

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2015

№ 1 (30)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.



EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics.
Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof. of the Applied Mathematics Department.
Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Science, Associate Prof. of the Operation Research Department. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Science, Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department

Gennady Koshkin – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Cybernetics Department

Yury Kostyuk – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Informatics Department

Anjela Matrosova – Doctor of Science, Prof., Head of the Programming Department

Anatoly Nazarov – Doctor of Science, Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department

Sergey Sushchenko – Doctor of Science, Prof., Head of the Applied of Information Department, Dean of the Faculty of Informatics

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Science, Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Science, Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Nina Yevtushenko
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. каф. исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ.
Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. каф. прикладной математики ТГУ.
Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – отв. секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. каф. исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и математического моделирования ТГУ

Коскин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. каф. программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.
Университет VII
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р техн. наук, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии,
гл. науч. сотр. фирмы
«Синописис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031).

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России». Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» включен в Перечень изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций, а также входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте:
<http://journals.tsu.ru/informatics/>

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Масталиев Р.О. Необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления дискретно-непрерывной системой	4
---	---

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дмитренко А.Г., Уринов Р.И. Моделирование электромагнитного рассеяния на структуре, состоящей из импедансного и магнитодиэлектрического тел	11
Параев Ю.И., Рюмкин А.И., Цветницкая С.А. Математическая модель трудовой миграции населения	21

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке	27
Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты	38
Kusainov M.I. On optimal adaptive prediction of multivariate ARMA(1,1) process	44
Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока	57

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Андреева В.В., Сорудейкин К.А. Пространственно-ориентированная оптимизация тестовых последовательностей с применением итеративного подхода по многим переменным	68
Голубева О.И. Функции обнаружения константной неисправности, управляемости и наблюдаемости полюса элемента комбинационной схемы	77
Сведения об авторах	87

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Mastaliyev R.O. Necessary optimality conditions in optimal control problems by discrete-continuous systems	4
---	---

MATHEMATICAL MODELLING

Dmitrenko A.G., Urinov R.I. Simulating of electromagnetic scattering from a structure consisting of an impedance and a magnetodielectric bodies	11
Paraev Yu.I., Ryumkin A.I., Tsvetnitskaya S.A. Mathematical model of labour population shift	21

DATA PROCESSING

Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhelskaya L.A. Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semysynchronous flow of events	27
Gubina O.V., Koshkin G.M. Estimation of the actuarial present value of the whole continuous life annuity	38
Kusainov M.I. On optimal adaptive prediction of multivariate ARMA(1,1) process	44
Nezhelskaya L.A. Joint probability density of the intervals duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions	57

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Golubeva O.I. Stuck-at fault detection, controllability and observability functions of the combinational circuit gate pole	68
Andreeva V.V., Sorudeykin K.A. A method for minimizing test sequences based on spatial-related optimization with iteration steps by set of variables	77
Brief information about the authors	87

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977

Р.О. Масталиев

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте
Азербайджанской Республики (грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1).*

Рассматривается задача управления ступенчатой структурой, описываемой системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При предположении открытости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: разностные и интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра; ступенчатая задача; вариация функционала; уравнения Эйлера.

В работах [1, 2] изучены задачи оптимального управления, соответственно, описываемые интегральными и разностными уравнениями типа Вольтерра, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Предлагаемая работа посвящена изучению одной ступенчатой задаче оптимального управления, описываемой разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(T)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), & t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_1-1\}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = \int_{t_1}^t g(t, \tau, y(\tau), v(\tau)) d\tau, & t \in T_2 = [t_1, T], \\ y(t_1) = G(x(t_1)). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь t_0, t_1, T, x_0 заданы, причем разность $t_1 - t_0$ – натуральное число; $\varphi(x)$ и $\phi(y)$ – заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $f(t, \tau, x, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно; $g(t, \tau, y, v)$ – заданная m -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, вместе с частными производными по (y, v) до второго порядка включительно; $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция; $u(t)$ – r -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U ; $v(t)$ – r -мерный кусочно-непрерывный на T_2 вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества (V) , т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ – допустимым процессом.

Целью данной работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче.

2. Первая и вторая вариации функционала качества

Считая $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ оптимальным процессом, обозначим через $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ произвольный допустимый процесс и запишем формулу приращения функционала:

$$\Delta S(u^o, v^o) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \Phi(\bar{x}(t_1)) - \Phi(x^o(t_1)) + \Phi(\bar{y}(T)) - \Phi(y^o(T)). \quad (4)$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \right], \quad (5)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad t \in T_1, \quad (6)$$

$$\Delta \dot{y}(t) = \int_{t_1}^t \left[g(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \right] d\tau, \quad t \in T_2, \quad (7)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (8)$$

Обозначим через $(\psi(t), p(t))$ пока неизвестную $(n+m)$ -мерную вектор-функцию.

Умножая обе части соотношений (5), (7) соответственно на $\psi(t)$, $p(t)$ скалярно, а затем, суммируя и интегрируя полученные тождества по множествам T_1 и T_2 , будем иметь

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) \left[f(\tau, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\tau, t, x^o(t), u^o(t)) \right], \quad (9)$$

$$\int_{t_1}^T p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = \int_{t_1}^T \int_t^T p'(\tau) \left[g(\tau, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(\tau, t, y^o(t), v^o(t)) \right] d\tau dt. \quad (10)$$

Ясно что,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t),$$

$$\int_{t_1}^T p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p'(T) \Delta y(T) - p'(t_1) \Delta y(t_1) - \int_{t_1}^T \dot{p}'(t) \Delta y(t) dt.$$

Отсюда с учетом (8) будем иметь

$$\int_{t_1}^T p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p'(T) \Delta y(T) - p'(t_1) (G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))) - \int_{t_1}^T \dot{p}'(t) \Delta y(t) dt.$$

Принимая во внимания эти тождества, формула приращения (1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) = & \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) + \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^0(T)) + \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) \left[f(\tau, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\tau, t, x^0(t), u^0(t)) \right] + \\
& + p'(t_2)\Delta y(T) - p'(t_1) \left(G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)) \right) - \int_{t_1}^T \dot{p}'(t)\Delta y(t)dt - \\
& - \int_{t_1}^T \int_t^T p'(\tau) \left[g(\tau, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(\tau, t, y^0(t), v^0(t)) \right] d\tau dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = & \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) f(\tau, t, x, u), \quad M(t, y(t), v(t), p(t)) = \int_t^T p'(\tau) g(\tau, t, y, v) d\tau, \\
N(x) = & p'(t_1 - 1)G(x), \quad H_x[t] = H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \quad H_u[t] = H_u(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \\
H_{xx}[t] = & H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \quad H_{xu}[t] = H_{xu}(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \\
M_y[t] = & M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \quad M_v[t] = M_v(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \\
M_{yy}[t] = & M_{yy}(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \quad M_{vv}[t] = M_{vv}(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \\
f_x[t, \tau] = & f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)), \quad f_u[t, \tau] = f_u(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)), \\
g_y[t, \tau] = & g_y(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)), \quad g_v[t, \tau] = g_v(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)).
\end{aligned}$$

Тогда формула приращения (11) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) = & \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) + \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^0(T)) + \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \right] + \\
& + p'(T)\Delta y(T) - \left(N(\bar{x}(t_1)) - N(x^0(t_1)) \right) - \int_{t_1}^T \dot{p}'(t)\Delta y(t)dt - \\
& - \int_{t_1}^T \left[M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \right] dt.
\end{aligned} \tag{12}$$

Используя формулу Тейлора из (12), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) = & \varphi_x(x^0(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x^0(t_1))\Delta x(t_1) + \phi'_y(y^0(T))\Delta y(T) + \\
& + \frac{1}{2}\Delta y'(T)\phi(y^0(T))\Delta y(T) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_x[t]\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t]\Delta u(t) - \\
& - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \\
& + p'(T)\Delta y(T) - N'_x(x^0(t_1))\Delta x(t_1) - \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x^0(t_1))\Delta x(t_1) - \int_{t_1}^T \dot{p}'(t)\Delta y(t)dt - \\
& - \int_{t_1}^T M'_y[t]\Delta y[t]dt - \int_{t_1}^T M'_v[t]\Delta v(t)dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^T \Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t)dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^T \Delta v'(t)M_{vv}[t]\Delta v(t)dt - \\
& - \int_{t_1}^T \Delta y'(t)M_{yv}[t]\Delta v(t)dt + \eta(\Delta u, \Delta v).
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned} \eta(\Delta u, \Delta v) = & o_1 \left(\|\Delta x(t_1)\|^2 \right) + o_2 \left(\|\Delta y(T)\|^2 \right) - o_3 \left(\|\Delta x(t_1)\|^2 \right) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_4 \left(\|\Delta z(t)\|^2 \right) - \int_{t_1}^T o_5 \left(\|\Delta k(t)\|^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta z(t) = (\Delta x, \Delta u)'$, $\Delta k(t) = (\Delta y, \Delta v)'$.

Величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1,5}$, определяются, соответственно, из разложений

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) &= \varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right), \\ \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^o(T)) &= \phi'_y(y^o(T))\Delta y(T) + \frac{1}{2}\Delta y'(T)\phi_{yy}(y^o(T))\Delta y(T) + o_2\left(\|\Delta y(T)\|^2\right), \\ N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1)) &= N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_3\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right), \\ H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) &= H_x[t]\Delta x(t) + H_u[t]\Delta u(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + o_4\left(\|\Delta z(t)\|^2\right), \\ M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) &= M_y[t]\Delta y(t) + M_v[t]\Delta v(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t) + \Delta y(t)M_{yv}[t]\Delta v(t) + o_5\left(\|\Delta k(t)\|^2\right). \end{aligned}$$

Если предполагать, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \psi(t-1) &= H_x[t], \\ \psi(t_1-1) &= -\varphi_x(x^o(t_1)) + N_x(x^o(t_1)), \\ \dot{p}(t) &= M_y[t], \\ p(T) &= -\phi_y(y^o(T)), \end{aligned} \quad (15)$$

то формула приращения (13) примет вид

$$\begin{aligned} S(u^o, v^o) = & - \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u[t]\Delta u(t) + \int_{t_1}^T M[t]\Delta v(t)dt \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\Delta x'(t_1) \left[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N(x^o(t_1)) \right] \Delta x(t_1) + \Delta y'(T) \phi_{yy}(y^o(T)) \Delta y(T) - \right. \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t) - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t) H_{xu}[t] \Delta u(t) - \\ & \left. - \int_{t_1}^T \Delta y'(t) M_{yy}[t] \Delta y(t) dt - \int_{t_1}^T \Delta v'(t) M_{vv}[t] \Delta v(t) dt - 2 \int_{t_1}^T \Delta y'(t) M_{yv}[t] \Delta v(t) dt \right] + \eta(\Delta u, \Delta v). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (15) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче управления (см., например: [4]).

Специальное приращение оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$, в силу открытости областей управления U, V , можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \Delta u(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta u(t), t \in T_1, \\ \Delta v(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta v(t), t \in T_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\delta u(t), t \in T$ — произвольная r -мерная вектор-функция со значениями из R^r , $\delta v(t); t \in T$ — произвольная кусочно-непрерывная вектор-функция со значениями из R^q ; ε — достаточно малое по абсолютной величине число.

Обозначим через $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ специальное приращение оптимальной траектории $(x^\circ(t), y^\circ(t))$, отвечающее приращению $(\Delta u(t; \varepsilon), v(t; \varepsilon))$ управления $(u^\circ(t), v^\circ(t))$.

Используя формулу Тейлора и лемму Гронуолла–Белмана, из формул (5)–(7) по схеме, приведённой в [1. С. 15–21; 3. С. 86–87; 4. С. 33–38], доказывается справедливость оценок

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| &\leq L \sum_{t=t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\|, \\ \|\Delta y(t)\| &\leq L \left[\sum_{t=t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\| + \int_{t_1}^T \|\Delta v(t)\| dt \right], \\ L &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из оценок (18) с учетом (17) следует, что $\|\Delta x(t; \varepsilon)\|$, $\|\Delta y(t; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε , и кроме того, для $\Delta x(t; \varepsilon)$ и $\Delta y(t; \varepsilon)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма. Для специального приращения $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ управления траектории $(u^\circ(t), v^\circ(t))$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} \Delta x(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta x(t) + o_1(\varepsilon; t), \\ \Delta y(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta y(t) + o_2(\varepsilon; t). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $(\delta x(t), \delta y(t))$ – вариация траектории $(x^\circ(t), y^\circ(t))$ – является решением следующей системы линейных неоднородных разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра:

$$\begin{aligned} \delta x(t+1) &= \sum_{\tau=t_0}^t [f_x[t, \tau] \delta x(\tau) + f_u[t, \tau] \delta u(\tau)], \\ \delta x(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{y}(t) &= \int_{t_1}^t [g_y[t, \tau] \delta y(\tau) + g_v[t, \tau] \delta v(\tau)] d\tau, \\ \delta y(t_1) &= G_x(x^\circ(t_1)) \delta x(t_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Следуя, например [5], (20)–(21) назовем уравнением в вариациях для рассматриваемой задачи.

