постоянство плотности и скорости течения газовой смеси и не учитывает зависимость

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 2014/223 (код проекта 1943).

коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры. При описании теплообмена с внешними стенками используют допущение постоянства числа Нуссельта. Расчеты для таких допущений позволяют получить качественные закономерности процесса. Учет изменения коэффициентов переноса оказывает достаточно сильное влияние на результаты и важно для инженерных расчетов. Влияние температурной зависимости коэффициентов переноса и теплового расширения газа было показано в [7] при решении задачи зажигания и определения количества тепла, переданного от горячей стенки газу. Влияние теплового расширения газа показано в работах [5, 7, 8].

В настоящей работе, на основе физико-математической модели горения газа, [4, 5], поставлена и решена задача горения 6 %-й метано-воздушной смеси в щелевой горелке с инертной внутренней вставкой, (рис. 1). Математическая постановка задачи формулируется в размерном виде и учитывает влияние теплового расширения газа и зависимость коэффициентов диффузии, теплопроводности и теплообмена от температуры. Основной целью исследования является определение условий существования высокотемпературного режима горения.

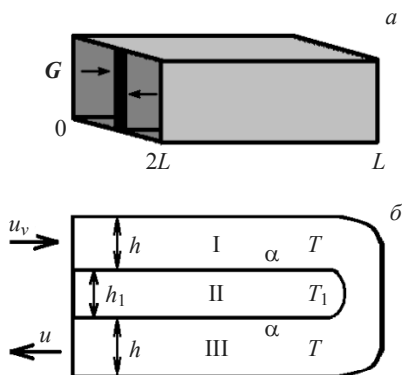


Рис. 1. Модель щелевой горелки (а);  
схема горелочного устройства (б):  
I – входная трубка, II – внутреннее  
тело, III – выходная трубка

Холодная метано-воздушная смесь со скоростью  $u_v$ , массовым содержанием метана  $a_v$  и температурой  $T_v$  подается в предварительно разогретую щелевую горелку со стороны  $x = 0$  (область I на рис. 1, б). Смесь проходит через верхнюю часть горелки и на границе  $x = L$  меняет направление движения, на границе  $x = 2L$  газ вытекает, (область III, рис. 1, б). Протекая через устройство, реакционная смесь обменивается теплом с внутренней вставкой по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена  $\alpha$ . Предполагается, что теплоотдача в окружающую среду через внешнюю боковую поверхность отсутствует.

При постановке задачи приняты следующие допущения: расход реакционной смеси через входное сечение щелевой горелки постоянен,  $G = \rho u = \text{const}$ ; экзотермические химические реакции определяются законом Аррениуса с первым порядком реакции; учитывается распределение температуры смеси и выгорания горю-

чей компоненты только вдоль направления движения смеси; температура в поперечном направлении внутренней вставки считается однородной; давление в горелке постоянно. С учетом сделанных допущений математическая постановка задачи имеет следующий вид:

уравнение энергии для реакционной смеси:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} + c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{h} (T_{1,s} - T) + \rho Q a k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT} \right),$$

$$0 \leq x \leq 2L, \quad T_{1,s}(x, t) = \begin{cases} T_1(x, t), & x < L, \\ T_1(2L - x, t), & x \geq L; \end{cases} \quad (1)$$

уравнение энергии для вставки:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{h_1} (T_1 - T(x, t)) - \frac{\alpha}{h_1} (T_1 - T(2L - x, t)), \quad 0 \leq x \leq L; \quad (2)$$

уравнение баланса массы горючей компоненты в смеси:

$$\rho \frac{\partial a}{\partial t} + \rho u \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \rho \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \rho a k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT} \right), \quad 0 \leq x \leq 2L; \quad (3)$$

уравнение состояния идеального газа:

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT = \text{const}; \quad (4)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия:

$$T(0, t) = T_v, \quad a(0, t) = a_v, \quad \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \rho(0, t) = \frac{p \mu}{RT(0, t)}, \quad u(0, t) = u_v, \quad (6)$$

$$\frac{\partial a(2L, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(2L, t)}{\partial x} = \frac{\partial T_1(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Начальные условия:

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_v, & x \leq \xi, \\ T_v + T_w \frac{x - \xi}{L - \xi}, & \xi < x \leq L, \\ T_v + T_w \frac{2L - x}{L}, & L < x \leq 2L, \end{cases} \quad a(x, 0) = \begin{cases} a_v, & x \leq \xi, \\ a_v \frac{L - x}{L - \xi}, & \xi < x \leq L, \\ 0, & L < x \leq 2L, \end{cases} \quad (8)$$

$$T_1(x, 0) = T_{1v} + T_{1w} \frac{x - \xi}{L - \xi}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \rho(x, 0) = \frac{p \mu}{RT(x, 0)}, \quad U(x, 0) = U_v.$$

Принятые обозначения:  $t$  – время;  $x$  – координата в продольном направлении;  $T$  – температура;  $a$  – массовая концентрация метана в смеси;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $c$  – удельная теплоемкость;  $u$  – скорость течения смеси;  $D$  – коэффициент диффузии;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $E$  – энергия активации;  $Q$  – тепловой

эффект реакции;  $h$  – высота проходного сечения щелевой горелки;  $h_1$  – толщина внутренней вставки;  $\mu$  – молярная масса газа;  $\xi$  – граница предварительно разогретой области вставки;  $L$  – длина вставки;  $T_w$ ,  $T_{1w}$  – максимальные температуры начального разогрева смеси и внутренней вставки соответственно. Индексами 1,  $v$  отмечены параметры внутренней вставки и параметры на входе в горелку.

Начальные условия, определяемые уравнениями (8), соответствуют тому, что до начала процесса горелка заполнена разогретым газом, плотность которого определяется по температуре газа.

Переменная  $a$  определяет значение массовой концентрации метана в смеси. Зависимость коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры определяются следующими выражениями [7]:

$$\lambda = \lambda_v \left( \frac{T}{T_v} \right)^s, \quad D_p = D_v \rho_v \left( \frac{T}{T_v} \right)^s.$$

Коэффициент теплообмена в уравнениях (1), (2) определяется из выражения  $\alpha = \frac{\lambda Nu}{h}$ , где  $Nu$  – число Нуссельта. Число Нуссельта определяется согласно [9] для случая течения смеси в узкой щели, образованной двумя параллельными пластинами:

$$Nu = \begin{cases} 0,979 \left( \frac{h Re Pr}{x} \right)^{0,33}, & \frac{h Re Pr}{x} > 1000, \\ 3,78 + (Nu_* - 3,78) \frac{h Re Pr/x - 100}{900}, & 100 \leq \frac{h Re Pr}{x} \leq 1000, \\ 3,78, & \frac{h Re Pr}{x} < 100. \end{cases} \quad (9)$$

В (9)  $Re$  – число Рейнольдса,  $Re = \frac{\rho u h}{\eta}$ ;  $Pr$  – число Прандтля;  $Pr = \frac{c \eta}{\lambda}$ ;  $s$  –

степень в зависимости коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости воздуха,  $Nu_*$  – значение числа

Нуссельта, соответствующее значению  $\frac{h Re Pr}{x} = 1000$ . Локальные значения чис-

ла Нуссельта определяются выражениями (9), которые учитывают влияние установления скорости потока во входной части горелки на коэффициент теплообмена между газом и стенкой [9].

Задача (1) – (8) решалась численно по неявной разностной схеме на четырехточечном шаблоне [10]. Уравнение (5) аппроксимировалось по неявной разностной схеме с конечными разностями против потока. Уравнения (1) – (3) рассчитывались методом прогонки. Из уравнения (4) определялось значение плотности смеси на новом  $(n+1)$ -м временном слое. Из уравнения (5), аналогично [8], бегущим счетом из известных значений плотности смеси на текущем  $n$ -м и новом  $(n+1)$ -м временных слоях рассчитывалось значение скорости на  $(n+1)$ -м слое. Задача рассчитывалась до установления. Контроль за установлением проводился через контроль баланса энергии и баланса массы.

Для расчета были выбраны следующие значения параметров:

$$Q = 55,7 \text{ МДж/кг}, E = 239 \text{ кДж/моль} [6], k_0 = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)},$$

$$c = 1065 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_v = 0,025 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho_v = 1,179 \text{ кг/м}^3, s = 2/3,$$

$$D_v = 1,992 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, p = 0,10132 \text{ МПа}, \eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\xi = 10^{-2} \text{ м}, T_v = 300 \text{ К}, T_{1v} = 1000 \text{ К}, T_w = 1700 \text{ К}, T_{w1} = 1400 \text{ К}.$$

Массовое содержание метана на входе в горелку равнялось  $a_v = 0,035$ . Это значение соответствует объемному содержанию метана  $a_{\text{vol}} = 6\%$ . Характеристики щелевой горелки: размер щели  $h = 6$  мм, толщина вставки  $h_1 = 0,2$  мм, общая протяженность канала  $2L = 100$  мм. Теплофизические параметры материала стенок горелки были взяты равными  $c_1 = 687 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_1 = 30 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \rho_1 = 7500 \text{ кг/м}^3$  (термоустойчивая сталь).

Расчеты показали, что для заданных теплофизических и формально-кинетических параметров скорость распространения пламени 6 %-й метано-воздушной смеси при отсутствии тепловых потерь совпадает со скоростью, определенной экспериментально [11],  $u_n = 0,065 \text{ м/с}$  и дает удовлетворительное согласие со скоростью, рассчитанной по формуле Зельдовича – Франк-Каменецкого [6],  $u_n = 0,0676 \text{ м/с}$ .

Согласно результатам расчетов, высокотемпературный режим горения возможен для диапазона значений скорости подачи газа  $0,005 \leq u_v \leq 0,33 \text{ м/с}$ . Ниже указанного диапазона реализуется неэффективный режим горения с неполным выгоранием горючей компоненты. При значениях скорости подачи, превышающих  $0,33 \text{ м/с}$ , фронт горения выносится за пределы щелевой горелки.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 2 – 4. На рис. 2 представлено положение координаты фронта горения,  $x_f$ , во времени. За координату фронта горения выбиралась пространственная координата  $x$ , в которой содержание метана

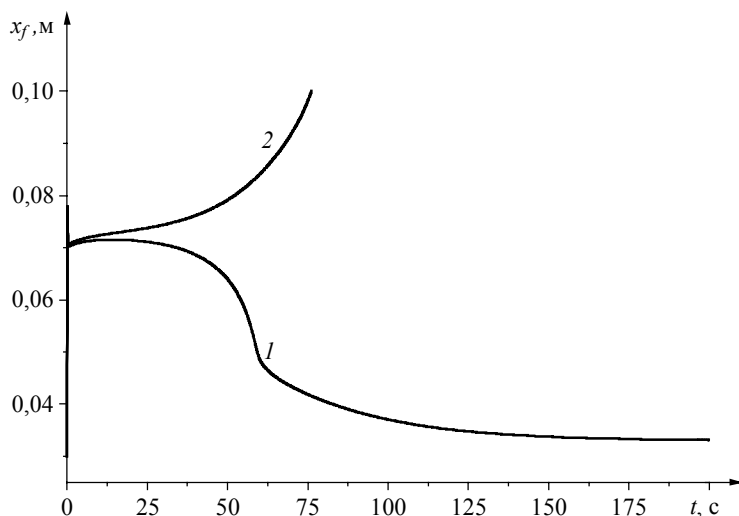


Рис. 2. Зависимость координаты положения фронта пламени от времени:  
кр. 1 –  $u_v = 0,33 \text{ м/с}$ ; кр. 2 –  $u_v = 0,331 \text{ м/с}$

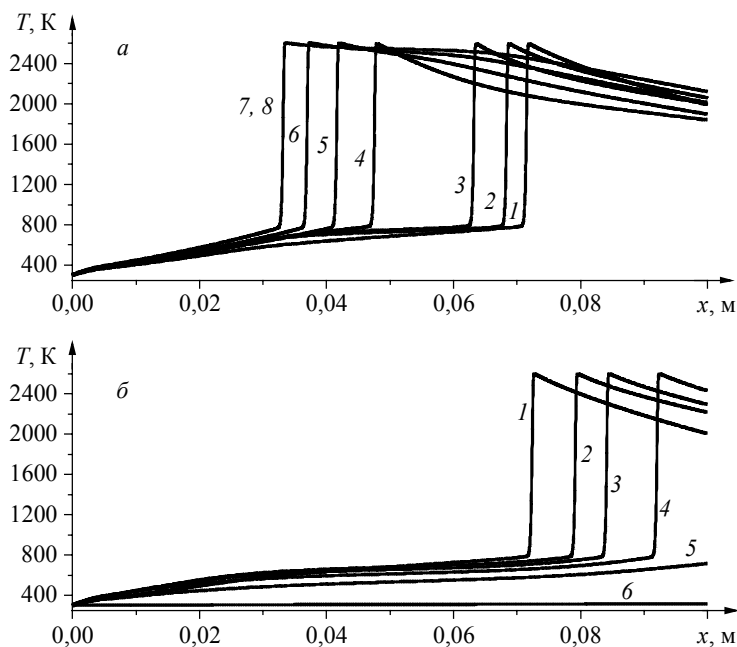


Рис. 3. Распределения температуры смеси в различные моменты времени:  $a - u_v = 0,33 m/s$ ; кр. 1 -  $t = 10$  с, кр. 2 -  $t = 40$  с, кр. 3 -  $t = 50$  с, кр. 4 -  $t = 60$  с, кр. 5 -  $t = 75$  с, кр. 6 -  $t = 100$  с, кр. 7 -  $t = 200$  с, 8 -  $t = 250$  с;  $b - 0,331 m/s$ , кр. 1 -  $t = 10$  с, кр. 2 -  $t = 50$  с, кр. 3 -  $t = 60$  с, кр. 4 -  $t = 70$  с, кр. 5 -  $t = 80$  с, кр. 6 -  $t = 200$  с

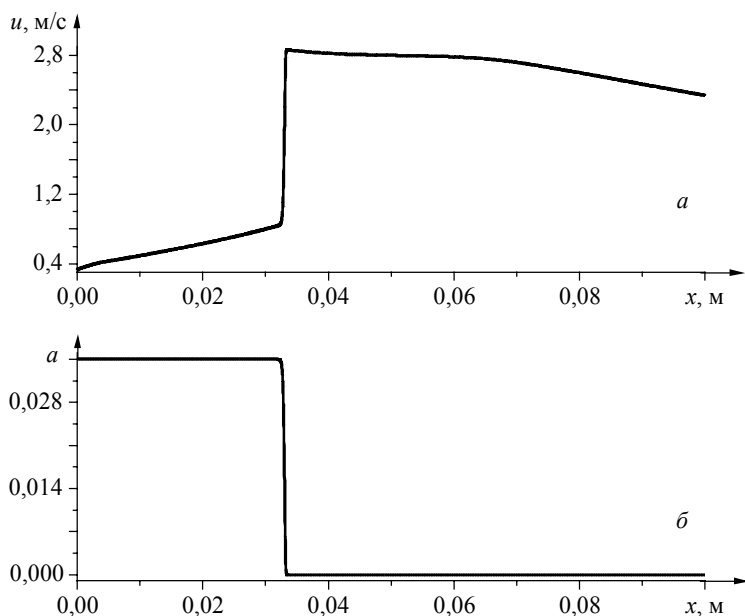


Рис. 4. Установившиеся распределения скорости течения смеси (а), концентрации метана (б),  $u_v = 0,33 m/s$

равнялось половине от входного значения  $u_v$ . Кривая 1, рис. 2, рассчитана для  $u_v = 0,33$  м/с и соответствует устойчивому высокотемпературному режиму горения. Повышение скорости подачи на входе до  $u_v = 0,331$  м/с приводит к выносу фронта горения за пределы щелевой горелки и затуханию пламени (кривая 2, рис. 2).

На рис. 3 представлены распределения температуры смеси в фиксированные моменты времени для случаев установления высокотемпературного режима горения (рис. 3, а) и срыва горения (рис. 3, б). Рис. 3, а соответствует кривой 1 рис. 2. Рис. 3, б соответствует кривой 2 рис. 2. Установившиеся распределения скорости реакционной смеси и концентрации горючей компоненты, соответствующие кривой 1 рис. 2 и рис. 3, а, представлены на рис. 4.

Из анализа результатов расчета следует, что малое изменение скорости подачи смеси на входе в горелку от 0,33 м/с до 0,331 м/с приводит к срыву устойчивого горения. Для скорости подачи  $u_v = 0,33$  м/с после зажигания фронт горения «выскакивает» в нижнюю часть щелевой горелки, затем медленно перемещается в направлении поворота, переходит в верхнюю часть трубки и устанавливается на глубине 0,033 м. Продвижение волны горения вдоль оси горелки в случае  $u_v = 0,33$  м/с показано на рис. 3, а. При повышении скорости подачи до 0,331 м/с фронт горения после зажигания продвигается в сторону выхода из горелки, до полного вытеснения пламени. Продвижение волны горения для  $u_v = 0,331$  м/с показано на рис. 3, б.

### Выводы

Проведено численное исследование задачи горения 6 %-й метано-воздушной смеси в щелевой горелке с инертной вставкой при учете зависимости коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры. Определен диапазон значений скорости подачи газа, при котором в горелке устанавливается высокотемпературный режим горения. Показан переход от высокотемпературного режима к срыву пламени при малом изменении скорости подачи газа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Марута К., Минаев С.С., Парк Дж.К., Ох К.С., Фуджимори Т., Фурсенко Р.В. Особенности горения газа в узком нагретом канале // Физика горения и взрыва. 2004. № 5 (40). С. 21–29.
2. Минаев С.С., Серещенко Е.Р., Фурсенко Р.В., Фан А., Марута К. Разделяющиеся пламена в узком канале с градиентом температуры в стенках // Физика горения и взрыва. 2009. № 2 (45). С. 12–19.
3. Фурсенко Р.В., Минаев С.С. Устойчивость пламени в системе с противоточным теплообменом // Физика горения и взрыва. 2005. № 2 (41). С. 17–25.
4. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Режимы горения бедной метано-воздушной смеси в U-образной горелке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 69–76.
5. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Колебательные режимы горения бедной метано-воздушной смеси в U-образной горелке // XXXI Сибирский теплофизический семинар, посвященный 100-летию со дня рождения академика С.С. Кутателадзе: доклады. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2014. С. 207–210.
6. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
7. Шкадинский К.Г., Барзыкин В.В. Закономерности зажигания газов накаленной поверхностью с учетом диффузии и гидродинамики // Физика горения и взрыва. 1968. № 2 (4). С. 176–181.

8. Дементьев А.А., Крайнов А.Ю. К вопросу о распространении ламинарного пламени в газе с инертной пылью // Физика горения и взрыва. 2011. № 4 (47). С. 70–75.
9. Справочник по теплообменникам: в 2 т. Т. 1: пер. с англ. / под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. М.: Энергоатомиздат, 1987.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
11. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах: пер. с англ. под ред. К.И. Щелкина, А.А. Борисова. М.: Мир, 1968.

Статья поступила 20.01.2015 г.

# *Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. THE INFLUENCE OF GAS FLOW RATE ON THE METHANE-AIR MIXTURE BURNING IN A FLAT BURNER WITH AN INERT BODY*

A mathematical model of the methane-air mixture combustion in a flat burner with an inert body is presented. Gases in the top and lower parts of the flat burner exchange heat through the inert body. The inert body serves as a regulator of the combustion. The mathematical model takes into account gas thermal expansion and the dependence of diffusion, heat conductivity, and heat exchange coefficients on temperature. The numerical solution was carried out in dimension variables and parameters.

It is shown that the combustion front is established in the top part of the flat burner. The range of the 6% methane-air flow velocity for which the steady combustion mode is implemented is determined. The dynamics of establishing the stationary combustion mode and flame failure is presented. It is shown that the inert body provides a heat recovery, warming up of the mixtures in the entrance part of the burner, and the mixture ignition.

Keywords: methane-air mixture, flat burner, heat expansion, steady gas mixture combustion.

*KRAINOV Alexey Yurievich* (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

*MOISEEVA Ksenia Mihailovna* (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: Moiseeva\_KM@t-sk.ru

## REFERENCES

1. Maruta K., Parc J.K., Oh K.C., Fujimori T., Minaev S.S., Fursenko R.V. Characteristics of microscale combustion in a narrow heated channel. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2004, no. 40, pp. 516–523.
2. Minaev S.S., Sereshchenko E.V., Fursenko R.V., Fan A., Maruta K. Splitting flames in a narrow channel with a temperature gradient in the walls. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2009, no. 2 (45), pp. 119–125.
3. Fursenko R.V., Minaev S.S. Flame stability in a system with counterflow heat exchange. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2005, no. 2 (41), pp. 133–139.
4. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. Rezhimy gorenija bednoy metano-vozdushnoy smesi v U-obraznoy gorelke. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 2(28), pp. 69–76. (in Russian)
5. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. Kolebatel'nye rezhimy gorenija bednoy metano-vozdushnoy smesi v U-obraznoy gorelke. *XXXI Sibirskiy teplofizicheskij seminar, posvyashchennyy 100-letiyu so dnya rozhdeniya akademika S.S. Kutateladze: doklady*. Novosibirsk: Institut teplofiziki SO RAN Publ., 2014, pp. 207–210. (in Russian)
6. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya gorenija i vzryva*. Moscow, Nauka Publ., 1980. (in Russian)
7. Shkadinskii K.G., Barzykin V.V. Hot-surface ignition of gases with allowance for diffusion and hydrodynamics. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1968, no. 2 (4), pp. 100–104.
8. Dement'ev A., Krainov A.Yu. On the problem of laminar flame propagation in a gas with an inert dust. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, no. 4 (47), pp. 436–441.

- 
9. Petukhov B.S., Shikov V.K. (eds.). *Spravochnik po teploobmennikam*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987, vol. 1. 561 p. (in Russian)
  10. Samarskiy A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem*. Moscow, Nauka Publ., 1971. (in Russian)
  11. L'yuis B., El'be G. *Gorenie, plamya i vzryvy v gazakh*. Moscow, Mir Publ., 1968. (in Russian)

УДК 533, 629.7

С.А. Орлов, С.В. Пейгин, К.А. Степанов, С.В. Тимченко

**ЭФФЕКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ  
ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ КРЫЛЬЕВ<sup>1</sup>**

Предлагается новый подход к эффективной реализации нелинейных ограничений для решения задачи оптимизации при помощи генетических алгоритмов. Особенность подхода состоит в изменении традиционной стратегии, в которой маршрут поиска может проходить только через допустимые (удовлетворяющие ограничениям) точки, посредством допущения маршрутов, проходящих как через допустимые, так и через недопустимые точки. Основная идея этого подхода состоит в том, что информация из «запретных» (то есть не удовлетворяющих ограничениям) областей может оказаться очень важной, и путь к оптимальной точке, пролегающий через эти области, может оказаться существенно короче. Метод был применен к задаче многокритериальной оптимизации аэродинамических форм в зависимости от различных геометрических и аэродинамических ограничений. Результаты показали, что метод сохраняет высокую надежность традиционного генетического алгоритма при сохранении вычислительных затрат (при расчете целевой функции на основе полных уравнений Навье – Стокса) на приемлемом уровне.

В последние годы при решении задач функциональной оптимизации стали широко применяться адаптивные методы поиска, среди которых особую популярность завоевали эволюционные, в том числе генетические алгоритмы. Они основаны на генетических процессах биологических организмов: биологические популяции развиваются в течение нескольких поколений, подчиняясь законам естественного отбора и принципу «выживает сильнейший» (точнее, наиболее приспособленный). Предложенные в конце 60-х годов и получившие теоретическое обоснование в 1975 г. [1] генетические алгоритмы (в силу своей универсальности и высокой эффективности) в дальнейшем получили чрезвычайно широкое распространение для решения задач поиска и оптимизации в самых разнообразных областях науки и техники.

Можно сказать, что генетические алгоритмы – это вдохновленные эволюцией вычислительные модели, которые представляют собой семейство алгоритмов поиска, основанных на механизмах природной селекции и генетики – и имеющих дело с набором (популяцией) возможных решений задачи (испытаний), которые подвергаются циклическому воздействию трех основных «генетических» операторов – селекции, скрещивания и мутации. Существенная особенность этих алгоритмов заключается в кодировании потенциального решения некоторой проблемы в виде простой хромосомо-подобной структуры данных. К набору таких хромосом собственно и применяют операторы рекомбинации с тем, чтобы сохранить критическую информацию.

Работа генетического алгоритма начинается с генерирования некоторой (как правило, случайной) популяции хромосом, каждой из которых соответствует точка в пространстве поиска. Затем происходит оценка этих структур (расчет целевой

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке ФЦП «Кадры», соглашение № 14.B37.21.0733.

функции для каждой хромосомы) и распределение между ними репродуктивных возможностей таким образом, чтобы хромосомы, представляющие лучшее решение исходной проблемы, получили больше шансов для «воспроизводства», чем хромосомы, соответствующие худшим решениям. Качество решения обычно определяется по отношению к текущей популяции.

Будучи вероятностными, генетические алгоритмы тем не менее не являются просто еще одним вариантом случайного поиска, поскольку при отборе новых точек с ожидаемыми более хорошими характеристиками они эффективно используют предыдущую информацию.

Важной особенностью генетических алгоритмов является то, что они обеспечивают сходимость к глобальному оптимуму (что очень важно для задач, у которых целевая функция имеет несколько локальных экстремумов). В отличие от классических градиентных методов оптимизации при реализации генетических алгоритмов не требуется ставить ограничения на гладкость целевой функции. Более того, они позволяют находить оптимум даже в случае разрывной целевой функции.

Математически задача заключается в оптимизации формы аэродинамических тел по полному аэродинамическому сопротивлению. Сформулируем собственно проблему оптимизации. Начнём с одноточечной задачи. Её цель – найти аэродинамическую форму, которая минимизирует коэффициент полного сопротивления  $C_D$  с учетом следующих аэродинамических и геометрических ограничений:

- Аэродинамические ограничения: заданный постоянный коэффициент подъёмной силы  $C_L$  и максимально допустимый момент тангажа  $C_M$ .

- Геометрические ограничения на следующие величины, задаваемые для каждой оптимизируемой секции крыла:

- относительная толщина секции крыла  $(t/c)_i$ ;
- радиус кривизны передней кромки секции крыла  $(R_L)_i$ ;
- угол задней кромки секции крыла  $(q_T)_i$ ;
- локальные толщины секции крыла  $(y/t)_{ij}$ .

В этих ограничениях  $i = 1, \dots, N_{ws}$  – число секций по размаху крыла, а  $j = 1, \dots, N_{bs}(i)$  – число ограничений на локальную толщину в секции номер  $i$ . Общее число ограничений  $N_{cs}$  на крыло – 20–30.

Цель многоточечной оптимизации – минимизировать взвешенную комбинацию коэффициентов сопротивления в нескольких точках дизайна. При этом геометрические ограничения не зависят от точки дизайна, а аэродинамические ограничения задаются для каждой точки дизайна по отдельности.

Решение задачи для реальных конфигураций является сложным в силу ниже следующих причин:

- точный расчет сопротивления очень сложен для реальных конфигураций;
- нет общего решения проблемы глобального геометрического представления аэродинамических поверхностей;
- оптимальный поиск происходит в пространстве высокой размерности;
- необходим эффективный учет большого числа нелинейных ограничений;
- решение задачи требует огромнейшего объема вычислений.

В задаче оптимизации аэродинамических форм учет ограничений на решение исключительно важен. Причина этого в том, что (как и во многих реальных задачах) оптимальное решение не является локальным минимумом. Напротив, оптимум находится на пересечении гиперповерхностей различной размерности, и положение этих поверхностей заранее не известно.

Применяемый в данной работе принципиально новый подход к учёту нелинейных ограничений можно очертить следующим образом:

- Изменение традиционной стратегии, в которой маршрут поиска может проходить только через допустимые (удовлетворяющие ограничениям) точки, посредством допущения маршрутов, проходящих как через допустимые, так и через недопустимые точки. Основная идея этого подхода состоит в том, что информация из «запретных» (то есть не удовлетворяющих ограничениям) областей может оказаться очень важной, и путь к оптимальной точке, пролегающий через эти области, может оказаться существенно короче.

- С этой целью мы строим расширение целевой функции, производя её оценку также и в недопустимых точках. Это оказалось возможным в силу одного из базовых свойств генетического алгоритма: в противоположность классическим методам оптимизации, генетические алгоритмы допускают негладкие расширения целевых функций.

Поэтому в качестве целевой функции в работе используется следующий функционал:

$$Q = \begin{cases} 0,1 + [(t/c)^* - (t/c)], & \text{если } (t/c)^* > (t/c); \\ 0,2 + [R_L^* - R_L], & \text{если } R_L^* > R_L; \\ 0,3 + [\theta_T^* - \theta_T], & \text{если } \theta_T^* > \theta_T; \\ 0,5, & \text{если } y^u(t) < y^l(t); \\ C_D, & \end{cases}$$

где  $y^u(t)$ ,  $y^l(t)$  – соответственно контуры верхней и нижней поверхностей крыла, задаваемые при помощи линий Безье, опорные точки которых собственно и необходимо найти в процессе оптимизации.

## 1. Метод решения

Уравнения Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости могут быть записаны в следующей форме:

$$\mathbf{q}_t + \operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1)$$

где тензор  $\mathbf{C} = (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$  содержит конвективные члены, тензор  $\mathbf{V} = (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  содержит вязкие члены,  $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$ ,  $\rho$  – плотность,  $(u, v, w)$  – вектор скорости,  $E$  – энергия,  $t$  – время,  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  – невязкие (конвективные) потоки и  $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$  – вязкие потоки.

Компоненты невязких потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= u\mathbf{q} + p(0, 1, 0, 0, u)^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= v\mathbf{q} + p(0, 0, 1, 0, v)^T, \\ \mathbf{h}(\mathbf{q}) &= w\mathbf{q} + p(0, 0, 0, 1, w)^T. \end{aligned}$$

Компоненты вязких потоков имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \sigma_1)^T \\ \mathbf{s}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32}, \sigma_2)^T \\ \mathbf{t}(\mathbf{q}) &= \mu(0, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}, \sigma_3)^T, \end{aligned}$$

где составляющие тензора вязких напряжений задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (4/3)u_x - (2/3)v_y - (2/3)w_z, \\ \tau_{21} &= \tau_{12} = u_y + v_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{31} &= \tau_{13} = u_z + w_x, \\
\tau_{22} &= (4/3)v_y - (2/3)u_x - (2/3)w_z, \\
\tau_{32} &= \tau_{23} = u_z + w_y, \\
\tau_{33} &= (4/3)w_z - (2/3)u_x - (2/3)v_y, \\
\sigma_1 &= u \tau_{11} + v \tau_{12} + w \tau_{13} + (c^2)_x / ((\gamma - 1)Pr), \\
\sigma_2 &= u \tau_{21} + v \tau_{22} + w \tau_{23} + (c^2)_y / ((\gamma - 1)Pr), \\
\sigma_3 &= u \tau_{31} + v \tau_{32} + w \tau_{33} + (c^2)_z / ((\gamma - 1)Pr).
\end{aligned}$$

В этих формулах  $\mu$  – значение вязкости,  $\gamma$  – отношение теплоёмкостей газа,  $Pr$  – число Прандтля,

$$\begin{aligned}
p &= (\gamma - 1)[E - 0,5\rho(u^2 + v^2 + w^2)], \\
c^2 &= \gamma p / \rho, \\
H &= (E + p) / \rho.
\end{aligned}$$

## 2.1. Численный метод

При дискретизации сжимаемых уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа используется метод конечных объёмов с явной схемой аппроксимации потоков.

Рассмотрим структурированную расчётную сетку, состоящую из ячеек, которые образуют структуру типа  $(i, j, k)$ . Интегрируя по каждой ячейке, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой применяется процедура интегрирования по времени.

Запишем аппроксимацию для ячейки с индексами  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned}
(\Omega_{i,j,k} q_{i,j,k})_t &+ [C \cdot (Sn)]_{i+0,5,j,k} - [C \cdot (Sn)]_{i-0,5,j,k} + \\
&+ [C \cdot (Sn)]_{i,j,k+0,5} - [C \cdot (Sn)]_{i,j,k-0,5} + \\
&+ [C \cdot (Sn)]_{i,j,k+0,5} - [C \cdot (Sn)]_{i,j,k-0,5} = \\
&= [V \cdot (Sn)]_{i+0,5,j,k} - [V \cdot (Sn)]_{i-0,5,j,k} \\
&+ [V \cdot (Sn)]_{i,j,k+0,5} - [V \cdot (Sn)]_{i,j,k-0,5} + \\
&+ [V \cdot (Sn)]_{i,j,k+0,5} - [V \cdot (Sn)]_{i,j,k-0,5},
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\Omega_{i,j,k}$  – объём ячейки,  $q_{i,j,k}$  – среднее значение по ячейке и  $S$  – площадь грани ячейки. Дробные индексы указывают, с какой стороны ячейки берётся поток в квадратных скобках.

Разумеется, соотношение (2) является всего лишь формальной аппроксимационной схемой, для реализации которой следует построить интерполяционные формулы, по которым потоки в квадратных скобках интерполируются по значениям потоков в близлежащих центрах ячеек.

В пространственной аппроксимации потоков конвективные потоки на гранях ячеек интерполируются по данным в центрах ячеек посредством двух интерполяционных операторов: характеристического оператора первого порядка и ENO (Essentially non-Oscillatory – Существенно не-Осцилляционный) оператора высокого порядка. Шаблон характеристической схемы первого порядка, фактически применяемой при релаксации, состоит из одной точки, выбранной по знаку соответствующего собственного числа.

Метод ENO (предложенный А. Хартемом и С. Ошером и затем упрощённый С.-В. Шу и С. Ошером, [4, 5] применяется посредством выбора интерполяционного шаблона по локальным характеристикам и гладкости потоков и может изме-

няться по ходу итераций. При этом применяется характеристическая декомпозиция, и интерполяция производится в соответствующих характеристических полях. Интерполяционный шаблон ENO (типично состоящий из трёх точек в нашей имплементации) определяется отдельно в каждом характеристическом поле, сначала по знаку соответствующего собственного числа и затем в соответствии с гладкостью интерполируемых потоков. Чтобы вернуться к декартовым потокам после интерполяции, значения интерполированных характеристических потоков проектируются обратно.

Мы также используем метод поправки на дефект, в котором целевая дискретизация уравнений на самой тонкой сетке отличается от дискретизации, применяемой при многосеточной релаксации. Для релаксации используется аппроксимационный оператор первого порядка точности, а поправка на дефект вычисляется посредством аппроксимации ENO высокого порядка.

Таким образом, мы применяем схему ENO только при вычислении поправки на дефект, а большая часть работы осуществляется посредством относительно дешёвой в вычислительном отношении характеристической схемы первого порядка. Вязкие члены аппроксимируются напрямую. Для интегрирования по времени используется схема Рунге-Кутты третьего порядка, сохраняющая полную вариацию (TVD), разработанная С.-В. Шу и С. Ошером (см. [5]). Более подробное описание численного метода дано в [6] и [7].

2. Результаты расчетов

В этом разделе приводим результаты одноточечной и многоточечной оптимизации крыла самолета Dornier-728 [8]. Главная точка оптимизации была выбрана при  $C_L = 0,5$  и  $M = 0,78$ . Дополнительные точки оптимизации были выбраны при  $M = 0,8$  ( $C_L = 0,5$ ) и при  $M = 0,2$  ( $C_L = 1,19$ ). Геометрические ограничения были наложены на толщину крыла, радиус кривизны передней кромки секции крыла и угол задней кромки секции крыла. Дополнительное (аэродинамическое) ограничение накладывалось на момент тангажа.

Оптимизационные условия и ограничения приведены в таблице. В общей сложности были выполнены три оптимизации: две одноточечные оптимизации и одна трехточечная. Число секций крыла было равно трем – корневая, средняя и концевая секции. Одноточечные оптимизации отличаются величиной  $C_M^*$ . В первой из оптимизаций момент подъемной силы был свободным, в то время как вторая оптимизация (а также многоточечная) сохраняли момент подъемной силы на уровне оригинального крыла. В дальнейшем эти три варианта будут обозначаться соответственно CaseD728\_1, CaseD728\_2 и CaseD728\_3.

Крыло Dornie-728, ограничения и условия оптимизации

| $C_L^*$    | M    | $w_i$ | $C_M^*$ | $(t/c)_1$ | $(t/c)_2$ | $(t/c)_3$ |
|------------|------|-------|---------|-----------|-----------|-----------|
| CaseD728_1 |      |       |         |           |           |           |
| 0,500      | 0,78 | 1,0   | -0,130  | 0,142     | 0,119     | 0,104     |
| CaseD728_2 |      |       |         |           |           |           |
| 0,500      | 0,78 | 1,0   | -0,072  | 0,142     | 0,119     | 0,104     |
| CaseD728_3 |      |       |         |           |           |           |
| 0,500      | 0,78 | 0,75  | -0,072  | 0,142     | 0,119     | 0,104     |
| 0,500      | 0,80 | 0,23  | -0,082  | 0,142     | 0,119     | 0,104     |
| 1,190      | 0,20 | 0,02  | -0,012  | 0,142     | 0,119     | 0,104     |

Главная точка дизайна лежит в высоком трансзвуковом диапазоне, где в потоке около оригинального крыла развивается сильный скачок. Одноточечная оптимизация (CaseD728\_1) устраняет этот скачок. Соответствующие продольные распределения давления приведены на рис. 1 и 2, соответственно.

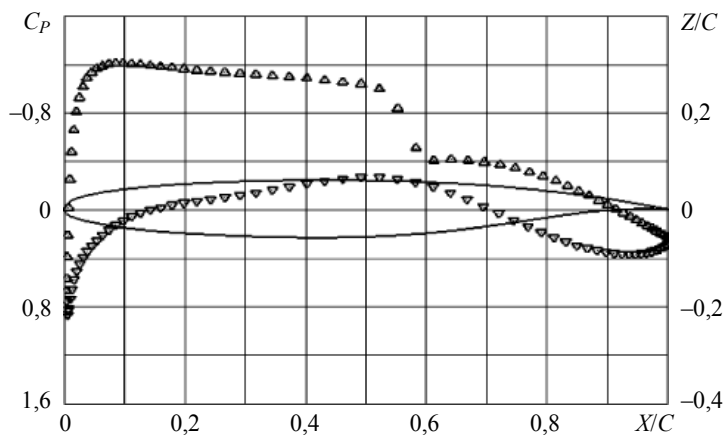


Рис. 1. Оригинальное крыло Dornier-728,  $M = 0,78$ ;  $C_L = 0,5$ .  
Распределение давления по верхней и нижней поверхностям крыла

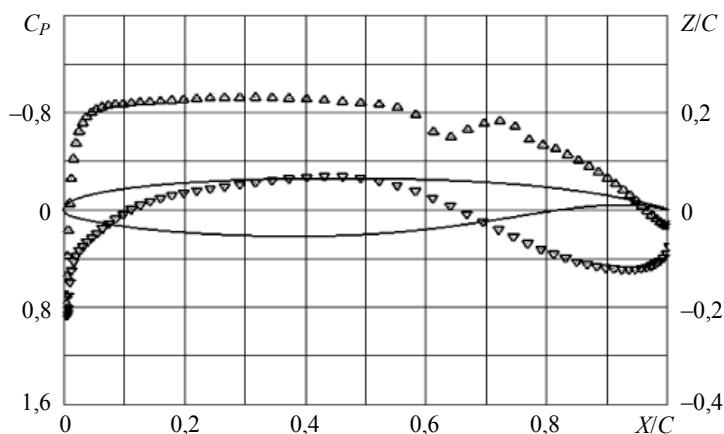


Рис. 2. Оптимизированное крыло Dornier-728 (CaseD728\_1),  $M = 0,78$ ;  $C_L = 0,5$ .  
Распределение давления по верхней и нижней поверхностям крыла

В условиях такого проектирования, было достигнуто снижение на 32,6 каунта (от начальных 213,7 каунта). Минимально возможное значение сопротивления при этом значении коэффициента подъемной силы составляет около 180 каунтов, что практически идентично сопротивлению оптимизированного крыла.

В этом оптимизационном случае достигалось значение момента тангажа, достаточно далекое от исходного крыла. Интересно оценить влияние этого ограничения на результаты оптимизации. Более строгое ограничение на момента тангажа ( $C_M^* = -0,07$ ), использованное в варианте CaseD728\_2, выливалось в снижение

уменьшения сопротивления: в этом случае полное сопротивление оптимизированного крыла равно 189,7 каунтов по сравнению с 181,1 каунтами в случае CaseD728\_1.

Характеристики нештатной оптимальной формы CaseD728\_1 вполне удовлетворительны с точки зрения подъемной силы и сопротивления, но она имеет слишком высокое значение отрицательного момента тангажа. С другой стороны, профиль CaseD728\_2 имеет подходящее значение момента тангажа в связи с введением соответствующих ограничений, но его взлетные характеристики ухудшились по сравнению с оригинальным крылом. Для обеспечения как хорошего качества проектирования, так и хороших характеристик крыла вне главной точки проектирования проведена многоточечная оптимизация (CaseD728\_3).