Принимая во внимание (17)–(19), в формуле (16) показана справедливость разложения

$$\begin{aligned} S(u^\circ + \varepsilon \delta u, v^\circ + \varepsilon \delta v) - S(u^\circ, v^\circ) &= -\varepsilon \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u[t] \Delta u(t) + \int_{t_1}^T M_v[t] \Delta v(t) dt \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\delta x'(t_1) [\varphi_{xx}(x^\circ(t_1)) - N_{xx}(x^\circ(t_1))] \delta x(t_1) + \delta y'(T) \phi_{yy}(y^\circ(T)) \delta y(T) - \right. \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xu}[t] \delta u(t) - \\ &\left. - \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yy}[t] \delta y(t) dt - \int_{t_1}^T \delta v'(t) M_{vv}[t] \delta v(t) dt - 2 \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yv}[t] \delta v(t) dt \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) следует, что первая и вторая вариации функционала (1) (в классическом смысле) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\delta^1 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u[t] \Delta u(t) - \int_{t_1}^T M_v[t] \Delta v(t) dt, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& \delta^2 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = \delta x'(t_1) (\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))) \delta x(t_1) + \\
& + \delta y'(T) \phi_{yy}(y^o(T)) \delta y(T) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) - \\
& - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xu}[t] \delta u(t) - \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yy}[t] \delta y(t) dt - \int_{t_1}^T \delta v'(t) M_{vv}[t] \delta v(t) dt - \\
& - 2 \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yv}[t] \delta v(t) dt.
\end{aligned} \tag{24}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Известно, что вдоль оптимального процесса первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая вариация неотрицательна (см., например: [5. С. 51–53]), т.е.

$$\delta^1 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = 0, \tag{25}$$

$$\delta^2 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) \geq 0 \tag{26}$$

для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^r$, $t \in T_2$.

Из тождества (25), учитывая (23), в силу произвольности и независимости вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих воздействий получаем, что

$$\begin{aligned}
H_u[\theta] &= 0, \quad \theta \in T_1, \\
M_v[\theta] &= 0, \quad \theta \in T_2
\end{aligned} \tag{27}$$

есть произвольная точка непрерывности управления $v(t)$.

Результат сформулируем в виде теорем.

Теорема 1 (аналог уравнения Эйлера). Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ в задаче (1)–(2) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (27).

Как обычно, допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$, удовлетворяющее уравнению Эйлера (27), назовем классической экстремалью в задаче (1)–(3).

Аналог уравнения Эйлера является необходимым условием оптимальности первого порядка. Используя неравенство (26), удастся получить необходимые условия оптимальности второго порядка.

Применительно к задаче (1)–(3) с учетом (24) получаем справедливость

$$\begin{aligned}
& \delta x'(t_1) (\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))) \delta x(t_1) + \\
& + \delta y'(T) \phi_{yy}(y^o(T)) \delta y(T) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) - \\
& - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xu}[t] \delta u(t) - \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yy}[t] \delta y(t) dt - \int_{t_1}^T \delta v'(t) M_{vv}[t] \delta v(t) dt - \\
& - 2 \int_{t_1}^T \delta y'(t) M_{yv}[t] \delta v(t) dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $(u^o(t), v^o(t))$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство (28) выполнялось для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$.

Заключение

Применяя модификацию метода приращений, вычислены первая и вторая вариации терминального функционала в ступенчатых задачах оптимального управления, описываемые системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога уравнения Эйлера. Получены условия оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Элм, 2013. 224 с.
2. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // Journal Automatic Control and Computer Sciences. 2008. V. 42, No 2. P. 71–76.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во БГУ, 2002. 114 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск : Наука и техника, 1974. 274 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.

Масталиев Рашид Огтай оглы, доктор философии по математике. E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com
Институт систем управления им. ак. А. Гусейнова НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджан.

Поступила в редакцию 5 января 2015 г.

Mastaliyev Rashad Ogtay oglu (Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

Necessary optimality conditions in problem of optimal control by discrete-continuous system.

Keywords: difference and integro-differential equations of Volterra type; stepwise problem; variation of the functional; Euler equation.

Consider a minimization problem of the functional

$$S(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(T)),$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), & t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_1-1\}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = \int_{t_1}^t g(t, \tau, y(\tau), v(\tau)) d\tau, & t \in T_2 = [t_1, T], \\ y(t_1) = G(x(t_1)). \end{cases}$$

Here t_0, t_1, t_2, x_0 are the given values, the difference $t_1 - t_0$ is a natural number, $\varphi(x), \phi(y)$ are the given continuously-differentiable scalar functions, $f(t, \tau, x, u), (g(t, \tau, y, v))$ are the given $n(m)$ -dimensional vector- functions continuous in the aggregate of variables together with partial derivatives with respect $(x, u) ((y, v))$, $G(x)$ is the given continuously-differentiable m -dimensional vector-function, $u(t) (v(t))$ are $r(q)$ - dimensional vectors of control actions with the values from the given non-empty, bounded, and open set $U(V)$, i.e.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1,$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2.$$

We call the pair $(u(t), v(t))$ with the above mentioned properties an admissible control, the corresponding process $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ – an admissible process.

Our goal is to derive a necessary optimality condition in the problem under above considerations.

REFERENCES

1. Abdullaev A.A., Mansimov K.B. *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisivaemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in the process described by the system of integral equations of Volterra type]. Baku: Elm Publ., 2013. 224 p.
2. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 71-76. DOI: 10.3103/S014641160802003X
3. Mansimov K.B. *Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. Baku: Baku State University Publ., 2002. 114 p.
4. Gabasov R., Kirillova F.M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [Maximum principle in theory of optimal control]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1974. 274 p.
5. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 256 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.874.6

А.Г. Дмитренко, Р.И. Уринов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ НА СТРУКТУРЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ИМПЕДАНСНОГО И МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛ

Метод дискретных вспомогательных источников использован для моделирования в резонансной частотной области электромагнитного рассеяния на структуре, состоящей из импедансного и магнитодиэлектрического тел. Приведены некоторые результаты моделирования, касающиеся влияния отклонения формы структуры от осесимметричной на бистатические сечения рассеяния.

Ключевые слова: электромагнитное рассеяние; метод дискретных источников; импедансное тело; магнитодиэлектрическое тело; сечение рассеяния.

Изучение электромагнитных полей, рассеянных структурами, состоящими из нескольких тел различной физической природы, размеры которых сравнимы с длиной волны падающего на структуру поля, имеет большое значение для решения ряда практически важных проблем, возникающих в радиолокации, радионавигации, дефектоскопии, антенной технике и других областях. К таким проблемам относятся, например, проблема радиолокационной заметности объектов, проблема идентификации объектов, проблема электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств и др. Особый интерес представляет случай, когда расстояние между телами структуры много меньше длины волны.

Корректная (с учётом электромагнитного взаимодействия тел) постановка исследований подобного рода приводит к необходимости решения граничных задач теории рассеяния на системах тел. Для задач рассматриваемого класса речь идёт о нахождении решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих заданным граничным условиям на поверхностях тел и условиям излучения на бесконечности. В подавляющем большинстве случаев получить аналитическое решение таких задач не удаётся, поэтому используются различные численные методы. Например, в [1] для решения задачи электромагнитного рассеяния на двух и трёх диэлектрических сферах использован метод граничных элементов, а в [2] для решения подобной задачи использован метод интегральных уравнений.

В последние годы применительно к решению задач электромагнитного рассеяния на группах тел существенно развит метод дискретных источников [3–5]. В этом методе неизвестное поле в рассматриваемой области и на её границах представляют в виде конечной линейной комбинации полей некоторой системы источников, размещённых вне этой области. Такая конструкция удовлетворяет системе уравнений Максвелла и условиям излучения (где это необходимо). Коэффициенты линейной комбинации определяются путём удовлетворения граничным условиям на поверхности рассеивателя. В силу своей идейной простоты метод удобен в качестве основы для построения решений задач электромагнитного рассеяния как на одиночных телах, так и на группах тел.

В данной работе предложенный в [5] вариант метода дискретных источников использован для моделирования электромагнитного рассеяния на структуре, состоящей из импедансного и магнитодиэлектрического тел. Приведены некоторые результаты моделирования, касающиеся влияния отклонения формы структуры от осесимметричной на бистатические сечения рассеяния.

1. Формулировка задачи

В безграничной однородной изотропной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_e и μ_e расположена структура, состоящая из непересекающихся импедансного и магнитоди-

электрического тела (рис. 1). Импедансное тело D ограничено гладкой поверхностью S , а магнитоэлектрическое тело D_i – гладкой поверхностью S_i и характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_i и μ_i . Структура возбуждается стационарным электромагнитным полем $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в области D_e .

Кроме поля $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e , внутри магнитоэлектрического тела существует поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$, которое также является неизвестным.

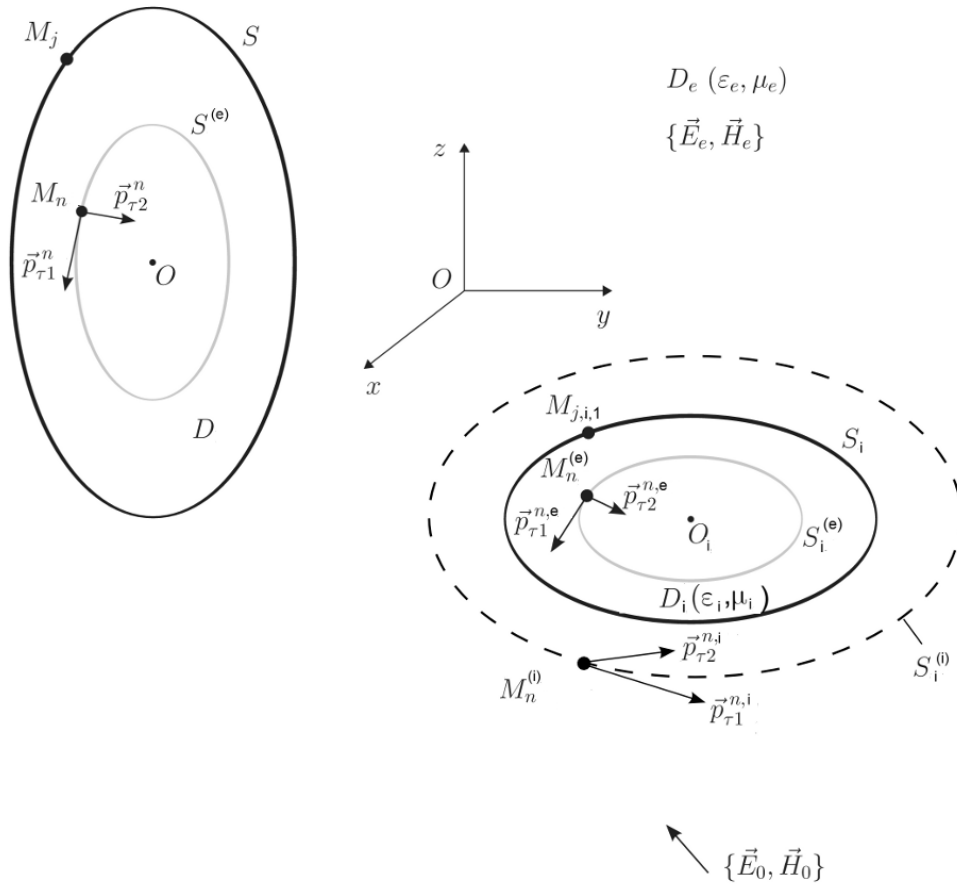


Рис. 1. Геометрия задачи

Поля $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ и $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \quad \nabla \times \vec{H}_e = -i\omega\epsilon_e \vec{E}_e \text{ в } D_e, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = i\omega\mu_i \vec{H}_i, \quad \nabla \times \vec{H}_i = -i\omega\epsilon_i \vec{E}_i \text{ в } D_i \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E}_e - Z(\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}_e)) = -\vec{n} \times \vec{E}_0 + Z(\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}_0)) \text{ на } S, \quad (3)$$

$$\vec{n}_i \times (\vec{E}_i - \vec{E}_e) = \vec{n}_i \times \vec{E}_0, \quad \vec{n}_i \times (\vec{H}_i - \vec{H}_e) = \vec{n}_i \times \vec{H}_0 \text{ на } S_i. \quad (4)$$

Кроме того, поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e должно удовлетворять условиям излучения

$$\{\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R} / R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), R \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В выражениях (1)–(5) $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S , ограничивающей импедансное тело; $\vec{n}_i$ – единичный вектор нормали к поверхности S_i , ограничивающей магнитоэлектрическое тело; $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение; Z – поверхностный импеданс, $\text{Re } Z \geq 0$.

2. Модель рассеянного поля

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Введем внутри импедансного тела D вспомогательную поверхность $S^{(e)} = K^{(e)}S$, подобную поверхности рассеивателя S в смысле гомотетии с центром в точке O . Если поверхность S является центральной, центр гомотетии выбираем так, чтобы он совпадал с центром поверхности. Коэффициент гомотетии (подобия) $K^{(e)}$ характеризует удаление вспомогательной поверхности от поверхности импедансного тела, его значения лежат в интервале $0 < K^{(e)} < 1$ (при $K^{(e)} = 0$ вспомогательная поверхность стягивается в точку, при $K^{(e)} = 1$ она совпадает с поверхностью тела).

Аналогично внутри магнитоэлектрического тела D_i введем вспомогательную поверхность $S_i^{(e)} = K_i^{(e)}S_i$, подобную поверхности рассеивателя S_i .

Выберем на вспомогательной поверхности $S^{(e)}$ внутри импедансного тела конечную совокупность точек $\{M_n\}_{n=1}^N$ и в каждой точке M_n разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^n = p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n$, $\vec{p}_{\tau_2}^n = p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^n, \vec{e}_{\tau_2}^n$, выбранных в плоскости, касательной к $S^{(e)}$ в точке M_n , и излучающих в однородную среду с параметрами ϵ_e и μ_e .

Аналогично выберем на вспомогательной поверхности $S_i^{(e)}$ внутри магнитоэлектрического тела конечную совокупность точек $\{M_n^{(e)}\}_{n=1}^{N^{(e)}}$ и в каждой точке $M_n^{(e)}$ разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$, $\vec{p}_{\tau_2}^{n,e} = p_{\tau_2}^{n,e} \vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^{n,e}, \vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$, выбранных в плоскости, касательной к $S_i^{(e)}$ в точке $M_n^{(e)}$, и излучающих в однородную среду с параметрами ϵ_e и μ_e .

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\begin{aligned} \vec{E}_e(M) &= (i/\omega\epsilon_e) \left\{ \sum_{n=1}^N \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_n) + \sum_{n=1}^{N^{(e)}} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_{n,e}) \right\}, \\ \vec{H}_e(M) &= \sum_{n=1}^N \nabla \times \vec{\Pi}_n + \sum_{n=1}^{N^{(e)}} \nabla \times \vec{\Pi}_{n,e}, \\ \vec{\Pi}_n &= \Psi_e(M, M_n) \vec{p}_{\tau}^n, \quad \vec{\Pi}_{n,e} = \Psi_e(M, M_n^{(e)}) \vec{p}_{\tau}^{n,e}, \\ \Psi_e(M, M_n) &= \exp(ik_e R_{MM_n}) / (4\pi R_{MM_n}), \quad \Psi_e(M, M_n^{(e)}) = \exp(ik_e R_{MM_n^{(e)}}) / (4\pi R_{MM_n^{(e)}}), \\ \vec{p}_{\tau}^n &= p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n + p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n, \quad \vec{p}_{\tau}^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \vec{e}_{\tau_1}^{n,e} + p_{\tau_2}^{n,e} \vec{e}_{\tau_2}^{n,e}, \quad M \in D_e. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $k_e = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_e}$ – волновое число в среде D_e ; R_{MM_n} – расстояние от точки M_n на $S^{(e)}$ до точки M в D_e ; $R_{MM_n^{(e)}}$ – расстояние от точки $M_n^{(e)}$ на $S_i^{(e)}$ до точки M в D_e ; $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n (n = \overline{1, N})$ и $p_{\tau_1}^{n,e}, p_{\tau_2}^{n,e} (n = \overline{1, N^{(e)}})$ – неизвестные комплексные постоянные (дипольные моменты); N – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности $S^{(e)}$ внутри импедансного тела; $N^{(e)}$ – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности $S_i^{(e)}$ внутри диэлектрического тела.

Для представления поля $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ внутри диэлектрического тела введем вспомогательную поверхность $S_i^{(i)}$, охватывающую это тело. Вспомогательная поверхность $S_i^{(i)}$ также выбирается подоб-

ной поверхности тела S_i : $S_i^{(i)} = K_i^{(i)} S_i$, $K_i^{(i)} > 1$. Выберем на вспомогательной поверхности $S_i^{(i)}$ конечную совокупность точек $\{M_n^{(i)}\}_{n=1}^{N^{(i)}}$, в каждой из которых разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$, $\vec{p}_{\tau_2}^{n,i} = p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$. Единичные векторы $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i}, \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$ выбраны в плоскости, касательной к $S_i^{(i)}$ в точке $M_n^{(i)}$. Предполагается, что диполи, размещенные на $S_i^{(i)}$, излучают в однородную среду с параметрами ε_i, μ_i .

Представим неизвестное поле $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i\}$ внутри диэлектрического тела в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(M) &= (i/\omega\varepsilon_i) \sum_{n=1}^{N^{(i)}} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_{n,i}), \quad \vec{H}_i(M) = \sum_{n=1}^{N^{(i)}} \nabla \times \vec{\Pi}_{n,i}, \\ \vec{\Pi}_{n,i} &= \Psi_i(M, M_n^{(i)}) \vec{p}_{\tau}^{n,i}, \quad \vec{p}_{\tau}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i} + p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}, \\ \Psi_i(M, M_n^{(i)}) &= \exp(ik_i R_{MM_n^{(i)}}) / (4\pi R_{MM_n^{(i)}}), \quad M \in D_i. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) $k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$; $R_{MM_n^{(i)}}$ – расстояние от точки $M_n^{(i)}$ на вспомогательной поверхности $S_i^{(i)}$ до точки M в D_i ; $N^{(i)}$ – число точек размещения диполей на $S_i^{(i)}$; $p_{\tau_1}^{n,i}, p_{\tau_2}^{n,i} (n = \overline{1, N^{(i)}})$ – неизвестные дипольные моменты.

Представление для полей (6)–(7) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1)–(2). Кроме того, поле (6) удовлетворяет условиям излучения (5). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (3)–(4), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n (n = \overline{1, N})$, $p_{\tau_1}^{n,e}, p_{\tau_2}^{n,e} (n = \overline{1, N^{(e)}})$ и $p_{\tau_1}^{n,i}, p_{\tau_2}^{n,i} (n = \overline{1, N^{(i)}})$.

Используем для этого метод коллокаций. Суть этого метода заключается в поточечном удовлетворении граничным условиям на некоторых дискретных множествах точек, выбранных на поверхностях S и S_i .

Пусть $M_j (j = \overline{1, 2, \dots, L})$ – точки коллокации на поверхности S импедансного тела, а $M_{j',i} (j' = \overline{1, 2, \dots, L_i})$ – точки коллокации на поверхности S_i диэлектрического тела; L – число точек коллокации на S , L_i – число точек коллокации на S_i . Тогда для определения неизвестных $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n (n = \overline{1, N})$, $p_{\tau_1}^{n,e}, p_{\tau_2}^{n,e} (n = \overline{1, N^{(e)}})$ и $p_{\tau_1}^{n,i}, p_{\tau_2}^{n,i} (n = \overline{1, N^{(i)}})$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размером $(2L + 4L_i)$ на $(2N + 2(N^{(e)} + N^{(i)}))$:

$$\begin{aligned} \vec{n}^j \times \vec{E}_e^j - Z(\vec{n}^j \times (\vec{n}^j \times \vec{H}_e^j)) &= -\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j + Z(\vec{n}^j \times (\vec{n}^j \times \vec{H}_0^j)), \quad j = \overline{1, L}, \\ \vec{n}_i^{j'} \times (\vec{E}_i^{j'} - \vec{E}_e^{j'}) &= \vec{n}_i^{j'} \times \vec{E}_0^{j'}, \quad \vec{n}_i^{j'} \times (\vec{H}_i^{j'} - \vec{H}_e^{j'}) = \vec{n}_i^{j'} \times \vec{H}_0^{j'}, \quad j' = \overline{1, L_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\vec{n}^j, \vec{E}_e^j, \vec{H}_e^j$ и $\vec{E}_0^j, \vec{H}_0^j$ – значения компонент рассеянного (6) и возбуждающего полей в точках коллокации j на поверхности импедансного тела; $\vec{n}_i^{j'}, \vec{E}_e^{j'}, \vec{H}_e^{j'}$ и $\vec{E}_i^{j'}, \vec{H}_i^{j'}$ – значения компонент рассеянного поля (6) и поля (7) в точке коллокации j' на поверхности магнитоэлектрического тела; $\vec{E}_0^{j'}, \vec{H}_0^{j'}$ – компоненты возбуждающего поля в этой же точке. Решение системы (8) находим путём минимизации функции

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{j=1}^L \left| \vec{n}^j \times (\vec{E}_e^j + \vec{E}_0^j) - Z(\vec{n}^j \times (\vec{H}_e^j + \vec{H}_0^j)) \right|^2 + \\ &+ \sum_{j'=1}^{L_i} \left\{ \left| \vec{n}_i^{j'} \times (\vec{E}_i^{j'} - \vec{E}_e^{j'} - \vec{E}_0^{j'}) \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| \vec{n}_i^{j'} \times (\vec{H}_i^{j'} - \vec{H}_e^{j'} - \vec{H}_0^{j'}) \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

методом сопряжённых градиентов.

После решения задачи минимизации, т.е. определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n (n = \overline{1, N})$, $p_{\tau_1}^{n,e}, p_{\tau_2}^{n,e} (n = \overline{1, N^{(e)}})$ и $p_{\tau_1}^{n,i}, p_{\tau_2}^{n,i} (n = \overline{1, N^{(i)}})$, необходимые характеристики рассеянного поля определяем из (6). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$\begin{aligned} E_{e,\theta}(M) &= (\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\varphi}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \\ E_{e,\varphi}(M) &= -(\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\theta}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\varphi(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \end{aligned} \quad (10)$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \varphi)$ и $D_\varphi(\theta, \varphi)$ определены выражениями

$$\begin{aligned} D_\theta(\theta, \varphi) &= (i\omega k_e \mu_e / 4\pi) \left\{ \sum_{n=1}^N G_n(\theta, \varphi) [(\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_1^n + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_1^n - \sin \theta \cos \gamma_1^n) p_{\tau_1}^n + \right. \\ &\quad + (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_2^n + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_2^n - \sin \theta \cos \gamma_2^n) p_{\tau_2}^n] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N^{(e)}} G_n^e(\theta, \varphi) [(\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_1^{n,e} + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_1^{n,e} - \sin \theta \cos \gamma_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + \\ &\quad + (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_2^{n,e} + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_2^{n,e} - \sin \theta \cos \gamma_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e}] \}, \\ D_\varphi(\theta, \varphi) &= (i\omega k_e \mu_e / 4\pi) \left\{ \sum_{n=1}^N G_n(\theta, \varphi) [(\cos \varphi \cos \beta_1^n - \sin \varphi \cos \alpha_1^n) p_{\tau_1}^n + \right. \\ &\quad + (\cos \varphi \cos \beta_2^n - \sin \varphi \cos \alpha_2^n) p_{\tau_2}^n] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N^{(e)}} G_n^e(\theta, \varphi) [(\cos \varphi \cos \beta_1^{n,e} - \sin \varphi \cos \alpha_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + (\cos \varphi \cos \beta_2^{n,e} - \sin \varphi \cos \alpha_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e}] \}, \\ G_n(\theta, \varphi) &= \exp\{-ik_e (\sin \theta \cos \varphi x_n + \sin \theta \sin \varphi y_n + \cos \theta z_n)\}, \\ G_n^e(\theta, \varphi) &= \exp\{-ik_e (\sin \theta \cos \varphi x_{n,e} + \sin \theta \sin \varphi y_{n,e} + \cos \theta z_{n,e})\}, \end{aligned} \quad (11)$$

в которых $\cos \alpha_1^n, \cos \beta_1^n, \cos \gamma_1^n$ и $\cos \alpha_2^n, \cos \beta_2^n, \cos \gamma_2^n$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^n$ и $\vec{e}_{\tau_2}^n$; $\cos \alpha_1^{n,e}, \cos \beta_1^{n,e}, \cos \gamma_1^{n,e}$ и $\cos \alpha_2^{n,e}, \cos \beta_2^{n,e}, \cos \gamma_2^{n,e}$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$; x_n, y_n, z_n – декартовы координаты точки M_n ; $x_{n,e}, y_{n,e}, z_{n,e}$ – декартовы координаты точки $M_n^{(e)}$; θ и φ – общепринятые угловые сферические координаты точки наблюдения M .

Контроль точности решения осуществляем путём вычисления относительного значения функции (9) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации, выбираемых на поверхностях S и S_i импедансного и магнитодиэлектрического тел:

$$\Delta = (\Phi' / \Phi_0)^{1/2}, \quad (12)$$

где Φ' – значение функции (9) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек, определяемое выражением

$$\Phi_0 = \sum_{j=1}^L |\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j - Z(\vec{n}^j \times (\vec{n}^j \times \vec{H}_0^j))|^2 + \sum_{j=1}^{L'_i} \left\{ \left| \vec{n}_i^j \times \vec{E}_0^j \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| \vec{n}_i^j \times \vec{H}_0^j \right|^2 \right\},$$

в которых L – число промежуточных точек на поверхности импедансного тела, а L'_i – число промежуточных точек на поверхности магнитодиэлектрического тела.

3. Результаты моделирования

На основании изложенного выше метода была создана программа для расчёта компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Предполагалось, что тела, образующие рассеивающую структуру, являются трёхосными эллипсоидами. Входными величинами программы являются координаты их центров, ориентация их осей в глобальной системе координат, величины их полуосей в

длинах волн, значение нормированного импеданса импедансного эллипсоида $Z' = Z/(\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2}$, относительные значения $\varepsilon' = \varepsilon_i/\varepsilon_e$ и $\mu' = \mu_i/\mu_e$ диэлектрической и магнитной проницаемостей магнитоэлектрического эллипсоида, возбуждающее поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, параметр подобия $K^{(e)}$, числа точек размещения диполей N и точек коллокации L для импедансного эллипсоида, а также параметры подобия $K_i^{(e)}$, $K_i^{(i)}$, числа точек размещения диполей $N^{(e)}$, $N^{(i)}$ и точек коллокации L_i для магнитоэлектрического эллипсоида.

Координаты точек размещения вспомогательных диполей и точек коллокации, а также направляющие косинусы касательных направлений, вдоль которых ориентированы диполи и поставлены граничные условия, первоначально вычисляются в локальной системе координат, связанной с соответствующим эллипсоидом, а затем осуществляется пересчет этих величин в глобальную систему отсчета. Минимизацию функции (9) осуществляем методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функции на каждой из десяти последних итераций не превышает 0,001.