Результаты проведенной оптимизации обладают следующими характеристиками: в главной точке оптимизации ( $C_L = 0,5$  и  $M = 0,78$ ) общее сопротивление оптимизированного крыла составило 192,8 каунтов (значение, близкое к CaseD728\_2). Соответствующее поперечное распределение давления в средней секции крыла показано на рис. 3.

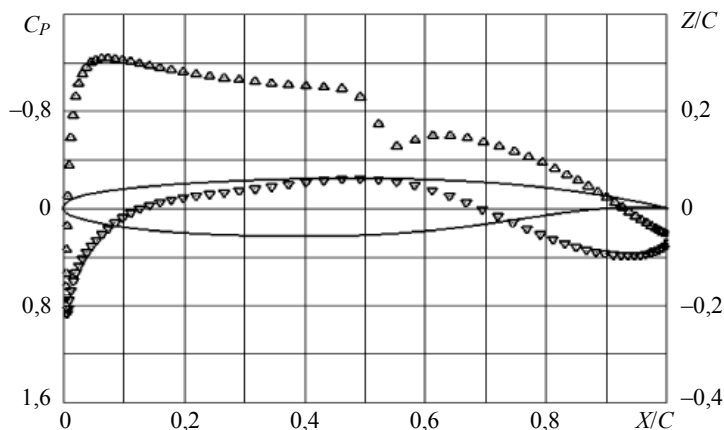


Рис. 3. Оптимизированное крыло Dornier-728 (CaseD728\_3),  $M = 0,78$ ;  $C_L = 0,5$ .  
Распределение давления по верхней и нижней поверхностям крыла

Для вторичной точки оптимизации при большом значении числа Маха сопротивление составляет 212,6 каунта (по сравнению с 244,1 каунта у начального крыла и 216,7 каунта у формы CaseD728\_2). При этом интенсивность первоначального скачка уменьшается за счет многоточечной оптимизации.

В целом характеристики оптимизированных крыльев в сравнении с исходным представлены на рис. 4 – 6. Поляры (подъемная сила)/(сила сопротивления) при  $M = 0,78$  (рис. 4) и при  $M = 0,80$  (рис. 5) показывают, что оптимизация позволила улучшить аэродинамические характеристики при высоких коэффициентах подъемной силы ( $C_L > 0,4$ ) без снижения производительности при более низких  $C_L$ .

Что касается зависимости роста коэффициента сопротивления от числа Маха в крейсерском режиме  $C_L = 0,5$  (рис. 6), применение многоточечной оптимизации привело к сдвигу точки кризиса волнового сопротивления в сторону больших значений числа Маха (от оригинального значения  $M = 0,76$  до  $0,80$ ).

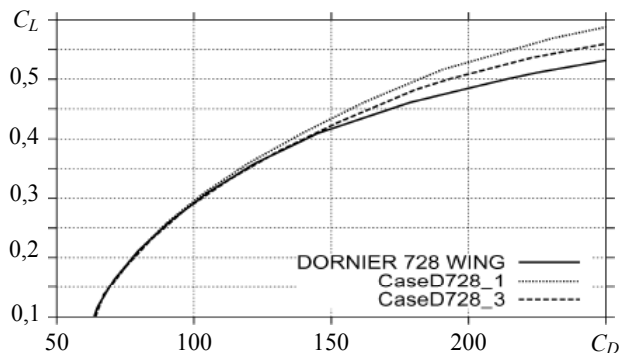


Рис. 4. Поляры (подъемная сила)/(сила сопротивления)  
при  $M = 0,78$

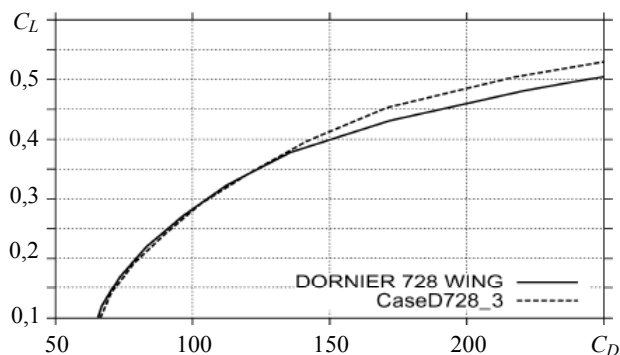


Рис. 5. Поляры (подъемная сила)/(сила сопротивления)  
при  $M = 0,80$

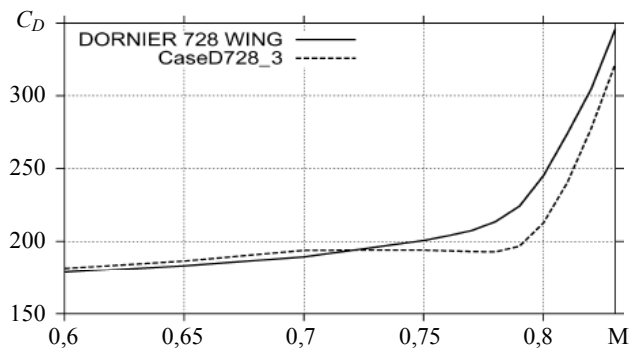


Рис. 6. Зависимость роста коэффициента сопротивления  
от числа Маха

Ожидалось, что включение точки взлета в многоточечную оптимизацию должно, по крайней мере, сохранить крылу высокую подъемную силу при малых числах Маха. Действительно, анализ результатов подтвердили это предположение. В самом деле, подъем кривой оптимизированного крыла немного лучше, чем у оригинала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Holland J.H.* Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.
2. *Michalewicz Z.* Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992. Artificial Intelligence.
3. *Пейгин С.В., Periaux J., Тимченко С.В.* Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
4. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // I. SIAM Journal of Numerical Analysis. 1987. V. 24. P. 279.
5. *Shu C.-W. and Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes I // Journal of Computational Physics. 1989. V. 83. No. 1. 1989. P. 3
6. *Epstein B. Averbuch A. and Yavneh I.* An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // Journal of Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328.
7. *Epstein B., Peigin S.V.* Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations // International Journal of CFD. 2004. V. 18. No. 3.
8. *Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В.* Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. 2000. Т. 41. № 4. С. 112–121.

Статья поступила 20.01.2015 г.

*Orlov S.A., Peigin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V.* EFFECTIVE IMPLEMENTATION OF NONLINEAR CONSTRAINTS IN OPTIMIZATION OF THREE-DIMENSIONAL TRANSONIC WINGS

A new approach to effective implementation of non-linear constraints for optimization problems solving using genetic algorithms (GA) is proposed. The feature of the approach is to change the traditional strategy in which the search path can only pass through permissible (satisfying the constraints) point by admitting routes passing through both valid and invalid points. The basic idea of this approach is that the information from the "forbidden" (i.e., not satisfying the constraints) areas can be very important, and the path to the optimal point that runs through these areas can appear to be much shorter. The method was applied to the problem of multiobjective optimization of aerodynamic shapes depending on different geometrical and aerodynamic constraints. The results showed that the method maintains high reliability with preservation of the traditional GA computational costs (in the calculation of the objective function on the basis of the full Navier–Stokes equations) at an acceptable level.

Keywords: Conditional optimization, genetic algorithms, nonlinear constraints, Navier - Stokes equations, three-dimensional transonic wings.

*ORLOV Sergey Aleksandrovich* (Candidate of physical and mathematical science, Assoc. prof of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

*PEIGIN Sergey Vladimirovich* (Doctor of physical and mathematical science, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

*STEPANOV Kiril Aleksandrovich* (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

*TIMCHENKO Sergey Viktorovich* (Doctor of physical and mathematical science, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

## REFERENCES

1. Holland J.H. *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1975.
2. Michalewicz Z. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. New York, Springer-Verlag, 1992. Artificial Intelligence.
3. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1998, vol. 10, no. 9, pp. 111–122. (in Russian)
4. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. I. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1987, vol. 24, pp. 279.
5. Shu C.-W. and Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes I. *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 83, no. 1, pp. 3
6. Epstein B. Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 168, pp. 316–328.
7. Epstein B., Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations. *International Journal of CFD*, 2004, vol. 18, no. 3.
8. Kazakov V.Yu. , Peygin S.V., Timchenko S.V. Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu zemli po integral'nomu teplovomu potoku. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 112–121. (in Russian)

УДК 539.319

М.А. Осипенко

## ЗАДАЧА ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии с возможным отставанием тяжелой гибкой нерастяжимой нити и гладкого твердого тела. Наличие твердого тела приводит к малому отклонению нити от вертикали. Задача сводится к отысканию плотности сил взаимодействия нити и тела. Сформулирована строгая постановка задачи, установлена единственность решения и построено аналитическое решение в частных случаях. Показано, что в зависимости от формы тела возможен контакт в одной точке или по некоторому участку нити.

**Ключевые слова:** *гибкая нерастяжимая нить, односторонний контакт, контактная задача, единственность решения, аналитическое решение.*

Гибкая нерастяжимая нить является одной из простейших механических систем с бесконечным числом степеней свободы [1]. Для такой нити, как и для близких «одномерных» систем (струна, балка), могут быть поставлены контактные задачи. В [1] рассмотрены задачи о контакте нити с абсолютно твердым телом, как гладким, так и шероховатым (задача Эйлера). При этом область контакта нити и тела предполагается обычно заранее известной (совпадающей со всей нитью), хотя формально контакт считается односторонним и нить может отставать от тела. Задачи с заранее неизвестной областью контакта менее изучены; в [1, с. 53] име-

ется только одна такая задача, в которой обоснование правильности найденной области контакта является несложным. Более сложные задачи такого рода могут быть исследованы с помощью подхода, предложенного в [2–5] для струн и балок.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача о контакте находящейся в равновесии тяжелой гибкой нерастяжимой нити с абсолютно твердым гладким телом (рис. 1). Отклонение нити от вертикали предполагается малым. Целью работы является строгая математическая постановка задачи, доказательство единственности решения и построение аналитического решения в двух частных случаях. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

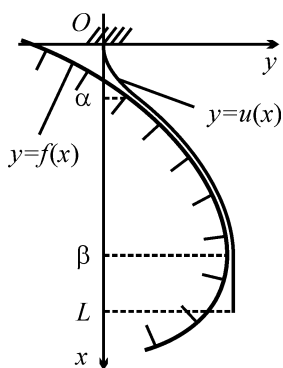


Рис. 1. Контакт нити

### Постановка контактной задачи

Форма твердого тела описывается заданной функцией  $f(x)$ . Нерастяжимая нить длины  $L$  закреплена в точке  $O$  и находится в поле силы тяжести. Трение между нитью и телом отсутствует. Форма нити в равновесии описывается искомой функцией  $u(x)$  (рис. 1). Обозначим  $r(x) = u(x) - f(x)$  (расстояние между нитью и телом). При малом отклонении нити от вертикали  $0 \leq x \leq L$ , силы, с которыми те-

ло действует на нить, направлены вдоль оси  $y$ ; плотность этих сил обозначим через  $q(x)$ . Используя принцип возможных перемещений [6], нетрудно найти, что

$$r(x) = \int_0^x \left( \int_s^L q(t) dt \right) \frac{ds}{m(s)g} - f(x), \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $m(s)$  – заданная масса участка нити  $s \leq x \leq L$ . Функцию  $m(x)$  будем считать положительной и непрерывной при  $0 \leq x \leq L$ . Положительность  $m(L)$  означает, что на конце нити имеется сосредоточенная масса. Это предположение сделано для того, чтобы избежать возможной расходимости интеграла (1) при  $x = L$  (и аналогичных интегралов ниже). Отыскание  $u(x)$  сводится, таким образом, к отысканию  $q(x)$ . Будем считать, что  $q(x)$  имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \quad (2)$$

где  $p(x) \geq 0$  – кусочно-непрерывная, непрерывная слева при  $0 < x \leq L$  и непрерывная справа при  $x = 0$ ;  $P_i \geq 0$ ;  $x_i > 0$  (все  $x_i$  различны); сумма конечна;  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Условие контакта нити и тела состоит, помимо неотрицательности  $q(x)$ , в том, что расстояние между нитью и телом неотрицательно, а в тех точках, где  $q(x)$  положительна, равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

**Задача.** Найти функцию  $q(x)$  вида (2), такую, что при  $0 \leq x \leq L$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (q(x) > 0), \\ \geq 0 & (q(x) = 0), \end{cases} \quad (3)$$

где  $r(x)$  выражается формулой (1).

**Утверждение 1.** Поставленная задача может иметь только одно решение.

**Доказательство** Пусть  $q(x)$  и  $q^*(x)$  – два решения задачи. По формуле (1) им соответствуют функции  $r(x)$  и  $r^*(x)$ . Обозначим

$$\varphi(x) = q(x) - q^*(x). \quad (4)$$

Так как  $q(x)$  и  $q^*(x)$  имеют вид (2), то  $\varphi(x)$  также имеет вид (2), но  $p(x)$  и  $P_i$  в (2) могут быть неположительными. Обозначим

$$E = \int_0^L (r(x) - r^*(x)) \varphi(x) dx. \quad (5)$$

Из (3), (4) нетрудно установить, что в (5) подынтегральная функция неположительна; следовательно,  $E \leq 0$ . С другой стороны, подставляя (1) в (5) и учитывая (4), найдем

$$E = \int_0^L \frac{J^2(x)}{m(x)g} dx, \quad (6)$$

где

$$J(x) = \int_x^L \varphi(s) ds. \quad (7)$$

Из (6) следует, что  $E \geq 0$ . Так как выше было доказано неравенство  $E \leq 0$ , то  $E = 0$ . Далее, учитывая (7) и упомянутый выше вид  $\varphi(x)$ , легко установить, что из (6) и равенства  $E = 0$  следует, что  $J(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Тогда  $\varphi(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Действительно, предположим, что для  $\varphi(x)$  в (2)  $p(x) > 0$  при некотором  $x^* > 0$ . Тогда, в силу непрерывности  $p(x)$  слева и конечности суммы, можно найти такие

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ , что отрезок  $0 < x^* - \varepsilon_1 \leq x \leq x^* - \varepsilon_2$  не содержит ни одной точки  $x_i$  и  $p(x) > 0$  на этом отрезке; это противоречит равенству  $J(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Аналогично устанавливается невозможность неравенств  $p(x) < 0$  при  $x > 0$  и  $p(0) \neq 0$ ; следовательно,  $p(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , и для  $\varphi(x)$  в (2) остается только сумма  $\delta$ -функций. Пусть  $x_m > 0$  – максимальное из чисел  $x_i$ , соответствующих ненулевым значениям  $P_i$ . Тогда из (7) следует, что  $J(x) \neq 0$  в некоторой левой полуокрестности  $x_m$ , что противоречит равенству  $J(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Таким образом,  $\varphi(x) = 0$  и  $q(x) = q^*(x)$  при  $0 \leq x \leq L$ ; тем самым, утверждение 1 доказано.

### Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

**Утверждение 2.** Пусть  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq L$ ;  $m(x)$  непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq L$ ;  $(m(x)f'(x))' < 0$ ;  $f(0) < 0$ ;  $f'(0) > 0$ ;  $f'(L) < 0$ ;  $f(\beta) > 0$ , где  $0 < \beta < L$  – корень уравнения  $f'(B) = 0$  (эти условия соответствуют рис. 1);  $0 < \alpha < \beta$  – корень уравнения  $\Phi(A) = 0$ , где

$$\Phi(A) = m(A)f'(A) \int_0^A \frac{ds}{m(s)} - f(A).$$

Тогда решение поставленной задачи имеет вид

$$q(x) = \begin{cases} -(m(x)f'(x))' & (\alpha \leq x < \beta), \\ 0 & (x < \alpha, x \geq \beta). \end{cases} \quad (8)$$

**Доказательство.** Так как  $f'(B)$  непрерывна при  $0 \leq B \leq L$ ;  $f'(0) > 0$ ;  $f'(L) < 0$ , то корень  $\beta$  существует. Так как  $\Phi(A)$  непрерывна при  $0 \leq A \leq \beta$ ;  $\Phi(0) = -f(0) > 0$ ;  $\Phi(\beta) = -f(\beta) < 0$ , то корень  $0 < \alpha < \beta$  существует. Далее,  $q(x)$ , очевидно, имеет вид (2). Остается доказать справедливость (3). Неравенство  $q(x) > 0$  выполнено только при  $\alpha \leq x < \beta$ ; для этих  $x$  из (1), (8) (с учетом упомянутых в формулировке утверждения 2 свойств функции  $f(x)$ ) нетрудно найти, что  $r(x) = 0$ ; тем самым, первое соотношение в (3) выполнено. При  $x < \alpha$  из (1), (8) и равенств  $f'(\beta) = 0$ ,  $\Phi(\alpha) = 0$  можно получить следующее представление для  $r(x)$ :

$$r(x) = - \int_x^\alpha \left( \int_s^\alpha (m(t)f'(t))' dt \right) \frac{ds}{m(s)},$$

откуда следует, что  $r(x) \geq 0$ . При  $x \geq \beta$  из (1), (8) и равенств  $f'(\beta) = 0$ ,  $\Phi(\alpha) = 0$  можно получить следующее представление для  $r(x)$ :

$$r(x) = - \int_\beta^x \left( \int_\beta^s (m(t)f'(t))' dt \right) \frac{ds}{m(s)},$$

откуда следует, что  $r(x) \geq 0$ ; тем самым, второе соотношение в (3) выполнено и утверждение 2 доказано.

**Утверждение 3.** Пусть  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq L$ ;  $m(x)$  непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq L$ ;  $(m(x)f'(x))' > 0$ ;  $f(0) < 0$ ;  $f(L) > 0$ . Тогда решение поставленной задачи имеет вид (рис. 2)

$$q(x) = F\delta(x - L), \quad (9)$$

где

$$F = f(L)g \Big/ \int_0^L \frac{dx}{m(x)}. \quad (10)$$

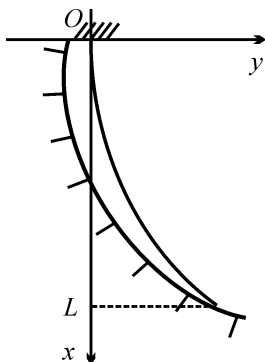


Рис. 2. Одноточечный контакт нити и тела

**Доказательство.** Функция (9), очевидно, имеет вид (2). Остается доказать справедливость (3). Неравенство  $q(x) > 0$  выполнено только при  $x = L$ ; из (1), (9), (10) нетрудно найти, что  $r(L) = 0$ ; тем самым, первое соотношение в (3) выполнено. При  $0 \leq x \leq L$  из (1), (9), (10) можно получить следующее представление для  $r(x)$ :

$$r(x) = -\frac{f(0)F}{f(L)g} \int_x^L \frac{ds}{m(s)} + \int_0^x \frac{\psi(s)ds}{m(s)}, \quad (11)$$

где 
$$\psi(x) = \frac{F}{f(L)g} \int_0^L \left( \int_0^s (m(t)f'(t))' dt \right) \frac{ds}{m(s)} - \int_0^x (m(t)f'(t))' dt.$$

Так как  $(m(x)f'(x))' > 0$ , то  $\psi(0) > 0$  и  $\psi(x)$  убывает при  $0 \leq x \leq L$ . Если  $\psi(L) \geq 0$ , то  $\psi(x) > 0$  при  $0 \leq x < L$ ; тогда из (11) следует неверное неравенство  $r(L) > 0$ ; следовательно,  $\psi(L) < 0$ . Тогда существует  $0 < x^* < L$ , такое, что  $\psi(x) > 0$  при  $0 \leq x < x^*$  и  $\psi(x) < 0$  при  $x^* < x \leq L$ ; следовательно, второе слагаемое в (11), обращаясь в нуль при  $x = L$  (так как  $r(L) = 0$ ), возрастает при  $0 \leq x < x^*$  и убывает при  $x^* < x \leq L$ . Поэтому данное слагаемое неотрицательно при  $0 \leq x \leq L$ . Первое слагаемое в (11) отрицательно вследствие условия  $f(0) < 0$ . Таким образом,  $r(x) \geq 0$ ; тем самым, второе соотношение в (3) выполнено и утверждение 3 доказано.

### Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Можно показать, что утверждения 2 и 3 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функций  $f(x)$  и  $m(x)$ . Функцию  $f(x)$  можно считать лишь непрерывно дифференцируемой и дважды кусочно-непрерывно дифференцируемой, доопределяя  $f''(x)$  в точках излома  $f'(x)$  по непрерывности слева. Функцию  $m(x)$  можно считать лишь кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой, доопределяя  $m'(x)$  в точках излома  $m(x)$  по непрерывности слева и добавляя к  $m'(x)$  в точках разрыва  $m(x)$  (первого рода) соответствующие  $\delta$ -функции.

Использованный подход к постановке и решению контактной задачи для нити и твердого тела может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда  $(m(x)f'(x))'$  меняет знак), так и для решения близких контактных задач для нитей, струн и балок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Осипенко М.А. Об одной контактной задаче для системы струн // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. 2005. № 1. С. 82–86.
3. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1. С. 77–84.
4. Осипенко М.А. Контактная задача для двух струн с переменными натяжениями // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2014. Т. 6. № 3. С. 66–71.
5. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1998. 416 с.

Статья поступила 01.10.2014 г.

*Osipenko M.A.* THE PROBLEM OF UNILATERAL CONTACT OF FLEXIBLE NON-STRETCHABLE ROPE AND RIGID SOLID

The flexible nonstretchable rope is one of simplest mechanical systems with the infinite number of degrees of freedom. Contact problems can be posed for such ropes, as well as for the related one-dimensional systems (strings and beams). The unbounded contact problem for heavy flexible nonstretchable rope and smooth rigid solid of a given shape is considered. The rope has one end fixed and the other end free. The rope density may be variable. The presence of a rigid solid slightly deflects the rope from the vertical line. The problem is to find the rope shape and can be reduced to finding the density of the interacting forces between the rope and the solid. This density is the sum of the piecewise-continuous part and concentrated forces. These forces are described by Dirac's delta-function. The contact conditions are as follows. The density should be non-negative, the distance between the rope and the body should be non-negative, and this distance should be equal to zero at points where the density is positive. There are two approaches to such problems. The first one is variational. Here, the rope shape is in question. The rigorous problem statements and (rather complicated) proofs of uniqueness and existence of solutions are possible in this approach. However, the analytical solutions usually are not considered here. Even if the hypothetical analytical solution is obtained, it is not easy to establish whether it is really the solution (i.e., whether it minimizes some functional or satisfies some variational inequality). The second approach is based on the theory of strength of materials. It is convenient here to consider the density of the interacting forces as the function to be found. It is often possible to construct and to verify the hypothetical analytical solution. However, this approach lacks for the rigorous problem statement. Even the formulation of the theorem of the uniqueness of the solution is impossible without this rigorous statement. The present article uses the second approach with some improvements and refinements. Then, as in the first approach, the rigorous problem statement can be formulated. Further, it is easy to prove the uniqueness of the solution and to substantiate the constructed analytical solution. This construction also proves the existence of the solution. The substantiation of the solution includes proving the non-negativity of the contact forces and contact distances and proves the existence of a root of transcendental equation that yields the length of the contact segment. It is shown that different contact patterns are possible: a contact at the point and a contact along a rope segment. The pattern kind depends on the shape of the rigid solid.

Keywords: flexible nonstretchable rope, unilateral contact, contact problem, uniqueness of solution, analytical solution.

*Osipenko Michael Anatol'evich* (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation)

E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

## REFERENCES

1. Merkin D.R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti*. Moscow, Nauka Publ., 1980, 240 p. (in Russian)
2. Osipenko M.A. Ob odnoy kontaktnoy zadache dlya sistemy strun. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2005, no. 1, pp. 82–86. (in Russian)
3. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Ob odnom podkhode k resheniyu nekotorykh odnomernykh kontaktnykh zadach. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya*, 2011, vol. 11. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, no. 1, pp. 77–84. (in Russian)
4. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha dlya dvukh strun s peremennymi natyazheniyami. *Vestnik YuUrGU. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 66–71. (in Russian)
5. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha ob izgibe dvukhlistovoy ressoy s listami peremennoy tolshchiny. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1(27), pp. 90–94. (in Russian)
6. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1998, 416 p. (in Russian)

УДК 532.529, 519.63

Е.В. Пикущак, Л.Л. Миньков

**ВЛИЯНИЕ ПОПРАВКИ ОЗЕЕНА НА ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТИ  
ОСЕДАНИЯ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ В БИДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ<sup>1</sup>**

На основе приближенного решения Озеена для поля течения вязкой несжимаемой жидкости около сферы проводится оценка времени пребывания мелкой частицы в цилиндрической ячейке, окружающей крупную частицу, с учетом силы тяжести и с последующим определением средней скорости мелкой частицы в ячейке. Проводится оценка влияния числа Рейнольдса и размера цилиндрической ячейки на среднюю скорость движения мелкой частицы.

**Ключевые слова:** обтекание сферы, бидисперсная суспензия, седиментация, решение Озеена.

При седиментации частиц в би- и полидисперсной суспензиях наблюдается значительное повышение скорости оседания мелких частиц по сравнению со значением, даваемым формулой Стокса [1–3]. Ускоренная седиментация мелких частиц может играть большую роль в технических приложениях. С одной стороны увеличение скорости оседания мелких частиц способствует повышению качества очистки жидкости от мелких примесей при очистке сточных вод, а с другой – увеличение скорости оседания мелких частиц ухудшает качество разделения частиц суспензии по размерам за счет попадания мелких фракций в крупный продукт [4, 5].

Для объяснения причин ускорения седиментации мелких частиц в окружении соседних крупных в работе [6] была предложена ячеистая модель увлечения мелких частиц крупными за счет попадания мелких частиц в гидродинамический погранслои крупных. Эта модель, построенная на приближении Стокса для поля течения около крупной частицы, позволила объяснить на качественном и количественном уровнях такое явление, как «фиш-хук»-эффект, наблюдаемый при разделении частиц в гидроциклонах малых масштабов [4, 7, 8].

Очевидно, что течение Стокса имеет место при малой скорости дисперсной среды относительно дисперсионной, когда относительное число Рейнольдса для крупной частицы близко к нулю. В гидроциклонах малых масштабов (диаметром менее 50 мм) разделяемая суспензия подвергается большим ускорениям, что приводит к отклонению поля течения около крупной частицы от Стоксовского режима [9]. В Авторами [10] была предложена гипотеза, объясняющая ускоренное оседание мелких частиц за счет их попадания в вихревую зону, образующуюся за крупной частицей при числах Рейнольдса больше 25. В частности, было показано, что средняя скорость седиментации мелких частиц ведет себя немонотонно с увеличением числа Рейнольдса от 25 до 200.

Целью настоящей работы является развитие модели ускоренного оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии, предложенной в работе [6], на случай поля течения Озеена около крупной частицы, которое справедливо для  $Re < 1$ .

<sup>1</sup> Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФИ мол\_нр №14-38-50913.

В работе [11] приводится решение задачи об обтекании неподвижного шара вязким потоком несжимаемой жидкости (рис. 1) для чисел  $0 < \text{Re} < 1$ .

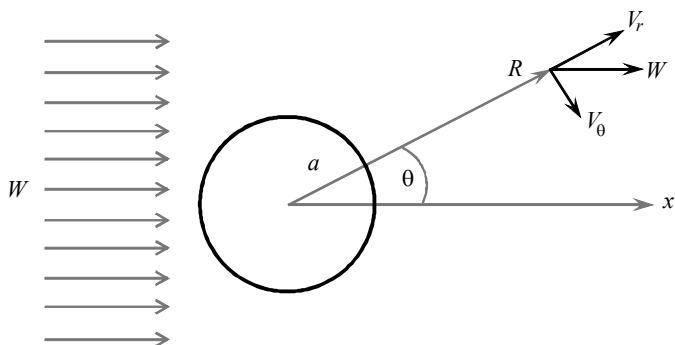


Рис. 1. Схема обтекания частицы жидкостью

Поле течения жидкости, скорость которой на бесконечности равна  $W$ , а кинематическая вязкость –  $\nu$ , определяется следующими выражениями для компонент вектора скорости, записанных в сферической системе координат:

$$V_r = -\frac{A_0}{R^2} + \frac{2A_1 \cos(\theta)}{R^3} - \frac{C_0 \exp(-kR[1 - \cos(\theta)])}{2kR^2} [1 + kR(1 + \cos(\theta))] + \frac{C_1 \cos(\theta) \exp(-kR[1 - \cos(\theta)])}{kR^3} + W \cos(\theta); \quad (1)$$

$$V_\theta = \frac{A_1 \sin(\theta)}{R^3} + \frac{C_0 \sin(\theta)}{2R} \exp(-kR[1 - \cos(\theta)]) + \frac{C_1 \sin(\theta)}{2kR^3} \exp(-kR[1 - \cos(\theta)]) - W \sin(\theta), \quad (2)$$

где  $k = \frac{W}{2\nu}$ ;  $C_0 = \frac{3Wa}{2} \left(1 + \frac{3ka}{4}\right)$ ;  $C_1 = \frac{3}{2} Wa^3 k$ ;  $A_0 = -\frac{3Wa}{4k} \left(1 + \frac{3ka}{4}\right)$ ;  $A_1 = -\frac{1}{2} Wa^3$ ;  $a$  – радиус шара;  $R$  – расстояние от центра шара,  $R > a$ .

В декартовой системе координат компоненты вектора скорости течения выражаются в виде

$$U = V_r \cos(\theta) - V_\theta \sin(\theta); \quad V = V_r \sin(\theta) + V_\theta \cos(\theta).$$

Для перехода к безразмерной форме записи выберем в качестве масштаба длины радиус шара, а в качестве масштаба скорости –  $W$ , тогда

$$r = R/a, \quad v_r = V_r/W, \quad v_\theta = V_\theta/W.$$

$$v_r = \cos(\theta) - \frac{A_0}{r^2} + \frac{2A_1 \cos(\theta)}{r^3} + \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r [1 - \cos(\theta)]\right) \times \left[ -\frac{C_0}{\text{Re} \cdot r^2} - \frac{C_0 (1 + \cos(\theta))}{2r} + \frac{C_1 \cos(\theta)}{\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r^3} \right]; \quad (3)$$

$$v_{\theta} = \left[ \frac{A_1}{r^3} + \left( \frac{C_0}{2r} + \frac{C_1}{\text{Re} \cdot r^3} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r [1 - \cos(\theta)] \right) - 1 \right] \sin(\theta), \quad (4)$$

где  $\text{Re} = \frac{aU}{\nu}$ ,  $C_0 = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right)$ ,  $C_1 = \frac{3}{4} \text{Re}$ ,

$$A_0 = -\frac{3}{2\text{Re}} \left( 1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right), \quad A_1 = -\frac{1}{2}$$

Здесь  $r > 1$ .

Очевидно, что при  $r = 1$  условия прилипания  $v_r = 0$ ,  $v_{\theta} = 0$  не выполняются, поэтому вблизи поверхности шара целесообразно использовать решение Стокса.

В декартовой системе координат компоненты вектора скорости течения выражаются в виде

$$u(x, y) = v_r(r, \theta) \cos(\theta) - v_{\theta}(r, \theta) \sin(\theta);$$

$$v(x, y) = v_r(r, \theta) \sin(\theta) + v_{\theta}(r, \theta) \cos(\theta).$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\theta) = x/r, \quad \sin(\theta) = y/r.$$

Для нахождения траекторий мелких частиц (в предположении малости чисел Стокса, [6]) решается система кинематических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y) - U_f; \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y), \quad (5)$$

где  $U_f$  – скорость оседания мелкой частицы в неподвижной жидкости.

С начальными условиями:  $t = 0$ ,  $x = -D$ ,  $y = y_0$ . Система уравнений (5) решается до момента времени, соответствующего  $x = D$ .

На рис. 2 показаны линии тока жидкости в окрестности крупной частицы для  $\text{Re} = 0,5$ . Видно, что в отличие от стоксовского режима обтекания линии тока перестают быть симметричными относительно оси  $OY$  и отклоняются от оси  $OX$  к периферии.

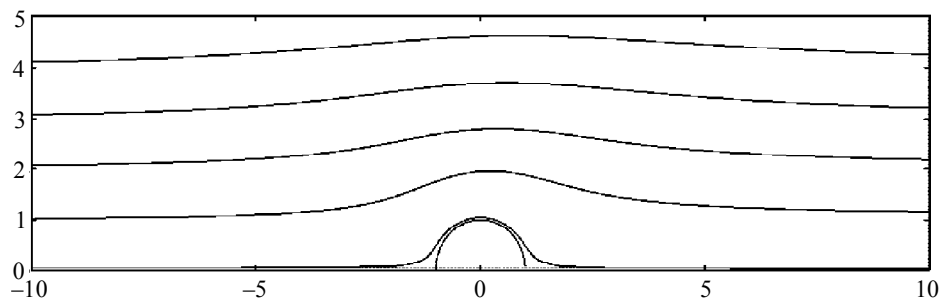


Рис. 2. Линии тока жидкости в окрестности крупной частицы:  
 $D = 20$ ,  $\text{Re} = 0,5$

На рис. 3 приведены траектории мелких частиц для  $U_f = 0,2$ . Для них, как и для линий тока жидкости, имеет место нарушение симметрии относительно оси  $OY$ , а отклонение от продольной оси к периферии становится более выраженным, чем для жидкости.

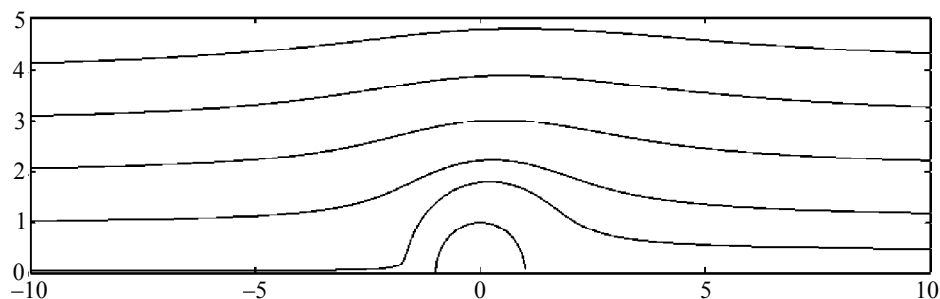


Рис. 3. Траектории мелких частиц в окрестности крупной частицы.  
 $D = 20$ ,  $Re = 0,5$ ,  $U_f = 0,2$

На рис. 4 представлены результаты расчетов  $U_s$  по формуле (6) для  $U_f = 0$  (средняя скорость жидкости в лабораторной системе координат), полученные для поля течения Озеена при разных числах Рейнольдса в диапазоне  $0 \leq Re \leq 1$ . Видно, что с ростом размера ячейки (увеличение  $D$ ) и числа Рейнольдса, средняя скорость жидкости в ячейке в лабораторной системе координат уменьшается, а для больших значений  $D$  – близка к нулю:

$$U_s(U_f, D, Re) = 1 - \frac{4}{D} \int_0^D \frac{y}{t(y, U_f, D, Re)} dy. \quad (6)$$

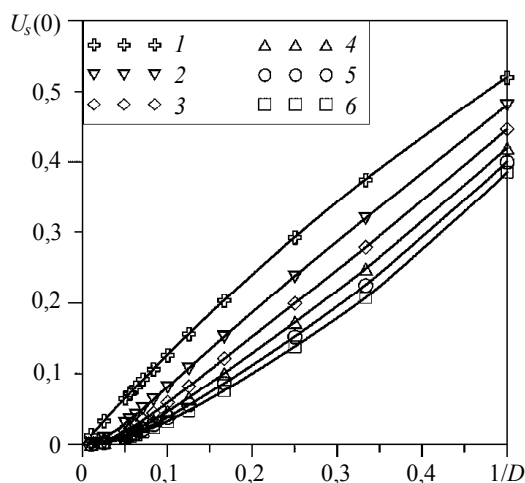


Рис. 4. Скорость движения жидкости в ячейке в зависимости от ее размера:  
 кр. 1 –  $Re = 0$ ; кр. 2 –  $0,2$ ; кр. 3 –  $0,4$ ; кр. 4 –  $0,6$ ; кр. 5 –  $0,8$ ; кр. 6 –  $1,0$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  являются функциями числа Рейнольдса, которые для  $0,1 \leq Re \leq 1$  можно аппроксимировать полиномами третьей степени:

$$a(Re) = -8,3036 \cdot Re^3 + 17,466 \cdot Re^2 - 9,5047 \cdot Re - 1,0824;$$

$$b(Re) = 7,3536 \cdot Re^3 - 16,075 \cdot Re^2 + 10,365 \cdot Re + 0,3369;$$

$$c(Re) = -1,6898 \cdot Re^3 + 3,9965 \cdot Re^2 - 3,3239 \cdot Re + 1,1518.$$

Полученные данные для  $U_s(0)$  аппроксимируются полиномами третьей степени  $U_s(0, D) = a(1/D)^3 + b(1/D)^2 + c(1/D)$ . В таблице приведены значения коэффициентов полинома для различных значений числа Рейнольдса.

Значения коэффициентов полинома

| Re  | $a$      | $b$      | $c$    |
|-----|----------|----------|--------|
| 0   | 0,233    | - 0,7016 | 1,3334 |
| 0,1 | -1,8104  | 1,1737   | 0,8672 |
| 0,2 | - 2,4571 | 1,9123   | 0,6157 |
| 0,4 | - 2,5658 | 2,3388   | 0,3617 |
| 0,6 | - 2,2635 | 2,3302   | 0,2377 |
| 0,8 | - 1,8092 | 2,1499   | 0,1756 |
| 1,0 | - 1,4077 | 1,9657   | 0,1378 |

Таким образом, средняя скорость жидкости в ячейке в лабораторной системе координат может быть представлена в виде

$$U_s(0, D, Re) = a(Re)\left(\frac{1}{D}\right)^3 + b(Re)\left(\frac{1}{D}\right)^2 + c(Re)\left(\frac{1}{D}\right).$$

Влияние размера ячейки на осредненную относительную скорость мелких частиц в ячейке

$$\frac{U_s(U_f, D, Re) - U_s(0, D, Re)}{U_f}$$

показано на рис. 5. Как видно, число Рейнольдса в диапазоне от 0 до 0,8 слабо влияет на относительную скорость мелких частиц, и данные можно аппроксимировать с приемлемой степенью точности зависимостью  $1 - 1,3/D^2$ .

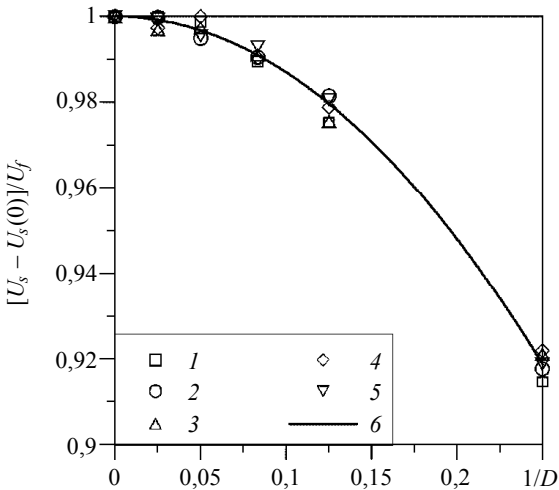


Рис. 5. Зависимость относительной скорости мелких частиц в ячейке от размера ячейки: кр. 1 – Re = 0,1; кр. 2 – 0,2; кр. 3 – 0,4; кр. 4 – 0,6; кр. 5 – 0,8; кр. 6 – аппроксимационная кривая

Окончательное выражение для осредненной скорости мелких частиц имеет вид

$$U_s(U_f, D, \text{Re}) = \frac{a(\text{Re})}{D^3} + \frac{b(\text{Re})}{D^2} + \frac{c(\text{Re})}{D} + U_f \left( 1 - \frac{1,3}{D^2} \right). \quad (7)$$

В размерном виде формулу ускоренного оседания мелких частиц в присутствии крупных частиц (7) можно записать как

$$\frac{u_s}{u_f} = 1 - 1,57\alpha_c^{2/3} + \left( 1,5a(\text{Re})\alpha_c + 1,31b(\text{Re})\alpha_c^{2/3} + 1,145c(\text{Re})\alpha_c^{1/3} \right) \left( \frac{d_c}{d_f} \right)^2. \quad (8)$$

В отличие от формулы, полученной для течения Стокса около крупной частицы [6], в формуле (8) учтены слагаемые более высокого порядка малости относительно объемной доли крупных частиц, а именно  $\alpha_c^{2/3}$  и  $\alpha_c$ . Как следует из (8), таблицы и рис. 4, увеличение числа Рейнольдса ведет к снижению влияния отношения размеров крупной и мелкой частиц на повышение скорости оседания мелких частиц  $u_s$ . Более того, для разреженных суспензий увеличение числа Рейнольдса с 0 до 1 уменьшает относительную среднюю скорость оседания мелких частиц в 2,5 – 3 раза (рис. 6).

На рис. 7 показано влияние объемной доли крупных частиц на относительную среднюю скорость оседания мелких частиц для низких и умеренных значений чисел Рейнольдса. Видно, что зависимость  $U_s/U_f$  от  $\alpha_c$  имеет ярко выраженный максимум, что качественно согласуется с результатами экспериментов по измерению скорости оседания мелких частиц полидисперсной суспензии в тарельчатой центрифуге [12].