Разработанная программа позволяет исследовать характеристики рассеяния широкого класса структур, содержащих импедансное (в частности, идеально проводящее) и магнитоэлектрическое тела. Например, для структуры, показанной на рис. 2, было исследовано влияние отклонения формы структуры от осесимметричной на бистатистические сечения рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left[|E_{e,\theta}(\theta, \varphi)|^2 + |E_{e,\varphi}(\theta, \varphi)|^2 \right] / |\vec{E}_0|^2. \quad (13)$$

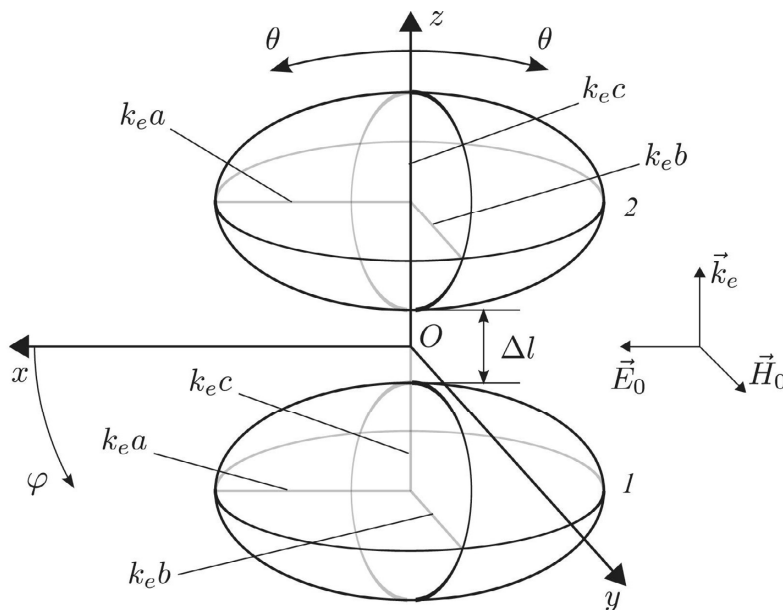


Рис. 2. Структура, состоящая из импедансного и диэлектрического эллипсоидов с одинаковыми геометрическими параметрами и центрами, расположенными на одной оси

Структура состоит из импедансного 1 и диэлектрического 2 ($\mu_i' = 1$) эллипсоидов с одинаковыми геометрическими параметрами, т.е. одинаковыми значениями полуосей $k_e a, k_e b, k_e c$. Центры эллипсоидов расположены на оси z декартовой системы координат $Oxyz$ симметрично относительно ее начала. Наименьшее расстояние между поверхностями эллипсоидов Δl равно $0,01\lambda$. Полуоси эллипсоидов $k_e a, k_e b, k_e c$ ориентированы соответственно вдоль осей x, y, z . Структура возбуждается линейно поляризованной волной, распространяющейся вдоль оси z с вектором $\vec{E}_0$, ориентированным вдоль оси x .

Алгоритм исследований заключался в следующем. Первоначально предполагалось, что структура обладает осевой симметрией, т.е. оба эллипсоида являются сфероидами ($k_e a = k_e b$). Затем последова-

тельно изменялось значение полуоси k_{ea} ; значения полуосей k_{eb} и k_{ec} сохранялись при этом неизменными. Для каждого случая рассчитывались бистатистические сечения рассеяния.

Некоторые результаты, характеризующие изменения сечений рассеяния при малых отклонениях формы структуры от осесимметричной, представлены на рис. 3–5. Рис. 3 относится к случаю, когда эллипсоид 1 характеризуется нормированным поверхностным импедансом $Z' = 0,1 - 0,1i$, а эллипсоид 2 – относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon'_i = 2$; рис. 4, 5 относятся к случаям, когда эллипсоид 1 характеризуется тем же значением импеданса Z' , а эллипсоид 2 – относительными значениями диэлектрической проницаемости ε' , равными 4 и 10 соответственно. Результаты приведены в E -плоскости, т.е. в плоскости, содержащей векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{k}_e$ (плоскость xOz). В сферической системе координат эта плоскость состоит из двух полуплоскостей: $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$.

Кривые 1 на рис. 3–5 относятся к случаю осесимметричной структуры, когда полуоси каждого из эллипсоидов принимают значения $k_{ea} = k_{eb} = 4,0$, $k_{ec} = 2,0$. Кривые 2 относятся к случаю, когда значение полуоси k_{ea} увеличено на 5%, т.е. равно 4,2, а кривые 3 – к случаю, когда значение полуоси k_{ea} увеличено на 10%, т.е. равно 4,4; значения остальных полуосей оставались без изменения. Таким образом, в последних двух случаях структура теряет осевую симметрию. По оси абсцисс отложено значение угла θ , по оси ординат – значение сечения рассеяния (13), нормированное на квадрат длины волны и выраженное в децибелах. В E -плоскости кривые симметричны относительно оси z , поэтому на рисунках показаны сечения рассеяния только в полусечении $\varphi = 180^\circ$.

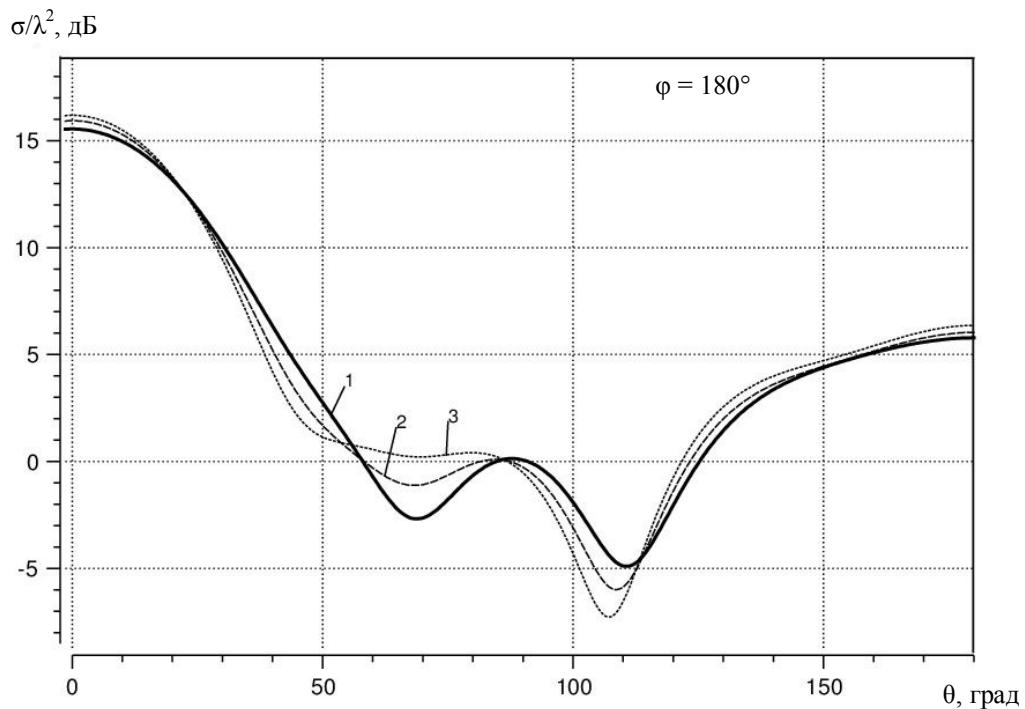


Рис. 3. Бистатистические сечения рассеяния в E -плоскости структуры, характеризуемой импедансом $Z' = 0,1 - 0,1i$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon'_i = 2$ при различных длинах полуоси k_{ea} .
Кривая 1 соответствует $k_{ea} = k_{eb} = 4,0$ и $k_{ec} = 2,0$; кривая 2 – $k_{ea} = 4,2$, $k_{eb} = 4,0$ и $k_{ec} = 2,0$;
кривая 3 – $k_{ea} = 4,4$, $k_{eb} = 4,0$ и $k_{ec} = 2,0$

При моделировании параметры метода были следующими:

$$K^{(e)} = K_i^{(e)} = 0,6, \quad K_i^{(i)} = 4, \quad N = N^{(e)} = N^{(i)} = 256, \quad L = L_i = 512.$$

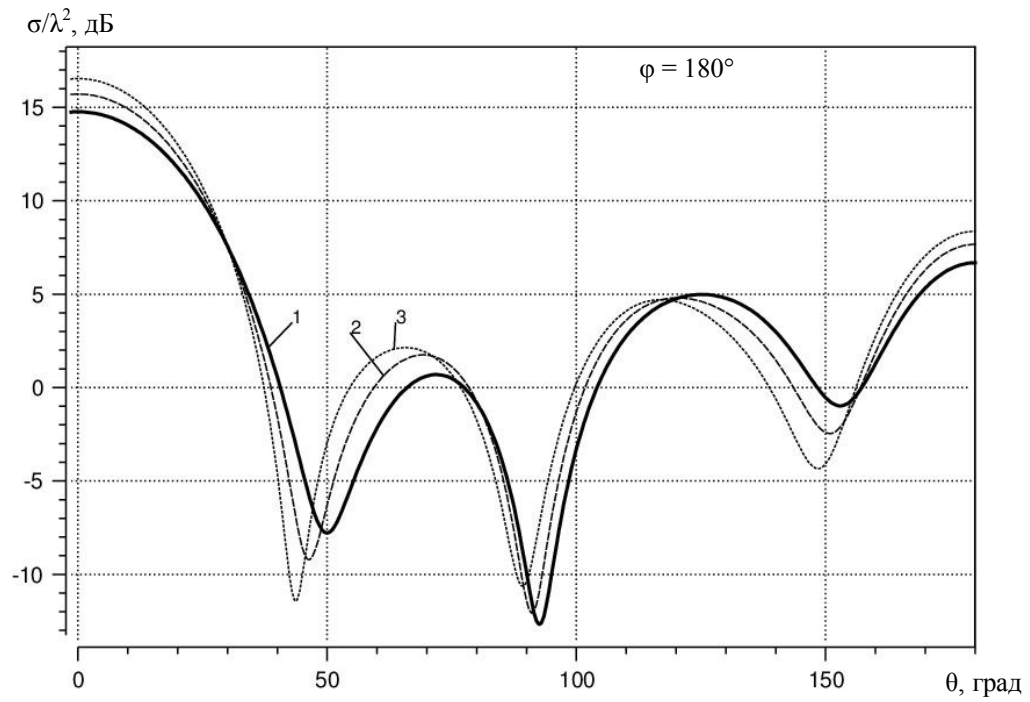


Рис. 4. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости структуры, характеризуемой импедансом $Z' = 0,1 - 0,1i$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon'_i = 4$ при различных длинах полуоси $k_e a$. Кривая 1 соответствует $k_e a = k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$; кривая 2 – $k_e a = 4,2$, $k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$; кривая 3 – $k_e a = 4,4$, $k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$

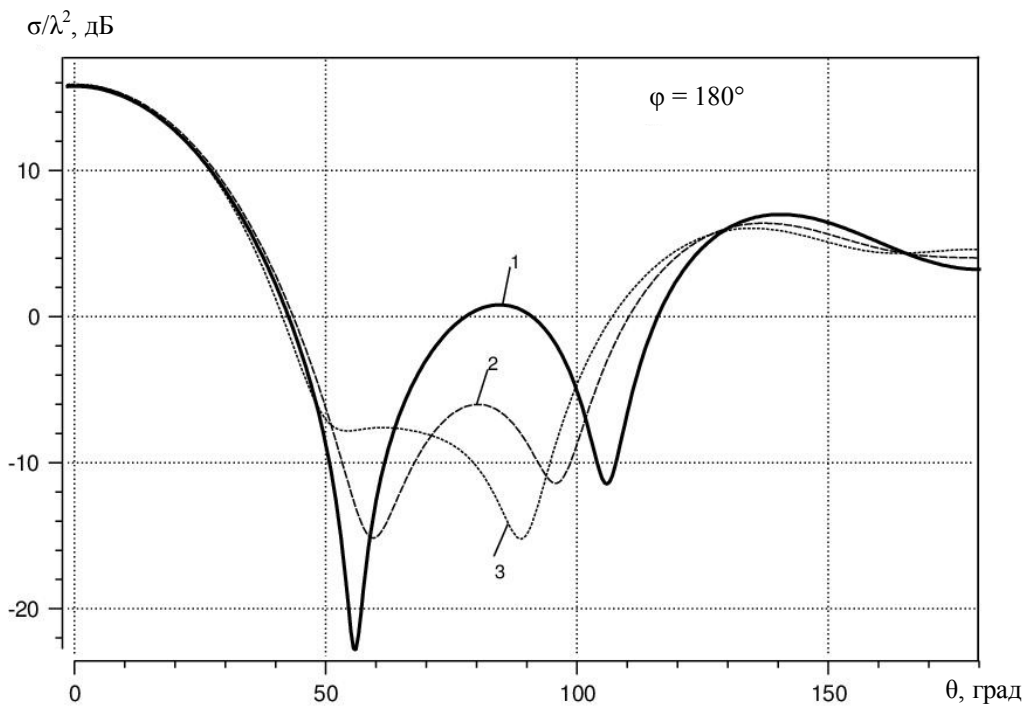


Рис. 5. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости структуры, характеризуемой импедансом $Z' = 0,1 - 0,1i$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon'_i = 10$ при различных длинах полуоси $k_e a$. Кривая 1 соответствует $k_e a = k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$; кривая 2 – $k_e a = 4,2$, $k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$; кривая 3 – $k_e a = 4,4$, $k_e b = 4,0$ и $k_e c = 2,0$

Точки размещения диполей на вспомогательных поверхностях и точки коллокации на поверхностях импедансного и диэлектрического тел распределены следующим образом. В локальных системах координат в каждом из шестнадцати полусечений $\varphi = \text{const}$, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22,5^\circ$, равномерно по углу θ выбраны шестнадцать точек размещения диполей. Для точек коллокации алгоритм их расположения по углу θ выбран таким же, как для точек размещения диполей, но выбраны они как в полусечениях $\varphi = \text{const}$, определенных для точек размещения диполей, так и посередине между ними. Многочисленные вычислительные эксперименты показали, что указанное выше взаимное расположение точек размещения диполей и точек коллокации обеспечивает наивысшую скорость сходимости итерационного процесса.