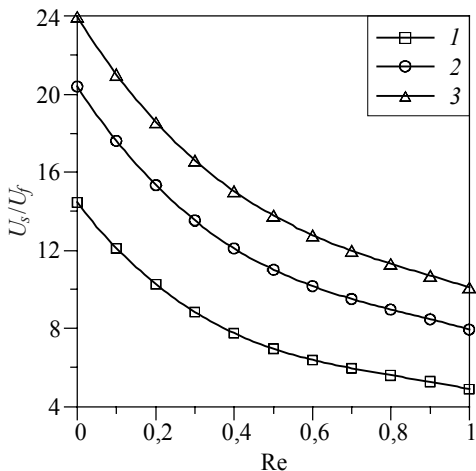


Рис. 6. Зависимость средней скорости оседания мелких частиц от числа Рейнольдса,  $d_c/d_f = 10$ : кр. 1 –  $\alpha_c = 0,001$ ; кр. 2 –  $0,003$ ; кр. 3 –  $0,005$

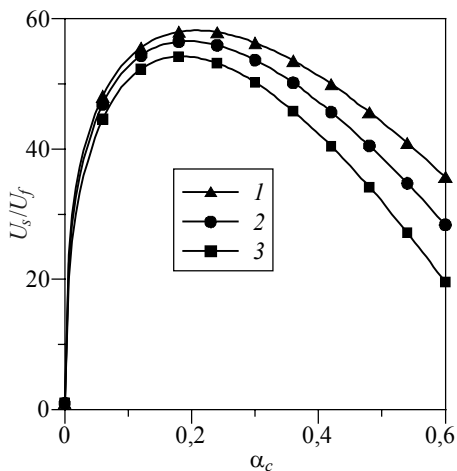


Рис. 7. Зависимость средней скорости оседания мелких частиц от объемной доли крупных частиц,  $d_c/d_f = 10$ : кр. 1 –  $\text{Re} = 0,05$ ; кр. 2 –  $0,1$ ; кр. 3 –  $0,2$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G.K., van Rensburg J. Structure formation in bidisperse sedimentation // J. Fluid Mech. 1986. V. 119. P. 379–407.
2. Bickert G., Stahl W., Bartsch R., Müller F. Sedimentationsverhalten von mono- und polydispersen, submikronen partikeln in verdünnten und konzentrierten suspensionen // Chem.-Ing. Tech. 1996. No. 68. P. 1459–1462.
3. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydisperser suspensionen bei der hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge // Aufbereitungstechnik. 1999. B. 40. N 7. S. 328–334.
4. Finch J.A. Modelling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves // Powder Technology. 1981. V. 29. P. 277.
5. Neeße Th., Dück J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im hydrozyklon // Aufbereitungstechnik. 1996. B. 37. N 9. S. 413–421.
6. Дик И.Г., Миньков Л.Л., Неессе Т. Гидродинамическая модель ускорения седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8. № 2. С. 283–294.
7. Neesse T., Dueck J., Schwemmer H., Farghaly M. Using a high pressure hydrocyclone for solids classification in the submicron range // Minerals Engineering. 2015. V. 71. P. 85–88.
8. Minkov L., Dueck J., Neesse T. Computer simulations of the Fish-Hook effect in hydrocyclone separation // Minerals Engineering. 2014. V. 62. P. 19–24.
9. Миньков Л.Л., Степанова Ю.О. Влияние циркуляционной зоны на скорость оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 70–77.
10. Dueck J. The sedimentation velocity of a particle in a wide range of Reynolds numbers in the application to the analysis of the separation curve // Advanced Powder Technology. 2013. V. 24. No. 1. P. 150–153.
11. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
12. Дик И.Г., Килимник Д.Ю., Миньков Л.Л., Неессе Т. Измерение скорости седиментации мелкодисперсных частиц в тарельчатой центрифуге // ИФЖ. 2003. Т. 76. № 4. С. 7–17.

Статья поступила 06.01.2015 г.

*Pikushchak E.V., Minkov L.L. INFLUENCE OF OSEEN'S CORRECTION ON FINE PARTICLE SETTLING VELOCITY FORMULA FOR BIDISPERSE SUSPENSION*

In this paper, a simplified cellular model of particle sedimentation under gravity in bidisperse suspension is proposed. To determine the average settling velocity of fine particles, their residence time in the cylindrical cell surrounding the large ones is evaluated. The flow field of a viscous incompressible fluid around the large particle is described based on the approximate Oseen solution. The fine particles are assumed to be inertialess, which allows one to determine the trajectory of these particles by solving only kinematic equations. The influence of the Reynolds number and the size of the cylindrical cell on the average velocity of the fine particles is assessed. A formula for determining the sedimentation velocity of fine particles settling in the presence of large ones with allowance for the volume fraction of coarse particles, particle size ratio, and the Reynolds number is derived. It is shown that the increase in the Reynolds number tends to reduce the effect of the particle size ratio on the average sedimentation velocity of fine particles.

Keywords: flow around sphere, bidisperse suspension, sedimentation, Oseen's solution.

*MINKOV Leonid Leonidovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

*PIKUSHCHAK Elizaveta Vladimirovna* (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: liza@ftf.tsu.ru

## REFERENCES

1. Batchelor G.K., van Rensburg J. Structure formation in bidisperse sedimentation. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 119, pp. 379–407.
2. Bickert G., Stahl W., Bartsch R., Müller F. Sedimentationsverhalten von mono- und polydispersen, submikronen partikeln in verdünnten und konzentrierten suspensionen. *Chem.-Ing. Tech.*, 1996, no. 68, pp. 1459–1462.
3. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydisperser suspensionen bei der hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge. *Aufbereitungs technik*, 1999, b. 40, n 7, s. 328–334.
4. Finch J.A. Modelling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves. *Powder Technology*, 1981, vol. 29, pp. 277.
5. Neeße Th., Dück J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im hydrozyklon. *Aufbereitungstechnik*, 1996, b. 37, n 9, s. 413–421.
6. Dik I.G., Min'kov L.L., Neesse T. Gidrodinamicheskaya model' uskoreniya sedimentatsii melkikh chastits v bidispersnoy suspenzii. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2001, vol. 8, no. 2, pp. 283–294. (in Russian)
7. Neesse T., Dueck J., Schwemmer H., Farghaly M. Using a high pressure hydrocyclone for solids classification in the submicron range. *Minerals Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 85–88.
8. Minkov L., Dueck J., Neesse T. Computer simulations of the Fish-Hook effect in hydrocyclone separation. *Minerals Engineering*, 2014, vol. 62, pp. 19–24.
9. Min'kov L.L., Stepanova Yu.O. Vliyanie tsirkulyatsionnoy zony na skorost' osedaniya melkikh chastits v bidispersnoy suspenzii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 5(25), pp. 70–77. (in Russian)
10. Dueck J. The sedimentation velocity of a particle in a wide range of Reynolds numbers in the application to the analysis of the separation curve. *Advanced Powder Technology*, 2013, vol. 24, no. 1, pp. 150–153.
11. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti*. Moscow, GITTL Publ., 1955, 519 p. (in Russian)
12. Dik I.G., Kilimnik D.Yu., Min'kov L.L., Neesse T. Izmerenie skorosti sedimentatsii melkodispersnykh chastits v tarel'chatoy tsentrifuge. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2003, vol. 76, no. 4, pp. 7–17. (in Russian)

УДК: 536.46+536.24

**В.А. Порязов****ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСНОСТИ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ  
НА СКОРОСТЬ ГОРЕНИЯ МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫХ  
СМЕСЕВЫХ ТВЕРДЫХ ТОПЛИВ<sup>1</sup>**

Представлена физико-математическая модель горения смесового твердого топлива на основе перхлората аммония с добавлением частиц алюминия, учитывающая тепловой эффект разложения конденсированной фазы, конвекцию, диффузию, экзотермическую химическую реакцию в газовой фазе, нагрев и горение частиц алюминия в потоке газа, движение продуктов сгорания, скоростное отставание частиц от газа. Учитывается влияние размера и массовой доли вылетающих с поверхности горения частиц металла на скорость горения. Исследовано влияние размера вылетающих с поверхности горения частиц алюминия на линейную скорость горения.

**Ключевые слова:** *металлизированное твердое топливо, скорость горения, дисперсность частиц алюминия, газовая фаза*

Основой большинства современных моделей горения смесевых твердых топлив (СТТ) является модель Германса [1]. Применимость ее для проведения инженерных расчетов скорости горения СТТ, в частности моделирования эрозионного горения, продемонстрирована в работе [2].

Объектом исследования выбрано СТТ на основе перхлората аммония (ПХА) со связующим бутил-каучуком и добавлением частиц алюминия. Ставится задача исследовать общие закономерности влияния дисперсности частиц алюминия на скорость горения металлизированного СТТ.

Скорость горения смесового топлива рассчитывается как величина, определяемая массовыми потоками компонентов топлива с поверхности горения. Массовый поток компонентов топлива определяется тепловым балансом системы на поверхности топлива, складывающимся из теплового потока из газовой фазы и суммарным тепловыделением в к-фазе. Тепловыделение в к-фазе обусловлено экзотермическим процессом разложения окислителя и эндотермическим пиролизом связки. В газовой фазе протекает экзотермическая химическая реакция первого порядка по закону Аррениуса, конвекция и диффузия реагентов. Горение происходит в изобарических условиях, давление не зависит от координаты. Учитывается расширение газа при его нагревании. Частицы алюминия представляют собой шарики, размер частиц в составе топлива одинаков, распределение зерен перхлората аммония в объеме топлива равномерное, частицы алюминия равномерно распределены в связующем. Горение частиц алюминия описывается согласно экспериментальным данным [3]. Воспламенение частиц алюминия происходит при достижении температуры частицы равной заданной величине [3]. Теплообмен между частицами и газом происходит по закону Ньютона, движение частиц про-

<sup>1</sup> Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания № 10.1329.2014/К.

исходит под действием сил трения со стороны газа, из-за малой объемной концентрации частиц в газе влиянием движения частиц на движение газа пренебрегается. Не учитывается агломерация частиц на поверхности к-фазы, размер вылетающих с поверхности горения частиц соответствует размерам частиц в к-фазе. Не учитывается взаимодействие частиц друг с другом в газовой фазе.

Математическая постановка задачи состоит из уравнений для определения массовых потоков компонентов топлива, суммарного теплового эффекта в к-фазе, сохранения энергии газа и частиц алюминия, сохранения массы газа, массы частиц и числа частиц алюминия, выгорания реагента в газовой фазе, движения частиц в потоке газа, уравнения состояния газа [4]. Постановка для полидисперсного состава конденсированных продуктов горения в газовой фазе аналогична [5]:

$$c_2 \rho_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + Y \rho_2 k_0 Q_2 \exp \left( \frac{-E_2}{R_y T_2} \right) + \sum_{i=1}^N 4\pi \alpha_i r_{k,i}^2 n_i (T_{3,i} - T_2); \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial t} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - Y k_0 \exp \left( \frac{-E_2}{R_y T_2} \right); \quad (2)$$

$$c_3 \rho_3 \left( \frac{\partial T_{3,i}}{\partial t} + w_{3,i} \frac{\partial T_{3,i}}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha_i r_{k,i}^2 n_i (T_{3,i} - T_2) + G_i Q_{Al} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^N G_i; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_{3,i}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{3,i} w_i)}{\partial x} = G_i; \quad (5)$$

$$\frac{\partial w_{3,i}}{\partial t} + w_{3,i} \frac{\partial w_{3,i}}{\partial x} = -\tau_{tr,i}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i w_{3,i})}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

$$P = \rho_2 R T_2 = \text{const}; \quad (8)$$

$$V_k = (v_f m_f + v_{ox} m_{ox}) / \rho_k; \quad (9)$$

$$Q_s = \alpha_{ox} (Q_{gp} - Q_l) - (v_f H_p + v_{Al} c_{Al}) \frac{m_f}{\rho_l V_k}, \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Принятые обозначения:  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $\alpha_{ox}$ ,  $\alpha_f$ ,  $\alpha_{Al}$  – массовая доля окислителя, горючего, алюминия в составе СТГ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $v$  – объемная доля;  $\rho_p$  – плотность СТГ;  $\rho_2$  – плотность газа;

$\rho_3$  – приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема);  $\tau_{\text{тр}}$  – сила трения;  $\mu_{\text{Al}}$ ,  $\mu_{\text{O}}$  – молярные массы молекул алюминия и кислорода;  $c_2$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении;  $c_{\text{Al}}$  – теплоемкость алюминия;  $c_p$  – тепловой эффект эндотермической реакции пиролиза;  $D$  – коэффициент диффузии;  $G$  – скорость изменения массы частиц при их горении;  $m$  – массовый поток с единицы поверхности;  $n$  – число частиц в единице объема;  $P$  – давление;  $Q_2$  – тепловой эффект реакции в газовой фазе;  $Q_{\text{Al}}$  – теплота сгорания алюминия;  $Q_{\text{гр}}$  – теплота разложения окислителя в газовой фазе;  $Q_l$  – скрытая теплота разложения окислителя;  $Q_s$  – тепловой эффект реакции в к-фазе;  $R$  – газовая постоянная;  $R_y$  – универсальная газовая постоянная;  $R_{\text{Al}}$  – радиус алюминия;  $r_k$  – радиус частицы;  $t$  – время;  $T$  – температура;  $u$  – скорость газа;  $V_k$  – линейная скорость горения;  $w_3$  – скорость частиц;  $x$  – координата;  $Y$  – относительная концентрация горючего в газовой фазе;  $\rho_p = 1/(\alpha_{\text{ox}}/\rho_{\text{ox}} + \alpha_f/\rho_f + \alpha_{\text{Al}}/\rho_{\text{Al}})$ ;  $m_f = (\rho_f + \rho_{\text{Al}})A_f \exp(E_f/RT_s)$ ;  $m_{\text{ox}} = \rho_p V_k (\alpha_{\text{ox}}/v_{\text{ox}})$ .

Индексы: 2 – газовая фаза,  $i$  – номер фракции частиц,  $N$  – количество фракций, 3 – частицы конденсированной фазы продуктов горения, ox – окислитель,  $f$  – связующее, Al – алюминий,  $k$  – топливо.

В системе уравнений (1) – (10) уравнения (1), (3) – уравнения энергии для газовой фазы и фракций частиц алюминия, (2) – уравнение для глубины выгорания горючего в газовой фазе, (4) – уравнение сохранения массы газовой фазы, (5) – уравнение сохранения массы  $i$ -й фракции частиц, (6) – уравнение движения частиц, (7) – уравнение для числа частиц во фракциях, (8) – уравнение состояния идеального газа, (9) – уравнение для определения линейной скорости горения, (10) – уравнение суммарного теплового эффекта к-фазы.

Координата  $x = 0$  соответствует поверхности горения. На границе  $x = 0$  граничные условия выражают законы сохранения массы и энергии:

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \rho_1 V_k (c_2 T_2|_{x=0} - Q_s - c_k T_{k,0}), \quad T_{3,i}|_{x=0} = T_2|_{x=0},$$

$$\rho_k V_k = \rho_2 u|_{x=0}, \quad \rho_k V_k Y = D_2 \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{x=0} + \rho_2 u Y|_{x=0}, \quad (11)$$

$$\rho_{3,i} V_k = \rho_{3,i} w_{3,i}|_{x=0}, \quad \rho_2|_{x=0} = \frac{P}{R T_2|_{x=0}}, \quad n_i|_{x=0} = \frac{\rho_{3,i}|_{x=0}}{(4/3)\pi r_{\text{Al},0,i}^3 \rho_{\text{Al}}}, \quad P = \text{const}$$

На границе  $x = \infty$  ставятся граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (12)$$

Начальные условия:

$$T_2(x, 0) = T_{\text{ign}}, \quad T_{3,i}(x, 0) = T_{\text{ign}}, \quad Y(x, 0) = 0, \quad \rho_2(x, 0) = \frac{P}{R T_2(x, 0)},$$

$$\rho_{3,i}(x, 0) = 0, \quad w_{3,i}(x, 0) = 0, \quad n_i(x, 0) = 0. \quad (13)$$

В уравнении (6) сила взаимодействия частиц алюминия с газом вычисляется по формуле

$$\tau_{tr,i} = \frac{F_{tr,i}}{\frac{4}{3}\pi r_{k,i}^3 \rho_{Al}}, \quad F_{tr,i} = C_{R,i} S_{m,i} \frac{\rho_2 (w_{3,i} - u) |u - w_{3,i}|}{2},$$

$$C_{R,i} = \frac{24}{Re_i} (1 + 0,15 Re_i^{0,682}), \quad Re_i = \frac{2\rho_2 r_{k,i} |u - w_{3,i}|}{\eta}, \quad S_m = \frac{\pi d_{Al,i}^2}{4}, \quad (14)$$

где  $Re$  – число Рейнольдса,  $S_m$  – площадь миделева сечения,  $C_R$  – коэффициент трения,  $\rho_{Al}$  – плотность алюминия,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_i$  определяется по формуле [6]

$$\alpha_i = \frac{Nu_i \lambda_2}{2r_{k,i}}, \quad Nu_i = 2 + \sqrt{Nu_{l,i}^2 + Nu_{t,i}^2},$$

$$Nu_{l,i} = 0,664 Re_i^{0,5}, \quad Nu_{t,i} = 0,037 Re_i^{0,8}, \quad (15)$$

где  $Nu$  – число Нуссельта;

$$G_i = \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} n_i \rho_{Al} 4\pi r_{Al,i}^2 k_{Al} \frac{a^{0,9}}{\sqrt{r_{Al,i}}}, \quad k_{Al} = 2,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1,5}/\text{с}. \quad (16)$$

Здесь  $k_{Al}$  – константа скорости горения частицы алюминия в среде окислителя,  $a$  – коэффициент избытка окислителя.

$$r_{Al,i} = \left[ \left( \frac{\mu_{Al} + 3/2\mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0,i}^3 - \frac{\rho_{3,i}}{(4/3)\pi n_i \rho_{Al}} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3},$$

$$r_{k,i} = \left[ r_{Al,i}^3 + \frac{\mu_{Al} + 3/2\mu_O}{\mu_{Al}} (r_{Al,0,i}^3 - r_{Al,i}^3) \right]^{1/3}. \quad (17)$$

В качестве объекта исследования выбрано СТТ на основе перхлората аммония с массовой долей в составе равной 0,62, связующим бутилкаучуком с массовой долей в смеси 0,12 и порошком алюминия массовой долей 0,18. Значения теплофизических и формально-кинетических параметров, используемых в расчетах:

$$\lambda_2 = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad Q_2 = 2435300 \text{ Дж}/\text{кг}, \quad Q_{AL} = 36,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг},$$

$$c_1 = 1465 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad c_2 = 1466,5 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad c_3 = 760 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$\rho_{Al} = 2600 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad a = 0,5, \quad \eta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad E_1 = 79733 \text{ Дж}/\text{моль},$$

$$E_2 = 188325 \text{ Дж}/\text{моль}, \quad R_y = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad R = 264,36 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$k_0 = 0,98 \cdot 10^{10} \text{ 1/с}, \quad k_{Al} = 2,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1,5}/\text{с}, \quad T_{1,0} = 293 \text{ К}, \quad \mu_{Al} = 0,027 \text{ кг}/\text{моль},$$

$$\mu_O = 0,016 \text{ кг}/\text{моль}, \quad D_2 = Le \cdot \lambda_2 / (c_2 \rho_2), \quad Le - \text{число Льюиса, для газовой фазы}$$

$$Le = 1, \quad \rho_f = 1270 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad \rho_{ox} = 1960 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad A_f = 0,4 \text{ м/с},$$

$$E_f = 50241,6 \text{ Дж}/\text{моль}, \quad Q_f = 5024,16 \text{ кДж}/\text{кг}, \quad H_p = 732,7 \text{ кДж}/\text{кг},$$

$$c_{Al} = 903 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad (Q_{gr} - Q_1) = 1339,78 \text{ кДж}/\text{кг}.$$

Температура воспламенения частиц принималась равной 1300 К [3].

Исследуемыми порошками алюминия выбраны марки АСД-1, АСД-4, АСД-6. Размер частиц в расчетах брался равным среднемассовому размеру для каждой марки порошка алюминия. На основе данных о среднемассовых размерах частиц алюминия этих марок [7–10], средние значения радиусов частиц алюминия соответствующих марок взяты следующие:

$$\text{АСД-1} - r_{\text{Al},0} = 10 \text{ мкм},$$

$$\text{АСД-4} - r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм},$$

$$\text{АСД-6} - r_{\text{Al},0} = 3 \text{ мкм}.$$

Система уравнений решалась численно методом, изложенным в [11].

Результаты расчета зависимости скорости горения от давления при заданном размере частиц алюминия представлены на рис. 1.

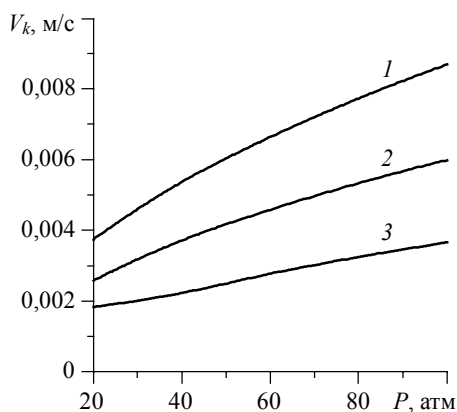


Рис. 1. Зависимость скорости горения металлизированного СТТ от давления: кр. 1 –  $r_{\text{Al},0} = 3$  мкм, кр. 2 –  $r_{\text{Al},0} = 5$  мкм, кр. 3 –  $r_{\text{Al},0} = 10$  мкм

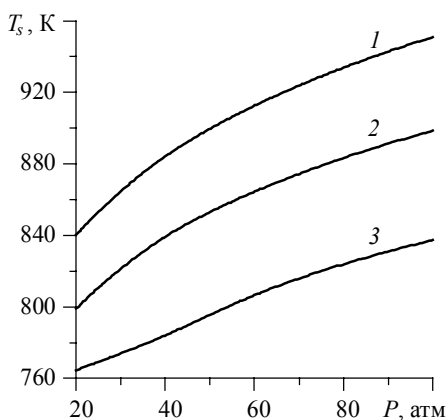


Рис. 2. Зависимость температуры поверхности металлизированного СТТ от давления: кр. 1 –  $r_{\text{Al},0} = 3$  мкм, кр. 2 –  $r_{\text{Al},0} = 5$  мкм, кр. 3 –  $r_{\text{Al},0} = 10$  мкм

Изменение скорости горения с изменением размера частиц обусловлено изменением теплового баланса у поверхности горения. Попадая в газ с нулевой скоростью, частицы подхватываются потоком газа и, за счет сил трения, разгоняются до скорости газа. В газовой фазе идут экзотермические реакции и происходит теплообмен между частицами и газом. Частицы прогреваются до температуры воспламенения, начинают гореть и нагревать газ. Чем меньше размер частицы алюминия, тем ближе к поверхности к-фазы происходит ее воспламенение. Горение частиц алюминия влияет на величину теплового потока к поверхности к-фазы, увеличивая ее температуру и скорость горения (рис. 1 и 2). Распределения температуры, скорости газа и частиц вблизи поверхности к-фазы представлено на рис. 3 и 4.

Для анализа влияния дисперсности порошка алюминия на скорость горения СТТ были выбраны модельные составы смеси порошков алюминия при их суммарной массовой концентрации 0,18. Массовое соотношение фракций – 1:1. Размеры (радиусы) частиц при бидисперсном распределении: 3 мкм – 5 мкм, 5 мкм – 10 мкм, 3 мкм – 10 мкм. Было проведено сравнение расчетных значений линейной скорости горения СТТ с бидисперсными смесями порошков алюминия и монодисперсными порошками. Результаты представлены в таблице и на рис. 5.

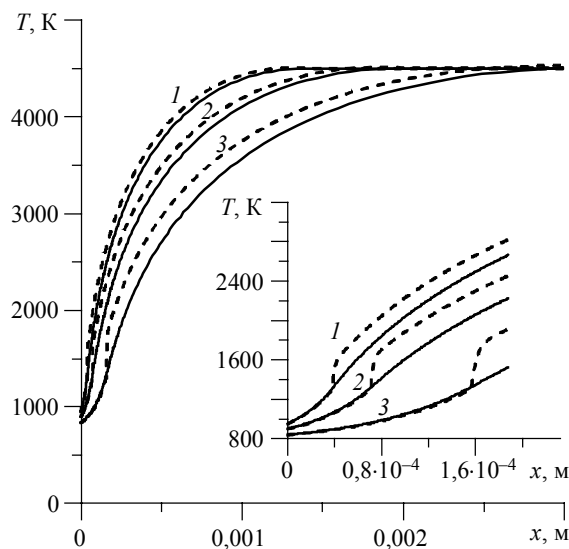


Рис. 3. Распределение температуры газа (сплошные линии) и частиц алюминия (пунктирные): кр. 1 –  $r_{Al,0} = 3$  мкм, кр. 2 –  $r_{Al,0} = 5$  мкм, кр. 3 –  $r_{Al,0} = 10$  мкм

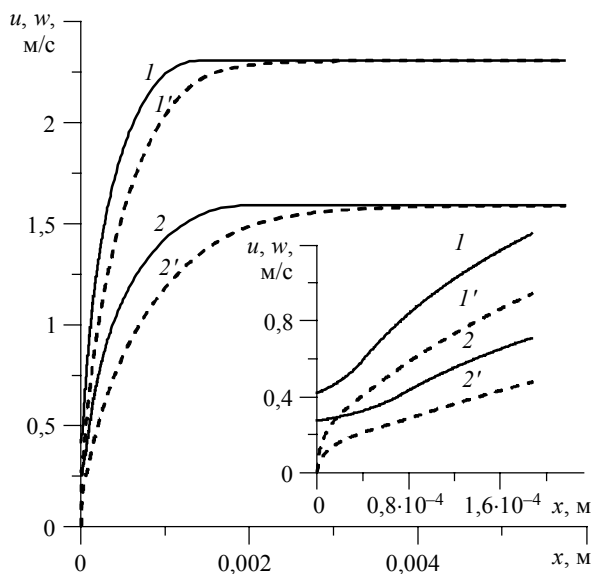


Рис. 4. Распределение скорости газа (сплошные линии) и частиц алюминия (пунктирные): кр. 1 –  $r_{Al,0} = 3$  мкм, кр. 2 –  $r_{Al,0} = 5$  мкм

Распределение температуры над поверхностью СТТ, содержащим монодисперсный и бидисперсный порошок алюминия представлено на рисунке 5. Рассматривая профили температур частиц  $r_{Al,0} = 3$  мкм и  $r_{Al,0} = 10$  мкм в случае моно- и бидисперсного распределения, можно увидеть, что воспламенение мелких час-

тиц в случае бидисперсного распределения происходит дальше от поверхности горения, при этом воспламенения крупных частиц происходит ближе к поверхности горения. В случае бидисперсного порошка алюминия в составе СТТ мелкие частицы воспламеняются первыми, а затем воспламеняются крупные. В случае монодисперсного мелкого порошка алюминия в составе СТТ при их горении в газовой фазе они воспламеняются ближе к поверхности и быстрее нагревают газ, что приводит к формированию большего градиента температуры над поверхностью к-фазы (кривые 1 и 3 на рис. 5).

**Зависимость скорости горения и температуры поверхности  
металлизированного СТТ от дисперсности частиц алюминия**

| Состав                | 1     | 2   |     | 3     | 4     |     | 5     | 6     |     |
|-----------------------|-------|-----|-----|-------|-------|-----|-------|-------|-----|
| $r_{Al,0}$ , мкм      | 3     | 3   | 5   | 5     | 5     | 10  | 10    | 3     | 10  |
| Массовые доли фракций | 0,18  | 0,9 | 0,9 | 0,18  | 0,9   | 0,9 | 0,18  | 0,9   | 0,9 |
| $V_k$ , мм/сек        | 8,7   | 7,4 |     | 6,0   | 4,9   |     | 3,7   | 6,4   |     |
| $T_{sz}$ , К          | 951,1 | 927 |     | 898,6 | 871,5 |     | 837,3 | 907,8 |     |

Состав: 1 – 18 мас.%  $r_{Al,0} = 3$  мкм; 2 – 9 мас.%  $r_{Al,0} = 3$  мкм + 9 мас.%  $r_{Al,0} = 5$  мкм; 3 – 18 мас.%  $r_{Al,0} = 5$  мкм; 4 – 9 мас.%  $r_{Al,0} = 5$  мкм + 9 мас.%  $r_{Al,0} = 10$  мкм; 5 – 18 мас.%  $r_{Al,0} = 10$  мкм; 6 – 9 мас.%  $r_{Al,0} = 3$  мкм + 9 мас.%  $r_{Al,0} = 10$  мкм. Для всех составов массовая доля ПХА – 62 мас.%, связующего – 20 мас.%.

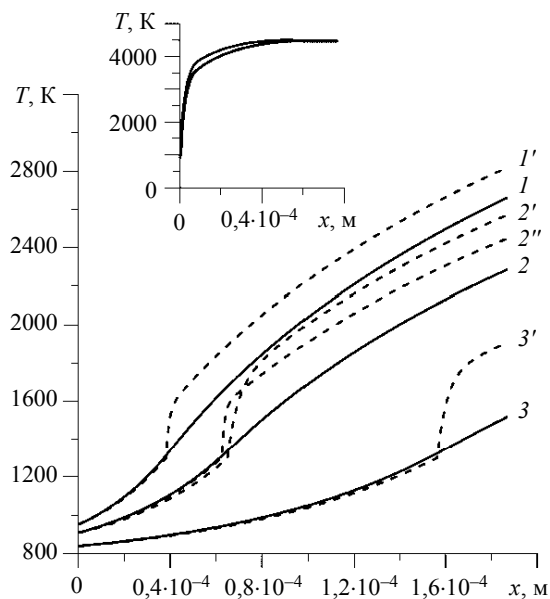


Рис. 5. Распределение температуры газа и частиц алюминия над поверхностью СТТ: 1 – монодисперсный порошок алюминия  $r_{Al,0} = 3$  мкм (кр. 1 – температура газа, кр. 1' – температура частиц), 2 – бидисперсный порошок алюминия  $r_{Al,0} = 3$  мкм и  $r_{Al,0} = 10$  мкм (кр. 2 – температура газа, кр. 2' – температура частиц алюминия  $r_{Al,0} = 3$  мкм, кр. 2'' – температура частиц алюминия  $r_{Al,0} = 10$  мкм), 3 – монодисперсный порошок алюминия  $r_{Al,0} = 10$  мкм (кр. 3 – температура газа, кр. 3' – температура частиц  $r_{Al,0} = 10$  мкм).  $P = 100$  атм

В результате проведенного исследования влияния дисперсности частиц алюминия в составе СТТ на линейную скорость горения показано, что дисперсность частиц алюминия, выходящих в газовую фазу при горении СТТ, оказывает существенное влияние на распределение параметров состояния среды над поверхностью СТТ и на скорость его горения. Для расчета линейной скорости горения металлизированного СТТ важна информация не только о кинетике химических реакций в газовой фазе, но и о дисперсности частиц алюминия, вылетающих с поверхности к-фазы в газ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hernance C.E.* A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation // *AIAA Journal*. 1966. V. 4. No. 9. P. 1629.
2. *Булгаков В.К., Липанов А.М.* Теория эрозийного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001. 122 с.
3. *Беляев А.Ф., Фролов Ю.В., Коротков А.И.* О горении и воспламенении частиц мелкодисперсного алюминия // *Физика горения и взрыва*. 1968. Т. 4. № 3. С. 323–329.
4. *Порязов В.А., Крайнов А.Ю.* Математическое моделирование горения смесевых составов, содержащих мелкодисперсный алюминий // *Изв. вузов. Физика*. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 196–199.
5. *Порязов В.А., Крайнов А.Ю.* Влияние фракционного порошка алюминия в составе пороха Н на скорость его горения // *Труды Томского государственного университета*. Т. 292. Серия физико-математическая: Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики / под ред. М.Ю. Орлова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. С. 39–42.
6. *Справочник по теплообменникам*: в 2 т. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1987. 561 с.
7. *Ягодников Д.А., Гусаченко Е.И.* Экспериментальное исследование дисперсности конденсированных продуктов сгорания аэрозвеси частиц алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2004. Т. 40. № 2. С. 33–40.
8. *Ягодников Д.А.* Воспламенение и горение порошкообразных металлов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 432 с.
9. *Физика и химия горения нанопорошков металлов в азотсодержащих газовых средах* / под ред. А.А. Громова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 332 с.
10. *Архипов В.А., Коротких А.Г.* Особенности зажигания и термического разложения взм на основе нитрата аммония и активного связующего // *Химическая физика и мезоскопия*. 2011. Т. 13. № 2. С. 155–164.
11. *Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А.* Математическое моделирование горения пороха Н с добавлением порошка алюминия // *ИФЖ*. 2015. Т. 88. № 1.

Статья поступила 12.01.2015 г.

#### *Porjazov V.A.* THE INFLUENCE OF ALUMINUM PARTICLE DISPERSION ON THE BURNING RATE OF METALLIZED SOLID PROPELLANTS

The paper presents a physical-mathematical model for combustion of a mixed solid propellant based on ammonium perchlorate with addition of aluminum (Al) particles. The thermal effect of the condensed phase decomposition, convection, diffusion, the gas phase exothermic reaction, Al particles heating up and burning in the gas flow, the combustion products flow, and the particle velocity lag compared with that of gas were taken into consideration. The study also focused on how the size and mass fraction of Al particles leaving the burning surface affect the burning rate. The size effect of Al particles leaving the burning surface on the gas parameters distribution and linear burning rate was studied. It was shown that the Al particle dispersion in the gas phase had a significant influence on the distribution of parameters in the layer above the burning surface and on the burning rate. Thus, to calculate the linear burning rate of a metallized solid propellant, it is

important to know not only the kinetics of chemical reactions in the gas phase, but also the dispersion of metal particles leaving the burning surface of the condensed phase.

Keywords: metallized solid propellant, burning rate, aluminum particle dispersion, gas phase.

PORIAZOV Vasilii Andreevich (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: poryazov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Hermance C.E. A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, no. 9, pp. 1629.
2. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. *Teoriya erozionnogo goreniya tverdykh raketnykh topliv*. Moscow, Nauka Publ., 2001, 122 p. (in Russian)
3. Belyaev A.F., Frolov Yu.V., Korotkov A.I. Combustion and ignition of particles of finely dispersed aluminum. *Fizika goreniya i vzryva*, 1968, vol. 4, no. 3, pp. 323–329
4. Poryazov V.A., Kraynov A.Yu. Matematicheskoe modelirovanie goreniya smesevykh sostavov, sodержashchikh melkodispersnyy alyuminiy. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 9/3, pp. 196–199. (in Russian)
5. Poryazov V.A., Kraynov A.Yu. Vliyanie fraktsionnogo poroshka alyuminiya v sostave porokha N na skorost' ego goreniya. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskaya: Aktual'nye problemy sovremennoy mekhaniki sploshnykh sred i nebesnoy mekhaniki*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 2013, vol. 292, pp. 39–42. (in Russian)
6. Petukhov B.S., Shikov V.K. (eds.). *Spravochnik po teploobmennikam*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987, vol. 1. 561 p. (in Russian)
7. Yagodnikov D.A., Gusachenko E.I. Experimental study of the disperse composition of condensed products of aluminum-particle combustion in air. *Combustion, explosion, and shock waves*, 2004, vol. 40, no. 2, pp. 154–162.
8. Yagodnikov D.A. *Vosplamenenie i gorenie poroshkoobraznykh metallov*. Moscow, MG TU im. N.E. Bauman Publ., 2009, 432 p. (in Russian)
9. Gromov A.A., ed. *Fizika i khimiya goreniya nanoporoshkov metallov v azotsoderzhashchikh gazovykh sredakh*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 2007, 332 p. (in Russian)
10. Arkhipov V.A., Korotkikh A.G. Osobennosti zazhiganiya i termicheskogo razlozheniya vem na osnove nitrata ammoniya i aktivnogo svyazuyushchego. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 155–164. (in Russian)
11. Poryazov V.A., Kraynov A.Yu., Kraynov D.A. Matematicheskoe modelirovanie goreniya porokha N s dobavleniem poroshka alyuminiya. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2015, vol. 88, no. 1. (in Russian)

УДК 517.944

О.Н. Шабловский

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА – АМПЕРА И ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ПЕРЕМЕННОЙ ЭНТРОПИЕЙ

Представлен аналитический алгоритм построения частных решений неоднородного уравнения Монжа – Ампера. Получены в явном виде одиннадцать параметрических решений, содержащих функциональный и/или константный произвол. Дана газодинамическая интерпретация одного из таких решений: задача о распространении ударных волн сжатия и разрежения в термодинамически устойчивой сжимаемой среде, уравнение состояния которой обладает неклассической (знакопеременной) выпуклостью.

**Ключевые слова:** уравнение Монжа – Ампера; термодинамически аномальный газ; ударные волны сжатия и разрежения.

Уравнение Монжа – Ампера и его газодинамические приложения имеют важное значение в математической физике. Современное состояние этой проблемы и библиография представлены в [1–4]. Изучение литературных источников показывает, что конструирование аналитических решений, содержащих функциональный и константный произвол, по-прежнему является актуальной задачей. Данная работа имеет следующие цели: получение новых точных решений неоднородного уравнения Монжа – Ампера; построение примеров нестационарного адиабатического течения газа с нормальными и аномальными термодинамическими свойствами.

## Алгоритм построения параметрических решений

Рассмотрим уравнение Монжа – Ампера

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = W(x_1, x_2), \quad (1)$$

правая часть которого зависит только от переменных  $x_1, x_2$ , а  $Y(x_1, x_2)$  – неизвестная функция. Уравнению (1) дадим следующую форму записи:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} = W, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}, \quad (2)$$

где

$$dY = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2, \quad (3)$$

$$Y_1 = \partial Y / \partial x_1, \quad Y_2 = \partial Y / \partial x_2.$$

Решение системы (2) представим в параметрическом виде ( $\alpha$  – параметр):

$$Y_1 = x_2^2 A_2(\alpha) + x_2 A_1(\alpha) + A_0(\alpha), \quad (4)$$

$$Y_2 = x_2^3 B_3(\alpha) + x_2^2 B_2(\alpha) + x_2 B_1(\alpha) + B_0(\alpha),$$

$$x_1 = \alpha x_2^2 + x_2 C_1 + C_0, \quad C_0, C_1 - \text{const}.$$

Такой способ построения параметра  $\alpha$  применялся в [5] для изучения газодинамических процессов с ударными волнами. Примем, что  $W$  определяется зависимостью

$$x_2^4 W = \sum_{i=0}^6 x_2^i \Pi_i, \quad \Pi_i = \Pi_i(\alpha), \quad (5)$$

где  $\Pi_i(\alpha)$  – аналитические функции. После подстановки (4) в (2) и проведения стандартных вычислений получаем дифференциальные уравнения, связывающие между собой функции  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, B_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 s_0 - \dot{B}_0^2 &= \Pi_0, \quad \dot{A}_0 s_1 + \dot{A}_0 s_1 - 2\dot{B}_0 \dot{B}_1 = \Pi_1, \\ \dot{A}_2 s_0 + \dot{A}_1 s_1 + \dot{A}_0 s_2 - \dot{B}_1^2 - 2\dot{B}_2 \dot{B}_0 &= \Pi_2, \quad \dot{A}_2 s_1 + \dot{A}_1 s_2 + \dot{A}_0 s_3 - 2\dot{B}_3 \dot{B}_0 - 2\dot{B}_2 \dot{B}_1 = \Pi_3, \\ \dot{A}_2 s_2 + \dot{A}_1 s_3 + \dot{A}_0 s_4 - \dot{B}_2^2 - 2\dot{B}_1 \dot{B}_3 &= \Pi_4, \quad \dot{A}_2 s_3 + \dot{A}_1 s_4 - 2\dot{B}_3 \dot{B}_2 = \Pi_5, \quad \dot{A}_2 s_4 - \dot{B}_3^2 = \Pi_6, \\ \dot{B}_0 &= -C_1 \dot{A}_0, \quad \dot{B}_1 = -\dot{A}_1 C_1 - 2\alpha \dot{A}_0, \quad \dot{B}_2 = A_1 - 2\alpha \dot{A}_1 - C_1 \dot{A}_2, \quad \dot{B}_3 = 2(A_2 - \alpha \dot{A}_2), \\ s_0 &= -C_1 \dot{B}_0, \quad s_1 = -2\alpha \dot{B}_0 - C_1 \dot{B}_1, \quad s_2 = B_1 - 2\alpha \dot{B}_1 - C_1 \dot{B}_2, \\ s_3 &= 2(B_2 - \alpha \dot{B}_2) - C_1 \dot{B}_3, \quad s_4 = 3B_3 - 2\alpha \dot{B}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Точка над символом функции есть производная  $d/d\alpha$ .

Сначала рассмотрим основной вариант  $C_1 = 0$ , для которого

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_1 - C_0)/x_2^2, \quad B_0 \equiv \text{const}, \\ s_0 &\equiv 0, \quad s_1 \equiv 0, \quad \Pi_0 \equiv 0, \quad \Pi_1 \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае совокупность уравнений (6) представляет собой систему восьми уравнений, в которые входят шесть функций  $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, B_3$  и пять коэффициентов  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$ . Ясно, что задача будет замкнута, если априорно задать любые три из этих пяти коэффициентов. Таким образом, мы получаем возможность построения частных решений уравнений Монжа – Ампера с нетривиальной правой частью вида (5): подходящий выбор функции  $W$  позволяет проинтегрировать в конечном виде уравнения (6). Полный дифференциал (3) искомой функции  $Y(x_1(\alpha, x_2), x_2)$  подсчитывается по формулам (4).