Анализ результатов, представленных на рис. 3–5, позволяет сделать следующие выводы. Во всех рассмотренных случаях небольшие отклонения формы структуры от осесимметричной в наименьшей степени влияют на сечения рассеяния в направлениях $0^\circ < \theta < 30^\circ$, прилегающих к направлению прямого рассеяния ($\theta = 0^\circ$). В направлениях прямого рассеяния изменение σ/λ^2 при изменении полуоси $k_e a$ в рассмотренных пределах не превышает 2дБ. В таких же пределах изменяется сечение обратного рассеяния в направлениях $160^\circ < \theta < 180^\circ$, прилегающих к направлению обратного рассеяния ($\theta = 180^\circ$). Для остальных направлений рассеяния во всех рассмотренных случаях при отклонении формы структуры от осесимметричной наблюдается существенное перераспределение энергии рассеянного поля в пространстве, которое определяется величиной относительной диэлектрической проницаемости.

Заключение

Таким образом, в данной работе на основе метода дискретных источников построена модель поля, рассеянного структурой, состоящей из импедансного и магнитодиэлектрического тел. С использованием граничных условий получена система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров модели. Приведены некоторые результаты моделирования, касающиеся влияния отклонения формы структуры от осесимметричной на бистатистические сечения рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall W.S., Mao X.Q. Boundary element method calculation for coherent electromagnetic scattering from two and three dielectric spheres // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1995. V. 15. P. 313–320.
2. Sharkawy M.H., Demir V., Elsherbeni A.Z. Plane wave scattering from three dimensional multiple objects using the iterative multiregion technique based on the FDFD method // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2006. V. 54, No. 2. P. 666–673.
3. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Численный метод анализа электромагнитного рассеяния структурами из конечного числа трехмерных идеально проводящих тел // *Радиотехника и электроника*. 2001. Т. 46, № 3. С. 217–282.
4. Дмитренко А.Г., Уринов Р.И. Рассеяние электромагнитной волны на структуре из конечного числа трехмерных импедансных тел // *Известия вузов. Радиофизика*. 2012. Т. 55, № 4. С. 299–308.
5. Дмитренко А.Г., Уринов Р.И. Рассеяние электромагнитной волны на структуре из конечного числа трехмерных импедансных и магнитодиэлектрических тел // *Известия вузов. Радиофизика*. 2014. Т. 57. (в печати).

Дмитренко Анатолий Григорьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru

Уринов Радик Истамович. E-mail: rad_d@sibmail.com

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 декабря 2014 г.

Dmitrenko Anatoly G., Urinov Radik I. (Tomsk State University, Russian Federation).

Simulations of electromagnetic scattering from a structure consisting of impedance and magnetodielectric bodies.

Keywords: electromagnetic scattering; discrete sources method; impedance body; magnetodielectric body; scattering cross-section.

The problem of electromagnetic scattering from a structure consisting of impedance and magnetodielectric bodies is solved in the resonance frequency range by means of the discrete sources method. The gist of the used method is the following. The unknown scattered field in the outer medium is represented as a sum of the fields of auxiliary elementary electric dipoles located on the auxiliary surfaces introduced inside each body. The form of auxiliary surface is similar to the form of body's surface, and electric dipoles are orient-

ed tangentially to the auxiliary surfaces. The unknown field inside of a magnetodielectric body is represented as a sum of the fields of auxiliary elementary electric dipoles located on the auxiliary surfaces, which enclose a magnetodielectric bodies. The form of auxiliary surface is similar to the surface form of a magnetodielectric body, and dipoles are oriented tangentially to the auxiliary surface. The chosen representations of the fields satisfy to Maxwell's equations and radiation conditions. To find the unknown dipole moments of the auxiliary dipoles, we use the boundary conditions on the surfaces of the impedance and magnetodielectric bodies. The above method we have implemented as a computer software for calculating the scattered-field components. We present some results concerning the influence of structure form's deviations from the axisymmetric form on the scattering cross-section.

REFERENCES

1. Hall W.S., Mao X.Q. Boundary element method calculation for coherent electromagnetic scattering from two and three dielectric spheres. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995, vol. 15, pp. 313-320. DOI: 10.1016/0955-7997(95)00041-L
2. Sharkawy M.H., Demir V., Elsherbeni A.Z. Plane wave scattering from three dimensional multiple objects using the iterative multiregion technique based on the FDFD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, vol. 54, no. 2, pp. 666-673. DOI: 10.1109/TAP.2005.863129
3. Dmitrenko A.G., Kolchin V.A. Chislennyy metod analiza elektromagnitnogo rasseyaniya strukturami iz konechnogo chisla trekhmernykh ideal'no provodyashchikh tel [A numerical method for the analysis of electromagnetic scattering by structures consisting of a finite number of three dimensional perfectly conducting bodies]. *Radiotekhnika i elektronika*, 2001, vol. 46, no. 3, pp. 217-282.
4. Dmitrenko A.G., Urinov R.I. Scattering of an electromagnetic wave by a structure consisting of a finite number of three-dimensional impedance bodies. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2012, vol. 55, no. 4, pp. 299-308. DOI: 10.1007/s11141-012-9366-0
5. Dmitrenko A.G., Urinov R.I. Scattering of an electromagnetic wave by a structure consisting of a finite number of three-dimensional impedance and magnetodielectric bodies. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2014, vol. 57. (to be published).

Ю.И. Параев, А.И. Рюкин, С.А. Цветницкая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУДОВОЙ МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ

Предложена динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных потоков трудовых ресурсов. Эта модель позволяет формализовать процесс управления трудовой миграцией за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. Рассмотрена задача об оптимальном распределении трудовых ресурсов между регионами с целью максимизации суммарной производственной эффективности всех регионов.

Ключевые слова: миграция населения; гипотеза Тибу; распределение трудовых ресурсов; бюджетный федерализм.

К числу важнейших проблем современного государственного управления относится эффективное разделение компетенции и необходимых управленческих ресурсов между уровнями управленческой иерархии. При наличии политической и экономической неоднородности юрисдикций (регионов, муниципалитетов) такие процессы получили название бюджетного федерализма.

Одной из возникающих здесь проблем является распределение трудовых ресурсов, в частности управление миграционными потоками. В 1956 г. Ч. Тибу [1] выдвинул гипотезу, что различие предпочтений населения относительно общественных благ и возможность перемещения между регионами (голосование ногами) позволяют обеспечить эффективное пространственное распределение населения между юрисдикциями. Работа Тибу долгое время оставалась не востребовавшей, но позднее породила большой поток публикаций, включая смежные задачи макроэкономики, например [2–10]. При этом следует отметить, что практически все эти работы ведутся в рамках статического равновесного анализа, привычного для математической экономики, но неадекватного, на наш взгляд, реальной динамической природе протекающих процессов. В настоящей работе предлагается динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных миграционных потоков. Исследован также процесс конкурентного ресурсного взаимодействия регионов, взаимосвязанных по миграции, зависящей от величин фондов развития региона.

1. Модель динамики миграции

Будем рассматривать n регионов, имеющих собственную экономику и основные производственные ресурсы, свободно перемещающиеся между ними. Полагаем, что численность населения региона является существенным показателем, характеризующим значимость его экономики. Обозначим через $x_i(k)$ количество трудового населения (далее просто населения) в i -м регионе на k -м временном шаге. Можно записать разностное уравнение для динамики изменения населения

$$x_i(k+1) = x_i(k) + W_i(k) - Y_i(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $W_i(k)$ – количество населения, приехавшего в i -й регион; $Y_i(k)$ – количество населения, ушедшего из этого региона. Здесь для простоты опущено естественное изменение (прирост или убыль) населения. Это связано с тем, что этот процесс достаточно медленный. Кроме того, данное изменение легко учесть в полученных ниже результатах. Из этого допущения следует, что общее количество населения во всех регионах на каждом временном шаге остается постоянным. Поскольку должно выполняться условие $0 \leq Y_i(k) \leq x_i(k)$, то удобно записать

$$Y_i(k) = \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) x_i(k) \leq x_i(k), \quad (2)$$

где $z_{ji}(k)$ – доля населения i -го региона, переехавшего в j -й регион. Очевидно, должны выполняться условия

$$z_{ii}(k) = 0, \quad 0 \leq z_{ji}(k) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Аналогично

$$W_i(k) = \sum_{j=1}^n z_{ij}(k) x_j(k). \quad (4)$$

Подставляя (2) и (4) в (1), получаем систему линейных разностных уравнений, которую удобно записать в векторной форме

$$x(k+1) = A(k) x(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Здесь $x(k)$ – вектор-столбец, составленный из $x_1(k), \dots, x_n(k)$,

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1 - w_1(k) & z_{12}(k) & \dots & z_{1n}(k) \\ z_{21}(k) & 1 - w_2(k) & \dots & z_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(k) & z_{n2}(k) & \dots & 1 - w_n(k) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$w_i(k) = \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Коэффициент $z_{ji}(k)$ условно назовем коэффициентом миграции из i -го региона в j -й. Эти коэффициенты определяются факторами, присущими каждому региону. Данные факторы можно разделить на две группы. К первой группе относятся постоянные факторы, например климат, культурный уровень, политическая стабильность и т.п. Можно ввести некоторую обобщенную характеристику этих факторов – рейтинг i -го региона, которую обозначим через q_i . Ко второй группе относятся экономические факторы. В данной работе в качестве экономического фактора выбирается отношение капитальных вложений $Z_i(k)$ в i -й регион к количеству населения $x_i(k)$. Эту величину $U_i(k) = Z_i(k)/x_i(k)$ можно считать экономической характеристикой привлекательности i -го региона. Таким образом, суммарным фактором для i -го региона является величина

$$h_i(k) = q_i + \frac{Z_i(k)}{x_i(k)}.$$

Заметим, что факторы первого и второго видов имеют разную природу и, следовательно, разную размерность. Поэтому при их сложении факторы должны умножаться на какие-то весовые коэффициенты, которые на практике определяются в результате проведения соответствующего мониторинга. Здесь предполагается, что эти весовые коэффициенты уже учтены.

Согласно гипотезе Тибу [1], происходит перемещение населения из регионов с низким суммарным фактором в регионы с высоким суммарным фактором, причем пропорционально разности между этими факторами. Математически это можно представить как

$$z_{ji}(k) = b_{ji} \sigma \{h_j(k) - h_i(k)\}, \quad (7)$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

b_{ji} – коэффициент, характеризующий активность жителей i -го региона переехать в j -й регион. Например, это может быть связано с наличием средств для проезда из региона в регион, менталитетом и т.п. Кроме того, выбор этих коэффициентов должен обеспечивать выполнение условия (3).