### Примеры точных решений

Сформулируем основные результаты. При записи правой части уравнения (1) применяем формулу (5) либо даем более компактный вид этого выражения. Функции  $\Pi_i$ , которые отсутствуют в развернутой записи  $W$ , являются тождественно нулевыми.

Решение I.

$$\begin{aligned} W &= -g_0(\alpha) - x_2 g_1(\alpha) - x_2^2 g_2(\alpha), \\ g_1 &= 4A_1 A_2 - 2\dot{A}_2 (B_2 + \alpha A_1), \quad g_2 = 4A_2 (A_2 - \alpha \dot{A}_2) - 3\dot{A}_2 B_3, \\ \dot{A}_2 &= (A_1^2 - g_0)/B_1, \quad B_2 = \alpha A_1 + b_2, \quad \dot{B}_3 = 2(A_2 - \alpha \dot{A}_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $A_0, A_1, B_0, B_1, b_2$  – произвольные постоянные;  $g_0(\alpha)$  – произвольная функ-

ция. Например, если  $g_0 \equiv \text{const}$ , то  $W(x_1, x_2)$  является полиномом второй степени по отношению к аргументу  $x_2$  и линейно зависит от  $x_1$ .

Решение II.

$$W = -h_0(\alpha) - x_2^{-1}h_1(\alpha), \quad (9)$$

$$h_0 = A_1^2 + 2\alpha A_1 \dot{A}_1 - 6J\dot{A}_1, \quad h_1 = -\dot{A}_1 B_1, \quad A_1 = \dot{J}(\alpha),$$

$$A_2 \equiv 0, \quad B_3 \equiv 0, \quad B_2 \equiv 3J - 2\alpha A_1.$$

Здесь  $A_0, B_0, B_1$  – произвольные постоянные;  $J(\alpha)$  – произвольная функция. Например, если  $A_1 = a_1 \alpha^{n_1}$ , то

$$W = a_1^2(1 - n_1)(2n_1 - 1)(1 + n_1)^{-1} \alpha^{2n_1} + a_1 n_1 B_1 x_2^{-1} \alpha^{n_1 - 1}, \quad (10)$$

$$a_1, n_1 - \text{const}, \quad 1 + n_1 \neq 0.$$

Решение III.

$$W = -h_0(\alpha) - x_2^{-1}h_1(\alpha) - x_2^{-2}h_2(\alpha), \quad (11)$$

$$h_0 = b_2^2 - 2a_2(J - \alpha \dot{J} + 2\alpha^2 \ddot{J}), \quad h_1 = 2\dot{A}_1(\alpha \dot{J} - 2\alpha^2 \ddot{J} - J) - 4b_2 \alpha \ddot{J},$$

$$h_2 = 2\ddot{J}(\alpha \dot{J} - J), \quad A_0 = \dot{J}(\alpha), \quad A_1 = b_2 + a_1 \alpha^{1/2}, \quad A_2 = a_2 \alpha,$$

$$B_1 = 2(J - \alpha \dot{J}), \quad B_2 = b_2 \alpha, \quad B_3 \equiv 0.$$

Здесь  $B_0, a_1, a_2, b_2$  – произвольные постоянные;  $J(\alpha)$  – произвольная функция. Отметим, что, несмотря на сходство записи, формула (9) не является следствием (11); решения II и III обладают разной структурой.

Решение IV. Для функции  $W$  имеем выражения (5), (7), причем

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = -2b_2 \dot{B}_1,$$

$$\Pi_4 = \frac{3}{4} B_1 b_3 \alpha^{-1/2} - b_2^2 - \frac{9}{2} \dot{B}_1 b_3 \alpha^{1/2},$$

$$\Pi_5 = -3b_2 b_3 \alpha^{1/2}, \quad \Pi_6 = -\frac{9}{4} b_3^2 \alpha,$$

где  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция. Итоговая запись решения выглядит так:

$$2\alpha \dot{A}_0 = -\dot{B}_1, \quad A_1 = b_2, \quad A_2 = 3b_3 \alpha^{1/2} / 2,$$

$$B_2 = b_2 \alpha, \quad B_3 = b_3 \alpha^{3/2},$$

где  $b_2, b_3$  – произвольные постоянные.

В рамках решения IV отметим три частных примера.

IV-1. Если  $b_3 = 0$ , то

$$W = (\Pi_2 / x_2^2) + (\Pi_3 / x_2) + \Pi_4,$$

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = -2\dot{B}_1 b_2, \quad \Pi_4 = -b_2^2,$$

где  $b_2$  – произвольная постоянная,  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция.

IV-2. Если  $b_2 = 0$ ,  $\Pi_4 \equiv 0$ , то

$$B_1 = b_1 \alpha^{1/6}, \quad \Pi_2 = -b_1^2 / (12\alpha^{5/3}), \quad W = (\Pi_2 / x_2^2) - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0),$$

где  $b_1, b_3$  – произвольные постоянные.

IV-3. Если  $B_1 \equiv \text{const}$ , то

$$W = \frac{3}{4} B_1 b_3 \alpha^{-1/2} - b_2^2 - 3b_2 b_3 (x_1 - C_0)^{1/2} - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0),$$

где  $B_1, b_2, b_3$  – произвольные постоянные.

Решение V. Функция  $W$  определяется выражением (5), (7), где

$$\Pi_2 = -\frac{b_1^2}{4\alpha}, \quad \Pi_3 = -\frac{b_1}{2} (B_2 \alpha^{-3/2} + \dot{B}_2 \alpha^{-1/2}),$$

$$\Pi_4 = 2\dot{A}_1 (B_2 - \alpha \dot{B}_2) - \dot{B}_2^2 - \frac{3}{2} b_1 b_3, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2} b_3 (B_2 \alpha^{-1/2} - 3\dot{B}_2 \alpha^{1/2}), \quad \Pi_6 = -\frac{9}{4} b_3^2 \alpha.$$

Здесь  $B_2(\alpha)$  – произвольная функция. Итоговая запись решения имеет вид

$$A_0 = a_0 + [b_1 / (2\alpha^{1/2})], \quad A_1 = -\frac{\alpha^{1/2}}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_2(\alpha)}{\alpha^{3/2}} d\alpha, \quad A_2 = \frac{3}{2} b_3 \alpha^{1/2},$$

$$B_1 = b_1 \alpha^{1/2}, \quad B_3 = b_3 \alpha^{3/2},$$

где  $a_0, b_1, b_3, \alpha_0$  – произвольные постоянные.

В рамках решения V отметим два частных примера.

V-1. Если  $b_1 = 0$ ,  $b_3 = 0$ , то  $W = 2\dot{A}_1 B_2 - A_1 \dot{B}_2$ , где  $B_2(\alpha)$  – произвольная функция; формула для  $A_1(\alpha)$  дана в записи решения V.

V-2. Если  $B_2 \equiv \text{const}$ ,  $A_1 \equiv 0$ , то  $W$  содержит три произвольные постоянные  $b_1, B_2, b_3$ :

$$W = \frac{3B_2 b_3 x_2^2}{2(x_1 - C_0)^{1/2}} - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0) - \frac{b_1^2}{4(x_1 - C_0)} - \frac{b_1 B_2 x_2^2}{2(x_1 - C_0)^{3/2}} - \frac{3}{2} b_1 b_3.$$

Решение VI. Функция  $W$  (см. (5), (7)) содержит следующие выражения:

$$\Pi_2 = -\frac{b_1^2}{4\alpha}, \quad \Pi_3 = -b_1 b_2 \alpha^{-1/2},$$

$$\Pi_4 = \frac{b_1}{4} (2\alpha \dot{B}_3 - 3B_3) \alpha^{-3/2} - b_2^2 - b_1 \dot{B}_3 \alpha^{-1/2}, \quad \Pi_5 = -2b_2 \dot{B}_3,$$

$$\Pi_6 = \left( \alpha \dot{B}_3 - \frac{3}{2} B_3 \right) \left( \frac{\dot{B}_3}{\alpha} + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_3}{\alpha^2} d\alpha \right) - \dot{B}_3^2,$$

где  $B_3(\alpha)$  – произвольная функция. Решение определяется формулами

$$A_0 = a_0 + [b_1 / (2\alpha^{1/2})], \quad A_1 = b_2 \equiv \text{const},$$

$$A_2 = -\frac{\alpha}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_3(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha, \quad B_1 = b_1 \alpha^{1/2}, \quad B_2 = b_2 \alpha,$$

где  $a_0, b_1, b_2, \alpha_0$  – произвольные постоянные.

В рамках решения VI отметим два примера.

VI-1. Если  $b_1 = 0, b_2 = 0$ , то  $W = x_2^2 \Pi_6(\alpha)$ , и это выражение зависит от выбора произвольной функции  $B_3(\alpha)$ .

VI-2. Если  $B_3 \equiv \text{const}$ , то

$$W = \frac{\Pi_2}{x_2^2} + \frac{\Pi_3}{x_2} + \Pi_4,$$

и эта функция содержит три свободных постоянных  $b_1, b_2, B_3$ .

Решение VII. Функция  $W$  (см. (5), (7)) подсчитывается с помощью формул

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = \frac{a_1}{2} \alpha^{-1/2} (B_1 - 2\alpha \dot{B}_1) + 2\dot{A}_0 B_2,$$

$$\Pi_4 = a_2 (B_1 - 2\alpha \dot{B}_1) + a_1 B_2 \alpha^{-1/2} + 3B_3 \dot{A}_0, \quad \Pi_5 = 2a_2 B_2 + \frac{3a_1}{2} \alpha^{-1/2} B_3, \quad \Pi_6 = 3a_2 B_3,$$

где  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция;  $B_2, B_3$  – произвольные постоянные.

Решение имеет вид

$$\dot{A}_0 = -\dot{B}_1 / (2\alpha), \quad A_1 = a_1 \alpha^{1/2}, \quad A_2 = a_2 \alpha, \quad a_1, a_2 \text{ – произвольные постоянные.}$$

Решение VIII. Правая часть  $W$  уравнения Монжа – Ампера содержит следующие выражения:

$$\Pi_2 = b_1^2 / 2, \quad \Pi_3 = -2b_1 b_2, \quad \Pi_4 = -b_2^2 - (3b_1 b_3 / 2),$$

$$\Pi_5 = -2b_2 b_3, \quad \Pi_6 = -b_3^2,$$

где  $b_1, b_2, b_3$  – произвольные постоянные. Итоговая запись решения выглядит так:

$$A_0 = (-b_1 / 2) \ln \alpha, \quad A_1 = b_2, \quad A_2 = b_3 / 2,$$

$$B_1 = \alpha b_1, \quad B_2 = \alpha b_2, \quad B_3 = \alpha b_3.$$

Решение IX. Укажем здесь три частных решения, для которых отдельные функции  $\Pi_i(\alpha)$  – степенные (см. (5) и (7)).

$$\text{IX-1.} \quad \Pi_2 \equiv 0, \quad \Pi_3 = a_1 B_1, \quad \Pi_4 = r_4 \alpha^{n_4}, \quad \Pi_5 = a_1 r_4 r_5 \alpha^{2+n_4} / B_1,$$

$$\Pi_6 = r_6 \alpha^{2+2n_4} (r_4 / B_1)^2, \quad A_0 \equiv \text{const}, \quad A_1 = \alpha a_1,$$

$$r_5 = (n_4 - 2)(n_4 - 1) / [(1 + n_4)(2 + n_4)], \quad B_1 \equiv \text{const}, \quad B_2 = -a_1 \alpha^2 / 2,$$

$$r_6 = 2n_4(1 - n_4) / [(1 + n_4)^2(2 + n_4)], \quad (1 + n_4)(2 + n_4) \neq 0; \quad B_1 \neq 0,$$

$$A_2 = \frac{r_4 \alpha^{1+n_4}}{B_1(1 + n_4)}, \quad B_3 = \frac{-2n_4 r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1(1 + n_4)(2 + n_4)},$$

где  $A_0, B_1, n_4, a_1, r_4$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
 \text{IX-2.} \quad & \Pi_2 \equiv 0, \Pi_3 \equiv 0, \Pi_4 \equiv 0, \Pi_5 = a_1 a_2 r_5 \alpha^{1+n_2}, \Pi_6 = a_2^2 r_6 \alpha^{2n_2}; \\
 & r_5 = (n_2 - 2)(n_2 - 3)/(1 + n_2), \quad r_6 = 2(1 - n_2)(n_2 - 2)/(1 + n_2); \\
 & A_0 \equiv \text{const}, B_1 \equiv 0, \quad A_2 = a_2 \alpha^{n_2}, \quad A_1 = \alpha a_1, \quad B_2 = -a_1 \alpha^2 / 2, \\
 & B_3 = \frac{2(1 - n_2)}{(1 + n_2)} a_2 \alpha^{1+n_2}, \quad 1 + n_2 \neq 0.
 \end{aligned}$$

где  $A_0, a_1, a_2, n_2$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
 \text{IX-3.} \quad & \Pi_2 \equiv 0, \Pi_3 \equiv 0, \Pi_4 \equiv r_4 \alpha^{n_4}, \Pi_5 = \frac{4A_1 n_4 r_4}{B_1 (1 + n_4)} \alpha^{1+n_4}, \\
 & \Pi_6 = \frac{2A_1^2 n_4 (1 + 2n_4) r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1 (1 + n_4)(2 + n_4)} + \frac{2n_4 (1 - n_4) r_4^2 \alpha^{2+2n_4}}{B_1^2 (2 + n_4)(1 + n_4)^2}; \\
 & A_0 \equiv \text{const}, A_1 \equiv \text{const}, \quad A_2 = \frac{\alpha A_1^2}{B_1} + \frac{r_4 \alpha^{1+n_4}}{B_1 (1 + n_4)}, \\
 & B_1 \equiv \text{const}, B_2 = \alpha A_1, B_3 = \frac{-2n_4 r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1 (1 + n_4)(2 + n_4)}, \quad (1 + n_4)(2 + n_4) \neq 0, B_1 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Здесь  $A_0, A_1, B_1, n_4, r_4$  – произвольные постоянные.

Напомним, что решения I – IX получены для  $C_1 = 0$  с учетом формул (7).

Укажем далее два решения, для которых допускается  $C_1 \neq 0$ .

Решение X.

$$\begin{aligned}
 W &= \Pi_4 + (\Pi_5 / x_2) + (\Pi_6 / x_2^2), \\
 \Pi_4 &= \dot{A}_2 (B_1 - C_1 \dot{B}_2) - \dot{B}_2^2, \quad \Pi_5 = \dot{A}_2 (2B_2 - 2\alpha \dot{B}_2 - C_1 \dot{B}_3), \quad \Pi_6 = \dot{A}_2 (3B_3 - 2\alpha \dot{B}_3) - \dot{B}_3^2, \\
 A_0 &\equiv \text{const}, A_1 \equiv \text{const}, \quad A_2 = -\frac{\alpha}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \alpha^{-2} \dot{B}_3(\alpha) d\alpha, \\
 B_0 &\equiv \text{const}, B_1 \equiv \text{const}, \quad B_2 = b_2 + \alpha A_1 - C_1 A_2.
 \end{aligned}$$

Здесь  $B_3(\alpha)$  – произвольная функция;  $A_0, B_0, A_1, B_1, C_0, C_1, b_2$  – произвольные постоянные.

Решение XI. Функция  $W$  определяется выражением (5), в котором  $\Pi_i = \alpha^i r_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ ;

$$\begin{aligned}
 r_0 &= -b_0 (a_0 C_1 + b_0), \quad r_1 = -2[a_1 C_1 b_0 + a_0 (b_0 + b_1 C_1) + 2b_0 b_1], \\
 r_2 &= -3[a_2 C_1 b_0 + a_0 (b_1 + C_1 b_2) + 2b_0 b_2] - 4[a_1 (b_0 + b_1 C_1) + b_1^2], \\
 r_3 &= -6[a_2 (b_0 + b_1 C_1) + a_1 (b_1 + C_1 b_2) + 2b_1 b_2] - 4[a_0 (b_2 + C_1 b_3) + 2b_0 b_3], \\
 r_4 &= -9[a_2 (b_1 + C_1 b_2) + b_2^2] - 8[a_1 (b_2 + C_1 b_3) + 2b_1 b_3] - 5a_0 b_3, \\
 r_5 &= -12(b_2 + C_1 b_3 + 2b_2 b_3) - 10a_1 b_3, \quad r_6 = -b_3 (15a_2 + 16b_3).
 \end{aligned}$$

Здесь все  $r_i$  постоянны. Решение определяется формулами

$$A_0 = \alpha a_0, A_1 = \alpha^2 a_1, A_2 = \alpha^3 a_2, B_0 = \alpha b_0, B_1 = \alpha^2 b_1, B_2 = \alpha^3 b_2, B_3 = \alpha^4 b_3, \\ b_0 = -a_0 C_1, b_1 = -a_0 - a_1 C_1, b_2 = -a_1 - a_2 C_1, b_3 = -a_2,$$

где  $C_0, C_1, a_0, a_1, a_2$  – произвольные постоянные.

Далее мы рассмотрим пример газодинамического истолкования решения II.

### Течения газа с переменной энтропией

Уравнения адиабатического движения идеального газа с переменной энтропией можно преобразовать к уравнению Монжа – Ампера для функции  $\xi = \xi(p, \psi)$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi^2} - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial \psi} \right)^2 = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (12)$$

$$t = \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad V = V(p, S), \quad S = S(\psi), \quad V = 1/\rho, \quad d\psi = \rho dx - \rho u dt.$$

История этого вопроса и библиография даны в [1, 2]. Здесь приняты обозначения:  $x$  – декартова координата;  $t$  – время;  $\psi$  – лагранжева координата (функция частицы);  $u$  – скорость газа;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $V$  – удельный объем;  $S$  – энтропия единицы массы газа. Далее нам потребуются следующие известные термодинамические соотношения [6]. Уравнения состояния газа  $p = p(V, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(V, T)$ ,  $S = S(V, T)$  должны удовлетворять второму началу термодинамики:

$$TdS = d\varepsilon + pdV,$$

а это значит, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p}{T} \right), \quad c_V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad (13)$$

где  $T$  – температура;  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия;  $c_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Если за независимые параметры приняты  $p$  и  $V$ , то функции  $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ ,  $S = S(p, V)$ ,  $T = T(p, V)$  подчинены связям

$$\frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial p} = 1, \quad T \frac{\partial S}{\partial V} = p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}, \quad T \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}. \quad (14)$$

Условие устойчивости термодинамического равновесия имеет вид  $\partial p(V, S) / \partial V < 0$  или, что то же самое,  $\partial V(p, S) / \partial p < 0$ . Классическая газовая динамика изучает сжимаемые среды, удовлетворяющие свойствам нормального газа [1], [7]. В частности, для нормального газа выполнено условие выпуклости  $\partial^2 p(V, S) / \partial V^2 > 0$ . Термодинамически аномальная сжимаемая среда удовлетворяет условию вогнутости  $\partial^2 p(V, S) / \partial V^2 < 0$ , и в ней возможно существование ударных волн разрежения [8–10]. Сжатие поршнем такой среды инициирует расширяющуюся волну, которая является аналогом волны разрежения в обычном газе.

### Расширение аномального газа

Сопоставим друг с другом уравнения (1) и (12) и выполним в (3) – (5) переобозначения:

$$x_1 \rightarrow p, x_2 \rightarrow \psi, Y \rightarrow \xi, Y_1 \rightarrow t, Y_2 \rightarrow u, W \rightarrow \partial V / \partial p.$$

Обсудим газодинамическую интерпретацию решения II для случая (10) при  $B_0 = 0, B_1 = 0$ :

$$\partial V / \partial p = -(a_1^2 k_1 / \psi^{4n})(1+2n)(p-p_0)^{2n}, \quad n > 1, \quad (15)$$

$$k_1 = (n-1)(2n-1)/[(n+1)(2n+1)].$$

Движение газа определяется формулами

$$u = a_1 \frac{(1-2n)}{(1+n)} \psi^{(n-1)/n} \left( \frac{t+t_0}{a_1} \right)^{(n+1)/n}; \quad (16)$$

$$p - p_0 = \left[ \frac{(t+t_0)\psi^{2n-1}}{a_1} \right]^{1/n}. \quad (17)$$

В этих выражениях (см. (4), (9), (10)) приняты обозначения:  $C_0 = p_0 > 0$ ,  $-A_0 = t_0 > 0$ ;  $p_0, t_0, a_1$  – свободные параметры задачи. Интегрируя (15), получаем уравнение состояния термодинамически устойчивой сжимаемой среды (газа):

$$k_2 S = V / [p_1^{1+2n} - (p-p_0)^{1+2n}], \quad p_1 > 0, k_2 > 0. \quad (18)$$

$$p_1, k_2 - \text{const.}$$

Здесь параметр  $k_2$  характеризует зависимость температуры от давления (см. ниже формулу (20)). Распределение энтропии по частицам газа имеет вид

$$k_2 S = a_1^2 k_1 / \psi^{4n}. \quad (19)$$

Ясно, что  $\partial^2 V(p, S) / \partial p^2 = 0$  при  $p = p_0$ . Для каждого фиксированного  $\psi$  имеем положительную выпуклость (нормальный газ) при  $0 < p < p_0$ ; имеем отрицательную выпуклость (аномальный газ) при  $p_0 < p < \infty$  (рис. 1).