В схеме (5) возможен установившийся режим, когда миграции между регионами нет. Это соответствует случаю, когда факторы всех регионов одинаковы, т.е. когда

$$q_1 + \frac{Z_1(k)}{x_1(k)} = \dots = q_n + \frac{Z_n(k)}{x_n(k)} = h^*. \quad (8)$$

В частности, если капитальные вложения заданы, т.е. $Z_i = \bar{Z}_i, i = 1, \dots, n$, то соответствующее количество населения в установившемся режиме равно

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{Z}_i}{h^* - q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Задача управления

Из предложенной модели следует, что управление миграцией населения может осуществляться за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. Предлагается следующий подход к решению этой задачи. Эффективность экономической деятельности в регионе естественно отразить с помощью производственной функции. Пусть $V_i(x_i)$ – производственная функция i -го региона. Здесь будем учитывать зависимость этой функции только от количества трудового населения. Тогда за критерий эффективности всей системы регионов естественно принять сумму

$$J = \sum_{i=1}^n V_i(x_i). \quad (9)$$

Можно поставить задачу об оптимальном распределении трудовых ресурсов по регионам, при котором функционал (9) максимален. Эта задача достаточно легко решается с помощью метода множителей Лагранжа. Поскольку производственные функции для регионов и общее количество населения постоянны, то получаем постоянные значения $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, при которых (9) максимально. Например, следуя [11, 12], в качестве аппроксимации производственных возможностей региона можно взять квадратическую зависимость

$$V_i = c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2,$$

где c_i и d_i – заданные коэффициенты. Тогда критерием эффективности всей системы регионов будет сумма

$$J = \sum_{i=1}^n \left(c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2 \right). \quad (10)$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^n \left(c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2 \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n x_i - X_0 \right),$$

где μ – множитель Лагранжа, X_0 – общее количество трудовых ресурсов во всех регионах. Приравняв к нулю производные функции L по x_i , получаем, что максимум этой функции достигается при значениях

$$\bar{x}_i = \frac{c_i + \mu}{d_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Множитель Лагранжа находится из условия $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i = X_0$. В результате получаем

$$\mu = \frac{X_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}}.$$

Если оптимальные значения $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ найдены, то из (8) можно найти соответствующие значения капитальных вложений $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n$ в регионы, при которых должен быть установившийся режим. Эти значения должны удовлетворять уравнениям

$$q_1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{x}_1} = \dots = q_n + \frac{\bar{Z}_n}{\bar{x}_n} = h^*.$$

Отсюда

$$\bar{Z}_i = (h^* - q_i) \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Неизвестный параметр h^* находится из условия

$$\sum_{i=1}^n \bar{Z}_i = Z_0, \quad (13)$$

где Z_0 – общий объем капиталовложений, который предполагается также постоянным. Подставляя (12) в (13), получаем

$$h^* = \frac{Z_0 + \sum_{i=1}^n q_i \bar{x}_i}{X_0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

И окончательно

$$\bar{Z}_i = \left(\frac{Z_0 + \sum_{i=1}^n q_i \bar{x}_i}{X_0} - q_i \right) \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

В результате получается следующее решение проблемы миграции. Сначала находятся значения $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ согласно (11) и затем $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n$ согласно (14). Капитальные вложения $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n$ распределяются в регионы. В результате суммарный фактор i -го региона на k -м временном шаге становится равным

$$h_i(k) = q_i + \frac{\bar{Z}_i}{x_i(k)}.$$

Можно показать, что при таком формировании факторов решение уравнения (5) сходится к значениям $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Действительно, если на каком-то k -м шаге $x_i(k) < \bar{x}_i$, то $h_i(k) > h^*$, что приводит к притоку населения и $x_i(k+1) > x_i(k)$. Если $x_i(k) > \bar{x}_i$, то $h_i(k) < h^*$, что приводит к оттоку населения и $x_i(k+1) < x_i(k)$. Скорость сходимости определяют коэффициенты b_{ji} , характеризующие активность жителей регионов.

Пример. Рассматриваются 4 региона. Постоянные факторы заданы в виде $q^T = [1, 2, 3, 4]$, т.е. рейтинг 4-го региона наибольший. Будем считать, что общее число жителей всех регионов $X_0 = 4$ (в условных единицах) и $Z_0 = 2,2$.

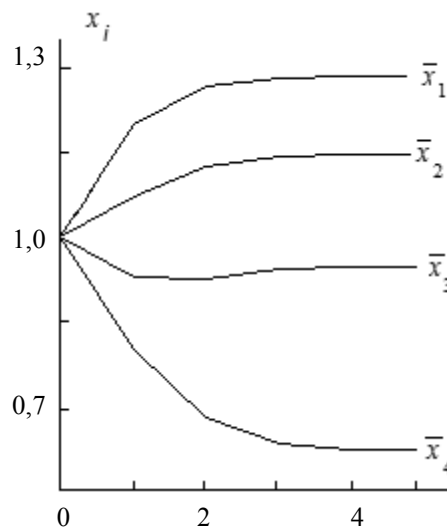


Рис. 1. Перемещение трудового населения

Пусть производственные возможности регионов заданы и в результате решения оптимизационной задачи найдены значения $\bar{x}^T = [0,34; 0,27; 0,24; 0,15]$. Тогда согласно (14) получаем $\bar{Z}^T = [4, 3, 2, 1]$, т.е. в экономическом отношении 1-й регион является предпочтительным. Решение уравнения (6) проводилось при начальных условиях $x_i(0) = 1$ и при коэффициентах $b_{ji} = 0,1$. Результаты решения приведены на рис. 1. Видно, что произошло перемещение населения, причем переход в устойчивое состояние реализовался за 4 шага.

Заключение

Предложена динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных миграционных потоков. Эта модель позволяет формализовать процесс управления перемещением населения за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. В предложенной схеме имеет место установившийся режим, когда миграция между регионами отсутствует. Найден условия существования такого режима. Рассмотрена задача об оптимальном распределении трудовых ресурсов между регионами с целью максимизации суммарной производственной эффективности всех регионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tiebout C. A Pure Theory of Local Expenditures // The Journal of Political Economy. 1956. V. 64. Issue 5. P. 416–424.
2. Oates R., Wallace E. An Essay on Fiscal Federalism // Journal of Economic Literature. 1999. No. 9. P. 1120–1149.
3. Бесстремлянная Г.Е. Применение гипотезы Тибу для российских муниципалитетов // Препринт # BSP/00/045 Р. М. : Российская экономическая школа, 2000. 47 с.
4. О'Салливан А. Экономика города. 4-е изд. М. : Инфра-М, 2002. 706 с.
5. Макаров В.Л., Данков А.Н. Межтерриториальная и электоральная конкуренция // Препринт WP/2002/032. М. : Рос. экономическая школа, 2002. 22 с.
6. Пчелинцев О.С. Региональная экономика в системе устойчивого развития. М. : Наука, 2004. 108 с.
7. Итуэлл Дж., Милгейта М., Ньюмен П. Экономическая теория. М. : ИНФРА-М, 2004. 931 с.
8. Тихомиров Н.П. Демография. Методы анализа и прогнозирования. М. : Экзамен, 2005. 256 с.
9. Weingast B.R. Second generation fiscal federalism: The implications of fiscal incentives // Journal of Urban Economics. 2009. No. 7. P. 279–293.
10. Ларина С.Е. Бюджетная децентрализация: теория, методология и опыт реализации в Российской Федерации. М. : Наука, 2009. 198 с.
11. Ottaviano G.I.P., Thisse J.F. Integration, agglomeration and the political economics of factor mobility // Journal of Public Economics. 2002. No. 4. P. 429–456.
12. Kessler A.S., Lulfesmann C. Tiebout and redistribution in a model of residential and political choice // Journal of Public Economics. 2005. No. 4. P. 501–528.

Параев Юрий Иванович, д-р техн. наук, проф. E-mail: paraev@mail.ru

Рюмкин Александр Иванович, д-р техн. наук. E-mail: airyumkin@mail.ru

Цветницкая Светлана Александровна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: svetasa@sibmail.com

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 13 января 2015 г.

Paraev Yuri I., Ryumkin Alexander I., Tsvetnitskaya Svetlana A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Mathematical model of labour population shift.

Keywords: population shift; Tiebout's hypothesis; distribution of manpower; budgetary federalism.

The dynamic model of Tiebout's hypothesis is offered to study interregional migratory streams. This model allows to formalize the regulation of the population movement by redistribution of capital investments between regions.

There are considered N identical regions having own economy and the main production resources. Let $x_i(k)$ be the amount of people living in the region i at the step k . Write the following difference equation for dynamics of change of the population:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + W_i(k) - Y_i(k), \quad i=1, \dots, n, \quad k=0, 1, \dots, \quad (1)$$

where $W_i(k)$ is the amount of people which arrives to region i at the step k , $Y_i(k)$ is the amount of the population which leaves region i at the step k . Here, for simplicity, natural change (increasing or decreasing) of the population is omitted. It is connected with the fact that this process rather slow. It follows from this assumption that the total population in all regions at each time step remains constant. Then,

$$Y_i(k) = \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) x_i(k) \leq x_i(k), \quad W_i(k) = \sum_{j=1}^n z_{ij}(k) x_j(k), \quad (2)$$

where $z_{ji}(k)$ is the population share of the region i moved to the region j . It is obvious that the following conditions have to be satisfied:

$$z_{ii}(k) = 0, \quad 0 \leq z_{ji}(k) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) \leq 1, \quad i=1, \dots, n.$$

Substituting (2) in (1), we obtain the equations

$$x_i(k+1) = \left(1 - \sum_{j=1}^n z_{ji}(k) \right) x_i(k) + \sum_{j=1}^n z_{ij}(k) x_j(k), \quad i=1, \dots, n, \quad k=0, 1, \dots \quad (3)$$

The coefficients $z_{ji}(k)$ are defined by the region factors, which can be presented as follows:

$$h_i(k) = q_i + \frac{Z_i(k)}{x_i(k)}, i = 1, \dots, n, k = 0, 1, \dots,$$

where q_i are constant factors (climate, cultural level, political stability, etc.), $Z_i(k)/x_i(k)$ are economic factors: the ratio of capital investments $Z_i(k)$ into the region i to the amount of the people $x_i(k)$. According to Tiebout's hypothesis, there is a movement of the population from regions with the low total factor to regions with the high total factor proportionally to the difference of these factors. Mathematically it can be presented as

$$z_{ji}(k) = b_{ji} \sigma\{h_j(k) - h_i(k)\},$$

where

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leq 0, \end{cases}$$

b_{ji} is the coefficient characterizing activity of inhabitants of the region i to remove to the region j . Note that in (3) it is possible a steady state when the migration between regions is lacking. It corresponds to a case when total factors of all regions are identical.

The regulation of migration is carried out by redistribution of capital investments between regions. The task of optimum distribution of manpower resources between regions to maximize the total production efficiency is solved.

REFERENCES

1. Tiebout C. A Pure Theory of Local Expenditures. *The Journal of Political Economy*, 1956, vol. 64, iss. 5, pp. 416-424. DOI: 10.1086/257839
2. Oates R., Wallace E. An Essay on Fiscal Federalism. *Journal of Economic Literature*, 1999, no. 9, pp. 1120-1149. DOI: 10.1257/jel.37.3.1120
3. Besstremyannaya G.E. *Primenenie gipotezy Tibu dlya rossiyskikh munitsipalitetov* [Application of a Tiebout's hypothesis for the Russian municipalities]. Moscow: Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola Publ., 2000. 47 p.
4. O'Sullivan A. *Ekonomika goroda* [City economy]. Translated from English by V.P. Pipeykin. Moscow: Infra-M Publ., 2002. 706 p.
5. Makarov V.L., Dankov A.N. *Mezhterritorial'naya i elektoral'naya konkurentsia* [Interterritorial and electoral competition]. Moscow: Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola Publ., 2002. 22 p.
6. Pchelintsev O.S. *Regional'naya ekonomika v sisteme ustoychivogo razvitiya* [Regional economy in system of a sustainable development]. Moscow: Nauka Publ., 2004. 108 p.
7. Ituell J., Milgeyta M., Newman P. *Ekonomicheskaya teoriya* [The Economic Theory]. Translated from English. Moscow: INFRA-M Publ., 2004. 931 p.
8. Tikhomirov N.P. *Demografiya. Metody analiza i prognozirovaniya* [Demography. Methods of the analysis and forecasting]. Moscow: Ekzamen Publ., 2005. 256 p.
9. Weingast B.R. Second generation fiscal federalism: The implications of fiscal incentives. *Journal of Urban Economics*, 2009, no. 7, pp. 279-293. DOI: 10.1016/j.jue.2008.12.005
10. Larina S.E. *Byudzhnaya detsentralizatsiya: teoriya, metodologiya i opyt realizatsii v Rossiyskoy Federatsii* [Budgetary decentralization: theory, methodology and experience of realization in the Russian Federation]. Moscow: Nauka Publ., 2009. 198 p.
11. Ottaviano G.I.P., Thisse J.F. Integration, agglomeration and the political economics of factor mobility. *Journal of Public Economics*, 2002, no. 4, pp. 429-456. DOI: 10.1016/S0047-2727(00)00166-3
12. Kessler A.S., Lulfesmann C. Tiebout and redistribution in a model of residential and political choice. *Journal of Public Economics*, 2005, no. 4, pp. 501-528. DOI: 10.1016/j.jpubeco.2003.09.007

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

А.М. Горцев, А.А. Калягин, Л.А. Нежелская

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 годы.

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦИО). Поток функционирует в условиях непродлевающего мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Методом максимального правдоподобия решается задача об оценивании длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Ключевые слова: обобщенный полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; функция правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; длительность мертвого времени.

Настоящая статья является непосредственным продолжением исследований обобщенного полусинхронного потока событий (далее поток), начатых в статьях [1–4]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦИО [5]. Можно выделить два класса дважды стохастических потоков событий: 1) потоки событий с интенсивностью, представляющей собой непрерывный случайный процесс; 2) потоки событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков в настоящее время принято называть МС-потоками либо МАР-потоками событий. В [6] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и МАР-потоками событий. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков приведена в [1].

Параметры потоков событий, функционирующих в реальном времени, неизвестны частично, либо полностью, либо представляют собой функцию времени. В подобных случаях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [7]. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [8, 9]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [10, 11].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [12], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем CSMA / CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени применяется метод максимального правдоподобия [13], так как оценки, полученные на основе этого метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположенным знаком.

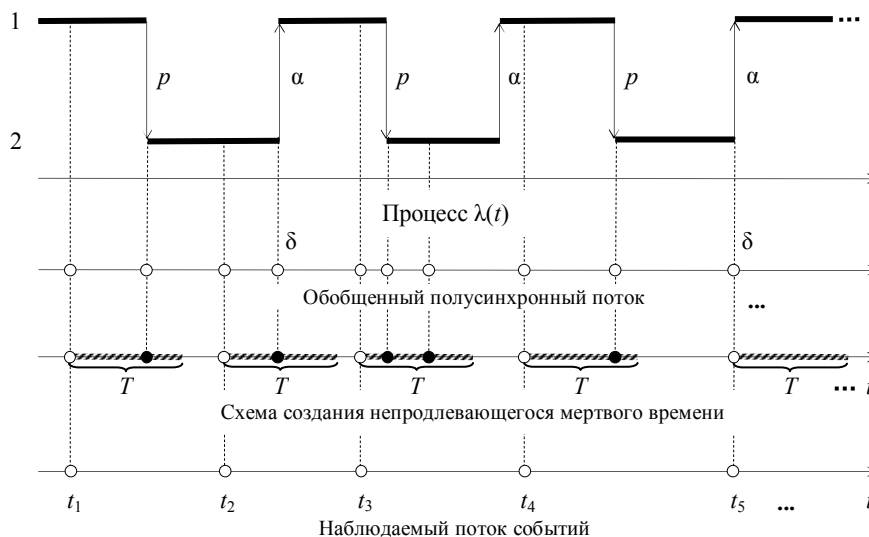


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в

течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквой δ ; штриховка – периоды мертвого времени длительности T ; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Подчеркнем, что если $\delta = 0$, то имеет место обычный полусинхронный поток событий [14]. Отметим также, что в соответствии с классификацией МАР-потоков событий, приведенной в [6], обобщенный полусинхронный поток относится к классу МАР-потоков событий второго порядка.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) принципиально ненаблюдаемые, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [4] плотность вероятностей примет вид

$$p_T(\tau) = 0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad p_T(\tau) = [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau-T)},$$

$$f(T) = \frac{p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}, \quad (1)$$

$$F(T) = (\alpha + \lambda_2) - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad 0 \leq T \leq \tau, \quad \tau \geq 0.$$

В (1) функция $F(T) > 0$ для любых T ($0 \leq T \leq \tau$). Сначала рассмотрим общий случай $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$. Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2, \dots$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1, \dots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента наступления события (с момента t_k , $k = 1, 2, \dots$). Тогда функция правдоподобия, с учетом (1) [13], запишется в виде

$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad \tau_{\min} \geq T.$$

Поскольку поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока $\lambda_i, p, \alpha, \delta$ известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, её реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \{ [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau^{(j)}-T)} +$$

$$+ f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau^{(j)}-T)} \} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $f(T)$ определена в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \leq T \leq \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0, j = \overline{2, k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). Изучим поведение функции $p_T(\tau_m)$, $0 \leq T \leq \tau_m$, как функции переменной T . В дальнейшем изложенная ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m) = [\lambda_1 - \lambda_1 f(T) - f'(T)]e^{-\lambda_1(\tau_m - T)} + [(\alpha + \lambda_2)f(T) + f'(T)]e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_m - T)},$$

$$f'(T) = \frac{p\alpha(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F^2(T)}, \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad \tau_m \geq 0, \quad (3)$$

где $f(T)$, $F(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$ по T .

Лемма 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m при $T = 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$ ($p'_0(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число $\tau_m \geq 0$, то $p'_0(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m . Подставляя $T = 0$ в (3) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p'_0(\tau_m) = \frac{C}{A^2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)} \left\{ \lambda_1 \alpha [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] e^{-\lambda_1 \tau_m} + p(\alpha + \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau_m} \right\}, \quad \tau_m \geq 0,$$

$$C = \lambda_1 \alpha (1 - p + p\delta) + p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_2 + \alpha\delta) > 0, \quad A = \alpha + p(\lambda_2 + \alpha\delta) > 0. \quad (4)$$

Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_0(\tau_m) = 0$, которое с учетом (4) преобразуется к виду

$$B = e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)\tau_m}, \quad B = -\frac{p(\alpha + \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}{\lambda_1 \alpha [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]}. \quad (5)$$

В (5) знак B определяется знаками $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)$ и $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]$.

Из (4) находим

$$p'_0(0) = (C/A)^2 > 0, \quad \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'_0(\tau_m) = 0 \quad \text{при } \tau_m \rightarrow \infty. \quad (6)$$

1. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Тогда $B < 0$ и поэтому уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), следует, что $p'_0(\tau_m) \geq 0$, при этом равенство $p'_0(\tau_m) = 0$ достигается при $\tau_m \rightarrow \infty$, т.е. $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Здесь и далее данный вариант не реализуем, так как неравенства несовместны.

3. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Тогда $B > 0$. Сравним B с единицей. Имеем

$$1 - B = C(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \{ \lambda_1 \alpha [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] \}^{-1}, \quad (7)$$

где C определена в (4). Из (7) следует $B > 1$. В силу этого уравнение (5) корней не имеет, и тогда, с учетом (6), $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

4. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Здесь и далее данный вариант не реализуем, так как неравенства несовместны.

5. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Здесь и далее данный вариант не реализуем, так как неравенства несовместны.

6. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Тогда $B > 0$. Сравним B с единицей. Из (7) следует, что $B < 1$. В силу этого уравнение (5) корней не имеет, и тогда, с учетом (6), $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

7. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Здесь и далее данный вариант не реализуем, так как неравенства несовместны.

8. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Тогда $B < 0$ и поэтому уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), следует, что $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

9. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) = 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] \neq 0$. Тогда $B = 0$ и уравнение (5) решения не имеет. Отсюда следует, что $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

10. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \neq 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] = 0$. Тогда, преобразовывая (5) к виду $\exp[(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)\tau_m] = B^{-1}$, получаем, что последнее уравнение решения не имеет и $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$.

11. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) = 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] = 0$. Одновременное выполнение этих равенств возможно только в одном единственном случае: $\delta = 1$. Последнее влечет за собой выполнение равенства $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0$ (особый случай).

Объединение результатов пунктов 1–11 доказывает лемму 1.

Лемма 2. Производная $p'_T(\tau_m)$ при $T = \tau_m$ строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$), $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство. Подставляя $T = \tau_m$ в (3), получим

$$p'(\tau_m) = \frac{1}{\alpha + p\lambda_1} \left\{ \lambda_1 C + \frac{p\alpha}{F^2(\tau_m)} \varphi_1(\tau_m) (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)\tau_m} \right\},$$

$$\varphi_1(\tau_m) = (\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - p\lambda_1) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha)[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)\tau_m}, \quad \tau_m \geq 0, \quad (8)$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1), C – в (4). Отметим, что при любых значениях величины $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]$ функция $\varphi_1(\tau_m)$ в (8) строго больше нуля ($\varphi_1(\tau_m) > 0$) для $\tau_m \geq 0$. Рассмотрим (8) как функцию $\tau_m \geq 0$. Имеем

$$p'(0) = (C/A)^2 > 0, \quad \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'(\tau_m) = \lambda_1 C / (\alpha + p\lambda_1) > 0, \quad (9)$$

где C , A , определены в (4). Из вида (8) производной $p'(\tau_m)$ следует, что для любых значений $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] \geq 0$ (либо $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$) и $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] \geq 0$ имеет место $p'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Выполнение этого неравенства возможно только тогда, когда

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0, \quad [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение вторую производную $p''_T(\tau_m)$ по переменной T в точке $T = \tau_m$. Используя (8), находим

$$p''(\tau_m) = -\frac{p\alpha(\alpha + \lambda_2)}{F^3(\tau_m)} \varphi_2(\tau_m) (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)\tau_m},$$

$$\varphi_2(\tau_m) = (\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - p\lambda_1) - (\lambda_1 + \lambda_2 + p\lambda_1 + 2\alpha)[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)\tau_m}, \quad \tau_m \geq 0, \quad (11)$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1). Знак выражения (11) определяется знаком функции $\varphi_2(\tau_m)$, так как в (11) величина

$$-\frac{p\alpha(\alpha + \lambda_2)}{F^3(\tau_m)} (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)\tau_m} > 0.$$

Рассмотрим $\varphi_2(\tau_m)$ как функцию переменной τ_m ($\tau_m > 0$). Имеем

$$\varphi_2(0) = C - (\alpha + p\lambda_1)[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)], \quad \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} \varphi_2(\tau_m) = \varphi_2(\infty) = (\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - p\lambda_1) > 0, \quad (12)$$

где C определена в (4). Здесь возможны следующие варианты.

1. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m и $\varphi_2(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Тогда функция $p'(\tau_m)$ есть также возрастающая функция переменной τ_m . С учетом (9) получаем $p'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

2. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m (убывает от $\varphi_2(0)$ до $\varphi_2(\infty) > 0$, оставаясь при этом строго больше нуля ($\varphi_2(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$)). Отсюда следует, что $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Тогда $p'(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной τ_m . С учетом (9) находим $p'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

3. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m) = (\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - p\lambda_1) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует $p'(\tau_m) > 0$, $\tau_m > 0$, т.е. $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m . Тогда, с учетом (9), имеем $p'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

4. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Данный вариант нереализуем, так как при выполнении ограничений (10) равенство $\varphi_2(0) = 0$ недостижимо.

5. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия противоречат условию (12): $\varphi_2(\infty) > 0$.

6. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия входят в противоречие с условиями (12).

7. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Данный вариант нереализуем, так как приведенные ограничения вместе с неравенствами (10) противоречивы.

8. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Данный вариант нереализуем, так как приведенные ограничения противоречат условию (12): $\varphi_2(\infty) > 0$.

9. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия противоречат условиям (12).

Объединение результатов пунктов 1–9 доказывает лемму 2.

Изучим поведение производной $p'_T(\tau_m)$ как функции T на отрезке $[0, \tau_m]$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (3), приводится к виду

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)} &= \Psi(T), \quad \Psi(T) = [F_2(T) / F_1(T)]B, \\ F_1(T) &= \lambda_1 \lambda_2 (\alpha + \lambda_2) [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]^2 + \lambda_1 [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] [\alpha(\alpha + \lambda_2) + p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_2 + \alpha\delta) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} + \\ &+ \lambda_2(1 - p)(\alpha + p\lambda_1) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] + (\alpha + p\lambda_1) [\lambda_1 \alpha (1 - p) + p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_2 + \alpha\delta) + p\lambda_1 \alpha \delta e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \\ F_2(T) &= \lambda_1 \lambda_2 (\alpha + \lambda_2) [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]^2 + (\alpha + \lambda_2) [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] [\lambda_1 \alpha + p\lambda_1 (\lambda_2 + \alpha\delta) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} + \\ &+ \lambda_2 (\alpha + p\lambda_1) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] + (\alpha + p\lambda_1) [\lambda_1 \alpha (1 - p + p\delta) + p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_2 + \alpha\delta) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \\ F_1(T) &> 0, F_2(T) > 0, 0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где B определена в (5). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то будем считать, что $T \geq 0$. Вычислим производную функции $\Psi(T)$ по переменной T . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi'(T) &= - \frac{p(\alpha + \lambda_2)^2 (\alpha + p\lambda_1)^2 (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}{\lambda_1 \alpha [\lambda_1 (1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] F_1^2(T)} \times \\ &\times \{ \lambda_1 (\alpha + \lambda_2)^2 [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]^2 - C(\alpha + p\lambda_1) e^{-2(\alpha + p\lambda_1)T} \}, \end{aligned} \quad (14)$$

где C определена в (4). Сначала рассмотрим случай: $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$, $p \neq 1$. Тогда из (14) вытекает $\Psi'(T) = 0$. Последнее означает, что $\Psi(T)$, определенная (13), равна константе ($\Psi(T) = \Psi$).

Лемма 3. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$, $p \neq 1$, то производная $p'_T(\tau_m)$, $0 \leq \tau_m < \infty$, строго больше нуля ($p'_T(\tau_m) > 0$).

Доказательство. С учетом равенства $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$ уравнение (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)} &= \Psi, \quad \Psi = - \frac{p\alpha(1 - p + p\delta)[\lambda_1(1 - p) - \alpha\delta]}{\lambda_1(1 - p)^2[\lambda_1(1 - p) - \alpha]}, \\ 0 \leq T \leq \tau_m, \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha &\neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь и далее учитываются только реализуемые варианты ограничений, определенные в лемме 1.

1. Пусть $[\lambda_1(1-p) - \alpha\delta][\lambda_1(1-p) - \alpha]^{-1} > 0$. Тогда $\Psi < 0$. Отсюда следует, что уравнение (15) решения не имеет, и вследствие этого, с учетом лемм 1, 2, получаем $p_T'(\tau_m) > 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $[\lambda_1(1-p) - \alpha\delta] > 0$, $[\lambda_1(1-p) - \alpha] < 0$. Тогда $\Psi > 1$. Отсюда следует вывод, аналогичный выводу пункта 1.

3. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $[\lambda_1(1-p) - \alpha\delta] > 0$, $[\lambda_1(1-p) - \alpha] < 0$. Тогда $0 < \Psi < 1$. Отсюда следует вывод, аналогичный выводу пункта 1.

4. Пусть $[\lambda_1(1-p) - \alpha\delta] = 0$. Тогда $\Psi = 0$ и уравнение (15) решения не имеет, что влечет за собой вывод пункта 1.

Преобразуем уравнение (15) к виду $\exp\{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)\} = \Psi^{-1}$, $0 \leq T \leq \tau_m$. Тогда имеет место следующий пункт.

5. Пусть $[\lambda_1(1-p) - \alpha] = 0$. Тогда $\Psi^{-1} = 0$ и преобразованное уравнение решения не имеет, что влечет за собой вывод пункта 1.

Объединение результатов пунктов 1–5 доказывает лемму 3.

В рамках ограничения $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$ возможен еще один вариант: $p = 1$, $\delta = 0$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 4. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$ и $p = 1$, $\delta = 0$, то производная $p_T'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство. В ограничениях леммы 4 уравнение (15) примет вид

$$e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha + \lambda_2) / \lambda_1 \alpha, \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0. \quad (16)$$

Так как $(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha + \lambda_2) - \lambda_1 \alpha = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)$, то уравнение (16) решения не имеет, что, с учетом лемм 1, 2, доказывает лемму 4.

Рассмотрим теперь случай, когда $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) = 0$ либо $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] = 0$.

Лемма 5. Если $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) = 0$ либо $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] = 0$, то производная $p_T'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) = 0$. Тогда из (13) имеем $\Psi(T) = \Psi$ ($\Psi = 0$). Уравнение (13) при этом примет вид $\exp\{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)\} = 0$, $0 \leq T \leq \tau_m$, которое решения не имеет. Преобразуем уравнение (13) к виду $\exp\{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)(\tau_m - T)\} = \Psi^{-1}(T)$, $0 \leq T \leq \tau_m$. Пусть $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] = 0$. Тогда имеем $\Psi^{-1}(T) = \Psi^{-1}$ ($\Psi^{-1} = 0$). В силу этого преобразованное уравнение решения не имеет. Лемма 5 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \neq 0$, $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] \neq 0$. Рассмотрим разность $\Delta F(T) = F_1(T) - F_2(T)$ функций $F_1(T)$, $F_2(T)$ из (13). Имеем

$$\Delta F(T) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)](\alpha + p\lambda_1) e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]. \quad (17)$$

Лемма 6. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \neq 0$, $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] \neq 0$, то производная $p_T'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим варианты:

1. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Из (17) следует $\Delta F(T) < 0$, что влечет за собой $[F_2(T) / F_1(T)] > 1$. Так как соотношение (7) дает $B > 1$, то из (13) находим $\Psi(T) > 1$. Последнее означает, что уравнение (13) решения не имеет. Учитывая результаты лемм 1, 2, получаем $p_T'(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Тогда $\Delta F(T) > 0$, что влечет за собой $[F_2(T) / F_1(T)] < 1$. Соотношение (7) дает $B < 1$. Тогда из (13) вытекает $\Psi(T) < 1$, что приводит к выводу пункта 1.

3. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Тогда $\Delta F(T) > 0$, что влечет за собой $[F_2(T) / F_1(T)] < 1$. Соотношение (7) дает $B > 1$. Вследствие этого из (13) вытекает, что либо $\Psi(T) > 1$, либо $\Psi(T) < 1$. Покажем, что $\Psi(T) > 1$ для любых $T \geq 0$. Учитывая (13), находим

$$1 - \Psi(T) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)CF_2(T) + \lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]\Delta F(T)}{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]F_1(T)} = \frac{\Psi_1(T)}{\Psi_2(T)}, \quad T \geq 0. \quad (18)$$

Числитель $\Psi_1(T)$ в (18) преобразовывается к виду

$$\Psi_1(T) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \{ CF_2(T) + \lambda_1 \alpha (\alpha + p\lambda_1) [\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \times \\ \times [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}] \}, T \geq 0. \quad (19)$$

Непосредственной подстановкой функции $F_2(T)$ из (13) в (19) показывается, что $\Psi_1(T) > 0$ для всех $T \geq 0$. Тогда, так как в (18) знаменатель $\Psi_2(T) < 0$, получаем $1 - \Psi(T) < 0$. Отсюда следует $\Psi(T) > 1$ для $T \geq 0$, что приводит к выводу пункта 1.

4. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Тогда $\Delta F(T) < 0$, что влечет за собой $[F_2(T) / F_1(T)] > 1$. Соотношение (7) дает $B < 1$. Тогда из (13) вытекает, что либо $\Psi(T) > 1$, либо $\Psi(T) < 1$. Покажем, что $\Psi(T) < 1$ для любых $T \geq 0$. Непосредственной подстановкой функции $F_2(T)$ из (13) в (19) показывается, что $\Psi_1(T) < 0$ для всех $T \geq 0$. Тогда, так как в (18) знаменатель $\Psi_2(T) < 0$, то из (18) следует $1 - \Psi(T) > 0$. Отсюда вытекает $\Psi(T) < 1$ для $T \geq 0$, что приводит к выводу пункта 1.

5. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$ либо $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Тогда из (13) следует $\Psi(T) < 0$ для любых $T \geq 0$, что влечет за собой вывод пункта 1.

Отметим, что $\Psi(T)$, определенная в (13), представляет собой одноэкстремальную функцию. Экстремум достигается в точке

$$T^* = -\frac{1}{\alpha + p\lambda_1} \ln \left[\frac{(\alpha + \lambda_2)\sqrt{\lambda_1}}{(\alpha + \lambda_2)\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{(\alpha + p\lambda_1)C}} \right] > 0,$$

являющейся решением уравнения

$$Z(T) = 0, Z(T) = \lambda_1(\alpha + \lambda_2)^2 [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]^2 - C(\alpha + p\lambda_1)e^{-2(\alpha + p\lambda_1)T},$$

вытекающего из уравнения $\Psi'(T) = 0$, где $\Psi'(T)$ определена в (14), C – в (4). В точке Ψ^* , в зависимости от знака величин, входящих в $\Psi'(T)$, и знака функции $Z(T)$ на промежутках $[0, T^*)$, (T^*, ∞) , достигается либо минимум, либо максимум функции $\Psi(T)$.

Объединение результатов пунктов 1–5 доказывает лемму 6.

Теорема 1. При любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ и ограничении $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$ производная $p_T'(\tau_m)$ – положительная функция переменной T ($p_T'(\tau_m) > 0$), $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказывается последовательным применением лемм 1–6.

Теорема 2. При любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ и ограничении $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$ функция $p_T(\tau_m)$ переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m$) достигает своего максимального значения в точке $T = \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

Доказательство вытекает из результата теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{2, k}$, являются возрастающими функциями переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m$).

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает, что функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

4. Решение оптимизационной задачи (2)

Плотность вероятностей $p_T(\tau)$ для особого случая $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0)$ примет вид [4]:

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T; p_T(\tau) = \{\lambda_1 + x(T)[1 - \lambda_1(\tau - T)]\} e^{-\lambda_1(\tau - T)}, \\ x(T) = -\alpha(1 - \delta)x_1(T), x_1(T) = \frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} - \left[\frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} - x_2(T) \right] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \\ x_2(T) = \frac{p\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} \left\{ 1 + \frac{p\alpha(1 - \delta)}{\lambda_1 - [(\lambda_1 - \alpha)(1 - p) - p\alpha\delta]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}} \right\}, \quad 0 \leq T \leq \tau, \tau \geq 0. \quad (20)$$

В обозначениях раздела 3 функция правдоподобия, с учетом (20), запишется в виде

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 \leq \tau_m < T;$$

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \lambda_1 + x(T)[1 - \lambda_1(\tau^{(j)} - T)] \right\} e^{-\lambda_1(\tau^{(j)} - T)}, \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad \tau_m > 0. \quad (21)$$

где $x(T)$ определена в (20).

Лемма 7. Плотность вероятностей $p_T(\tau_m)$, определенная формулой (20), где $\tau = \tau_m$, является возрастающей функцией переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$) при любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$.

Доказательство. Рассмотрим $x(T)$ из (20) как функцию переменной T ($T \geq 0$). Производная функции $x(T)$ выпишется в виде

$$x'(T) = \left\{ p\lambda_1\alpha(1-\delta) / (\lambda_1 - [(\lambda_1 - \alpha)(1-p) - p\alpha\delta]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}) \right\}^2 > 0,$$

$$\lambda_1 - [(\lambda_1 - \alpha)(1-p) - p\alpha\delta]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} > 0, \quad T \geq 0.$$

Отсюда следует, что функция $x(T)$ есть возрастающая функция. Возрастает от $x(0) = -\alpha(1-\delta)p\lambda_1/[\alpha(1-p) + p(\lambda_1 + \alpha\delta)] < 0$ до $\lim_{T \rightarrow \infty} x(T) = -\alpha(1-\delta)p\lambda_1/(\alpha + p\lambda_1) < 0$ при $T \rightarrow \infty$. Тогда, так как функции $[1 - \lambda_1(\tau_m - T)]$, $e^{-\lambda_1(\tau_m - T)}$, входящие в выражение (20) для $p_T(\tau_m)$, есть возрастающие функции переменной T , то плотность вероятностей $p_T(\tau_m)$ есть также возрастающая функция переменной T , $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 \leq \tau_m < \infty$. Лемма 7 доказана.

Таким образом, для особого случая справедливы теоремы 1, 2 и их следствия из раздела 3.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала $(0, t)$) потока событий вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_m = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$) и полагается $\hat{T} = \tau_m$. Подчеркнем, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенная ($\tau_m > T$); её несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 80–87.
4. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
5. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
7. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
8. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
9. Gortsev A.M., Nezhe'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
10. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.

11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
12. Анапосович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
13. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, проф. E-mail: amgt@fpmk.tsu.ru

Калягин Алексей Андреевич. E-mail: redall@inbox.ru

Нежелская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 сентября 2014 г.

Gortsev Alexander M., Kalyagin Aleksey A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Russian Federation). **Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semisynchronous flow of events.**

Keywords: generalized semisynchronous flow of events; unprolonging dead time; likelihood function; maximum likelihood estimation; dead time value.

The generalized semisynchronous flow of events, which intensity is a piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two intensities λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$), is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, the Poisson flow of events has the intensity λ_i , $i = 1, 2$. The transition from the first state of the process $\lambda(t)$ into the second state is possible only at the moment of occurring event, thus, the transition carries out with probability p ($0 < p \leq 1$); with probability $1 - p$ process $\lambda(t)$ remains in the first condition. In this case, the duration of process stay in the first state is a random variable with exponential distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. The transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, the duration of process stay in the second state is distributed according exponential law: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. By the transition from the second state into the first one an additional event in the first state is initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The flow is considered in the condition of constant dead time. The dead time period of the fixed duration T begins after every registered event at moment t_i . During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next T -interval of dead time and so on (unprolonging dead time).

Process $\lambda(t)$ and the types of events (event from Poisson flows and additional events) are fundamentally unobservable and observable are only temporary moments of the events $t_1, t_2, \dots$. We consider the steady (stationary) mode of operation of the observed flow of events, so transients are neglected on the observation interval (t_0, t) , where t_0 and t are the start and end of observations. It is necessary at the end of observations (at time t) to implement maximum likelihood estimate $\hat{T}$ of the dead time T .

Let $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2, \dots$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ be the sequence of the measured (by observing the flow during the observation interval $(0, t)$) values of the length of intervals between adjacent flow events. We order quantities $\tau_1, \dots, \tau_k$ ascending: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$.

The objective is to estimate $\hat{T}$ the duration of the construction of the dead time (assuming that the other flow parameters λ_i , p , α , δ are known), by solving the optimization problem:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \{ [1 - f(T)] \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau^{(j)} - T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau^{(j)} - T)} \} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0,$$

$$f(T) = \frac{p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}.$$

The value of T , at which $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ reaches its global maximum, is the estimate $\hat{T}$ of the duration of the dead time. It is proved that the global maximum occurs at $\hat{T} = \tau_{\min}$.

REFERENCES

1. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 66-81. (In Russian).
2. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4(13), pp. 50-60. (In Russian).
3. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 2(19), pp. 80-87. (In Russian).

4. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2014, no. 2(27), pp. 19-29. (In Russian).
5. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU Publ., 2000. 175 p.
6. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1(14), pp. 13-21. (In Russian).
7. Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queueing systems]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1978. 208 p.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal'naya otsenka sostoyaniy MAR-potoka sobytiy v usloviyakh neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni [Optimal states estimation of MAP flows of events in the condition of constant dead time]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no. 8, pp. 49-63.
9. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
10. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenka parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Parameters estimation of synchronous double stochastic flow of events]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2008, no. 9, pp. 76-93.
11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radioengineering*, 2004, no. 10, pp. 8-16. (In Russian).
12. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavskiy A.F. *Staticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe Publ., 1988. 254 p.
13. Shulenin V.P. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL Publ., 2012. 540 p.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015

О.В. Губина, Г.М. Кошкин

ОЦЕНИВАНИЕ АКТУАРНОЙ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОЖИЗНЕННОЙ РЕНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00744).

Рассматривается задача оценивания актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты. Синтезируется непараметрическая оценка пожизненной ренты. Находятся главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и её предельное распределение. Результаты статистического моделирования показывают, что качество оценивания улучшается с ростом объёма выборки.

Ключевые слова: непараметрические оценки; полное страхование жизни; пожизненная рента; асимптотическая нормальность; среднеквадратическая ошибка.

Суть пожизненной ренты согласно [1. С. 170] состоит в том, что начиная с момента $t = 0$ человек раз в год получает определенную сумму, которую мы примем в качестве единицы измерения денежных сумм, причем выплаты производятся только в течение жизни человека.

Известно, что расчет характеристик пожизненной ренты основан на использовании характеристик соответствующего вида страхования. Так, среднее значение современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты (см.: [1. С. 184]) определяется формулой

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta},$$

где $\bar{A}_x$ – нетто-премия (среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании в возрасте x лет); δ – интенсивность процентов.

Пусть x – возраст человека в момент $t = 0$ начала платежей, X – продолжительность его жизни, $T_x = X - x$ – остаточная продолжительность жизни. Введём случайную величину

$$z = \frac{1 - e^{-\delta T_x}}{\delta}, T_x > 0.$$

Тогда пожизненная рента определяется формулой (ср.