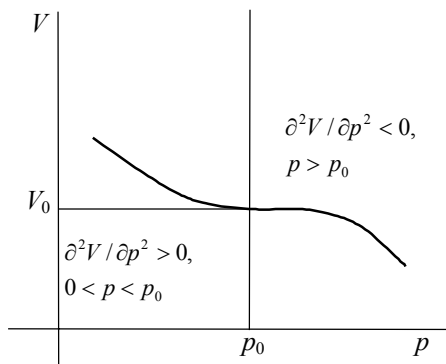


Рис. 1. Знакопеременная выпуклость уравнения состояния (18)  $V = V(p, S)$

На основе формул (13), (14) находим выражения для температуры, внутренней энергии и удельной теплоемкости:

$$(T - T_0) / k_2 = pp_1^{1+2n} - [(p - p_0)^{2+2n} / (2 + 2n)]; \quad (20)$$

$$\varepsilon = V \{ [T / (\pi_1 k_2)] - p \}, \quad \pi_1 \equiv \pi_1(p) = p_1^{1+2n} - (p - p_0)^{1+2n},$$

$$c_V = (1 + 2n)(p - p_0)^{2n} VT / (k_2^2 \pi_1^3). \quad (21)$$

Неравенства  $\pi_1 > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  обеспечиваются подходящим выбором констант  $T_0$ ,  $p_1$ . Здесь мы рассматриваем малую, но конечную окрестность термодинамической точки  $(p_0, V_0, T_0)$ . Внутри этой окрестности  $\partial T / \partial V \equiv 0$  (см. (20)). Функции (18), (20), (21), определяющие термодинамические свойства газа, зависят от выбора параметров  $n$ ,  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $T_0$ ,  $k_2$ . Из (18) следует, что

$$V_0 = k_2 S_0 p_1^{1+2n}, \quad S_0 = S(\psi = \psi_0), \quad (22)$$

где  $\psi_0$  – фиксированное значение лагранжевой координаты.

Изучаемая задача состоит в следующем. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) аномальный газ находится между двумя непроницаемыми поршнями:  $\psi \in [\psi_l, \psi_r]$ , где  $0 < \psi_l < \psi_r < \infty$ ;  $\psi_l, \psi_r - \text{const}$ . Поршни движутся в разные стороны, т.е. происходит расширение аномального газа, сопровождающееся движением ударной волны разрежения (УВР)  $\psi_j = \psi_j(t)$  (рис. 2, а). При  $t = 0$  фронт УВР находится на правом поршне:  $\psi_j(t = 0) = \psi_r$ , а при  $t > 0$  этот сильный разрыв перемещается влево. Данный процесс длится до тех пор, пока фронт УВР не догонит левый поршень:  $\psi_j(t = t_1) = \psi_l$ ,  $0 \leq t \leq t_1 < \infty$ . Таким образом, перед фронтом УВР уравнение состояния (18) имеет отрицательную выпуклость (аномальный газ,  $p - p_0 > 0$ ), а за фронтом – положительную выпуклость (нормальный газ,  $p - p_0 < 0$ ). Форма записи термодинамических выражений (19) – (21) одинаковая по обе стороны сильного разрыва. Различие в содержании этих формул, т.е. и различие между точками вида  $(p_0, V_0, T_0)$  по обе стороны скачка, обусловлено тем, что параметры  $k_2$  и  $T_0$  меняются при переходе через разрыв, но при этом их отношение  $T_0/k_2$  остается непрерывным (см. ниже формулу (31)). Далее рассматриваем ситуацию, когда ударный переход «аномальный газ – нормальный газ» сопровождается выделением импульса и энергии в окрестности линии сильного разрыва  $x = x_j(t) \equiv x(\psi_j, t)$ . Подвод импульса и энергии происходит с правой стороны разрыва.

Динамические условия совместности при  $x = x_j(t)$  имеют вид [1, 6]

$$\rho_j(u_j - N) = \rho_*(u_* - N) = m'; \quad (23)$$

$$p_j + \rho_j(u_j - N)^2 = p_* + \rho_*(u_* - N)^2 + p'; \quad (24)$$

$$\varepsilon_j + p_j V_j + \frac{1}{2}(u_j - N)^2 = \varepsilon_* + p_* V_* + \frac{1}{2}(u_* - N)^2 + \frac{1}{m'}(W' + Np'). \quad (25)$$

Кроме того, на разрыве должен быть выполнен закон возрастания энтропии:

$$S_j > S_*. \quad (26)$$

Здесь индексы \* и  $j$  отмечают значения функций перед и за фронтом ударной волны;  $N = dx_j / dt$  – скорость перемещения сильного разрыва;  $m'$ , кг/(м<sup>2</sup>·с) – поток массы газа через разрыв;  $p'$ , Н/м<sup>2</sup> и  $W'$ , Дж/(м<sup>2</sup>·с) – плотности распределения на разрыве внешних для среды сил и притока энергии. Таким образом, величина  $u' = p' / m'$ , м/с, есть скорость, которая характеризует воздействие давления  $p'$  на скачке;  $\varepsilon' = W' / m'$ , Дж/кг, определяет подвод энергии, рассчитанный на единицу массы. Нетрудно видеть, что

$$m' = -\frac{d\psi_j}{dt}, p_j - p_* = (u_j - u_*) \frac{d\psi_j}{dt} + p'.$$

Движение газа между левым поршнем и УВР определяется формулами (16), (17),  $\psi \in [\psi_l, \psi_j]$ ; в этой области  $u < 0$ ,  $p - p_0 > 0$ . Справа от разрыва, т.е. при  $\psi \in (\psi_j, \psi_r]$  движение газа представляется в виде

$$u = a_1 \frac{(2n-1)}{n+1} \psi^{(n-1)/n} \left( \frac{t+t_0}{a_1} \right)^{(n+1)/n}; \quad (27)$$

$$p - p_0 = - \left[ \frac{(t+t_0) \psi^{2n-1}}{a_1} \right]^{1/n}; \quad (28)$$

в этой области  $u > 0$ ,  $p - p_0 < 0$ . Скорость перемещения УВР отрицательная:  $N < 0$ . Удовлетворяя условиям (23) – (25), получаем следующие зависимости:

$$u_j = -u_*, p_j - p_0 = p_0 - p_*,$$

$$(p_j - p_0)^{1+2n} = H_1 u_j, (p_* - p_0)^{1+2n} = H_1 u_*, p_1^{1+2n} = N_1 h_1,$$

$$H_1 = h_1 (t - t_0)^{-b_1}, N = N_1 (t + t_0)^{b_1}, h_1, N_1 - \text{const}; b_1 = n(1+8n)/(n-1);$$

$$\psi_j(t) = \psi_j^1(t+t_0)^{(1+2n)/(1-n)}, \psi_j^1 = \left[ \frac{1-n}{(1+2n)a_1^2 k_1 h_1} \right]^{1/(1-4n)}, n > 1, h_1 < 0, N_1 < 0.$$

После аналитических преобразований находим

$$u_j = \frac{(2n-1)}{(n+1)a_1^{1/n}} (\psi_j^1)^{(n-1)/n} (t+t_0)^{-1}; \quad (29)$$

$$p_j - p_0 = -(\psi_j^1)^{(2n-1)/n} (t+t_0)^{b_2} a_1^{-1/n}, b_2 = (4n-1)/(1-n). \quad (30)$$

Чтобы обеспечить баланс энергии (25), необходимо принять соотношение

$$(T_0 / k_2)_* = (T_0 / k_2)_j. \quad (31)$$

Функции источников импульса и энергии содержат свободный параметр  $h_1$  и имеют вид

$$p' = \frac{6n^2}{(n^2-1)a_1^{1/n}} (\psi_j^1)^{(2n-1)/n} (t+t_0)^{b_2}; \quad (32)$$

$$\varepsilon' + u' N = a_1^2 k_1 p_1^{1+2n} p' / \psi_j^{4n}. \quad (33)$$

Зависимость источников от модуля скорости перемещения УВР – степенная:

$$p' \sim |N|^{(1-4n)/[n(1+8n)]}, \quad (\varepsilon' + u' N) \sim |N|^{(1+8n^2)/(n-1)}.$$

Параметры  $a_1, n_1, k_1, p_0, p_1$  одни и те же по обе стороны разрыва, поэтому  $(k_2 S)^* = (k_2 S)_j$  (см. (19)). В формуле (22) нужно взять  $\psi_0 = \psi_j(t=0)$ , и тогда

$V_{0*} = V_{0j} = V_0$ . Условие (26) возрастания энтропии дает неравенство

$$k_2^{\text{anomal}} > k_2^{\text{normal}}. \quad (34)$$

Следовательно, согласно (31), термодинамические точки  $(p_0, V_0, T_0)^*$  и  $(p_0, V_0, T_0)_j$  различаются только значениями  $T_0$ , а именно:

$$T_0^{\text{anomal}} > T_0^{\text{normal}}. \quad (35)$$

Напомним, что параметры  $(p_0, V_0, T_0)^*$  и  $(p_0, V_0, T_0)_j$  служат основой построения формул (18), (20), (21), но при этом их числовые значения не принадлежат ни «аномальной» ни «нормальной» областям течения. Согласно (16), зависимость скорости левого поршня от времени имеет вид

$$u_l = u(\psi = \psi_l, t) \sim (t + t_0)^{(n+1)/n}.$$

Вместе с тем  $N \sim (t + t_0)^{b_1}$ , причем  $\psi_j(t=0) = \psi_r > \psi_l$  (см. постановку задачи).

Ясно, что в  $b_1 > [(n+1)/n]$ , поэтому существует конечный момент времени  $t_1 > 0$ , когда фронт УВР догонит левый поршень:  $\psi_j(t=t_1) = \psi_l$ . Именно это значение  $t = t_1$  представляет собой длительность процесса расширения аномального газа.

### Сжатие нормального газа

В начальный момент времени ( $t=0$ ) нормальный газ находится между двумя поршнями,  $\psi \in [\psi_l, \psi_r]$ , где  $0 < \psi_l < \psi_r < \infty$ . Поршни движутся навстречу друг другу, и в потоке газа распространяется ударная волна сжатия (УВС)  $\psi_j = \psi_l(t)$ , рис. 2, б.

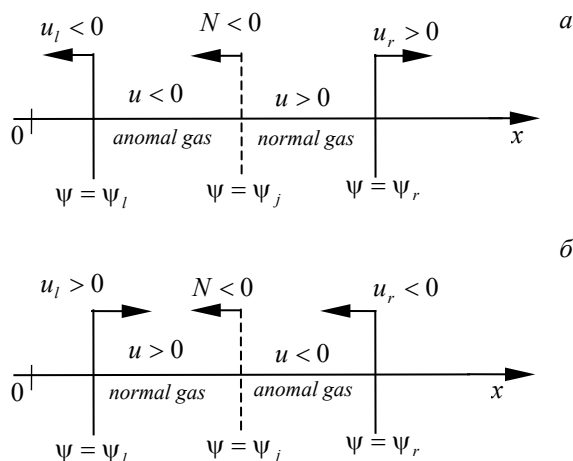


Рис. 2 Течение газа между двумя подвижными поршнями:  
а – расширение аномального газа; б – сжатие нормального газа

Физический смысл всех предыдущих обозначений сохраняется. При  $t = 0$  фронт УВС находится на правом поршне:  $\psi_j(t = 0) = \psi_r$ , а при  $t > 0$  этот сильный разрыв перемещается влево,  $N < 0$ . Этот процесс длится до момента встречи левого поршня с УВС:  $\psi_j(t = t_1) = \psi_l$ . Перед фронтом УВС уравнение состояния (18) имеет положительную выпуклость (нормальный газ,  $p - p_0 < 0$ ,  $u > 0$ ); за скачком выпуклость отрицательная (аномальный газ,  $p - p_0 > 0$ ,  $u < 0$ ). Данный ударный переход сопровождается поглощением импульса и энергии в правой окрестности сильного разрыва. Форма записи динамических условий совместности (23) – (25) полностью сохраняется. Движение нормального газа между левым поршнем и УВС определяется формулами (27), (28). В предыдущей задаче эти формулы относились к области газа, расположенной справа от разрыва. Движение аномального газа справа от разрыва описывается формулами (16), (17). Таким образом, по сравнению с предыдущей задачей, нормальная и аномальная области поменялись местами (рис. 2). Алгоритм расчета газодинамических параметров на фронте разрыва остается прежним, но итоговые формулы отличаются знаками. А именно: в левых частях выражений (29), (30), (32) надо сделать замену  $u_j \rightarrow (-u_j)$ ,  $(p_j - p_0) \rightarrow (p_0 - p_j)$ ,  $p' \rightarrow (-p')$ . Из (33) ясно, что при этом изменится на противоположный знак функции источника энергии  $\epsilon' + u' N$ . Условие (26) возрастания энтропии приводит к неравенствам

$$k_2^{\text{normal}} > k_2^{\text{anomal}}, \quad T_0^{\text{normal}} > T_0^{\text{anomal}}. \quad (36)$$

Сопоставляя друг с другом задачу о расширении аномального газа и задачу о сжатии нормального газа, можем заключить, что для них форма записи термодинамических выражений (18), (20), (21) одинаковая. Различия сосредоточены в содержательной части этих формул и обусловлены отличием (34), (35) от (36). Следовательно, термодинамическая устойчивость двух процессов: процесса расширения, содержащего УВР, и процесса сжатия, содержащего УВС, имеет место для двух сжимаемых сред с различающимися термическими уравнениями состояния вида  $T = T(p)$  (рис. 3). А именно: в задачах о движении УВР и УВС зависимость (20) должна обладать свойствами (34), (35) либо (36) соответственно.

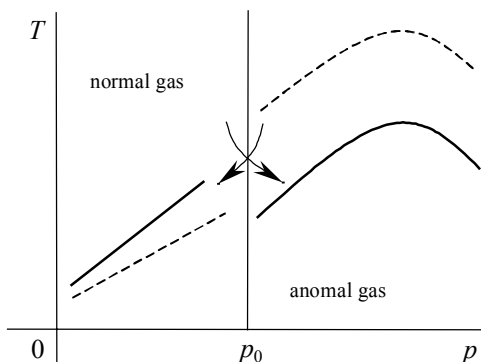


Рис. 3. Качественные свойства зависимости (20)  $T = T(p)$  в нормальной и аномальной областях: пунктирные линии – для задачи о расширении аномального газа; сплошные линии – для задачи о сжатии нормального газа. Дуговые стрелки указывают направления процессов

# Заключение

Для неоднородного уравнения Монжа – Ампера (1) найдены частные параметрические решения I – XI. Дана газодинамическая интерпретация решения II. Получено аналитическое описание термодинамически устойчивых ударных переходов вида «аномальный газ – нормальный газ» и «нормальный газ – аномальный газ».

# ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
3. Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник. 1990. Т. 181. № 12. С. 1607–1622.
4. Кушнер А.Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа – Ампера и инварианты Лапласа // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 1–4.
5. Заславский Б.И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда, со свободной поверхностью воды // ПМТФ. 1964. № 4. С. 57–65.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
7. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
8. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966. 688 с.
9. Borisov A.A., Borisov A.A., Kutateladze S.S., Nakoryakov V.E. Rarefaction shock wave near the critical liquid-vapour point // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 59–73.
10. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортков В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 408 с.

Статья поступила 22.10.2014 г.

# Shablovskii O.N. PARAMETRIC SOLUTIONS FOR THE MONGE – AMPERE EQUATION AND GAS FLOW WITH VARIABLE ENTROPY

The non-uniform Monge–Ampere equation is considered for an unknown function  $Y = Y(x_1, x_2)$  of two independent variables. We set out an algorithm for building analytical solutions depending on a parameter  $\alpha$ :  $x_1 = \alpha x_2^2 + x_2 C_1 + C_0$ ;  $C_0$  and  $C_1$  are constant. The cases  $C_1 = 0$  and  $C_1 \neq 0$  are studied. Totally, eleven exact partial solutions with arbitrary functions or arbitrary constants were constructed. We also present a gas-dynamical interpretation for one of the solutions, namely, the problem of shock wave propagation in a thermodynamically stable compressible medium with a nonclassic (sign-alternating) convexity in the equation of state. Two examples of gas flowing between movable impermeable pistons are built in the finite form. The first case deals with expansion of the thermodynamically anomalous gas (negative convexity of the state equation): the pistons move in opposite directions; the flow contains a rarefaction shock wave moving from the right piston to the left one; the gas behind the jump front is thermodynamically normal (positive convexity of the state equation); and the process lasts until the rarefaction shock wave front reaches the left piston. In the second case, we consider compression of the thermodynamically normal gas: the pistons move to meet each other, and a compression shock wave propagates in the gas; the gas behind the jump front is thermodynamically anomalous; and the process lasts till the moment the compression shock wave front reaches the left piston. The shock transitions represented are accompanied with emission/absorption of the momentum and energy in the vicinity of the strong jump line.

Keywords: Monge – Ampere equation, thermodynamically anomalous gas, compression shock wave, rarefaction shock wave.

SHABLOVSKY Oleg Nikiphorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus)

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 688 p. (in Russian)
2. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazey i ego prilozheniya v gazovoy dinamike*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 272 p. (in Russian)
3. Khabirov S.V. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennyye s pomoshch'yu kontaktnoy gruppy uravneniya Monzha – Ampera. *Matematicheskii sbornik*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1607–1622. (in Russian)
4. Kushner A.G. Kontaktnaya linearizatsiya uravneniy Monzha – Ampera i invarianty Laplasa. *Doklady RAN*, 2008, vol. 422, no. 5, pp. 1–4. (in Russian)
5. Zaslavskiy B.I. O nelineynom vzaimodeystvii sfericheskoy udarnoy volny, voznikshey v rezul'tate vzryva zaglublennogo zaryada, so svobodnoy poverkhnost'yu vody. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1964, no. 4, pp. 57–65. (in Russian)
6. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy*. Moscow, Nauka Publ., 1973, vol. 1. 536 p. (in Russian)
7. Godunov S.K. *Elementy mekhaniki sploshnoy sredy*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 304 p. (in Russian)
8. Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 688 p. (in Russian)
9. Borisov A.A., Borisov A.A., Kutateladze S.S., Nakoryakov V.E. Rarefaction shock wave near the critical liquid-vapour point. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 126, pp. 59–73.
10. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. *Udarno-volnovyye yavleniya v kondensirovannykh sredakh*. Moscow, Yanus-K Publ., 1996, 408 p. (in Russian)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ДОЗМОРОВ Павел Сергеевич** – ассистент кафедры геологии и разработки нефтяных месторождений Института природных ресурсов Томского политехнического университета. E-mail: dozmorov88@gmail.com

**ЕРШОВ Игорь Валерьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: i\_ershov@ngs.ru

**КРАЙНОВ Алексей Юрьевич** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

**ЛАЗАРЕВ Вадим Ремирович** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: lazarev@math.tsu.ru

**МИНЬКОВ Леонид Леонидович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

**МОИСЕЕВА Ксения Михайловна** – ассистент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva\_KM@t-sk.ru

**ОРЛОВ Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

**ОСИПЕНКО Михаил Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета. E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

**ПАХОМОВА Елена Григорьевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института Томского политехнического университета. E-mail: peg@tpu.ru

**ПЕЙГИН Сергей Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: mishpahat\_peiguine@yahoo.com

**ПИКУЩАК Елизавета Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: liza@ftf.tsu.ru

**ПОРЯЗОВ Василий Андреевич** – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: porjazov@mail.ru

**РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского. E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

**СТЕПАНОВ Кирилл Александрович** – аспирант кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

**ТИМЧЕНКО Сергей Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

**УСТИНОВА Ирина Георгиевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института Томского политехнического университета. E-mail: igu@sibmail.com

**ШАБЛОВСКИЙ Олег Никифорович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической механики Гомельского государственного технического университета имени П.О. Сухого. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru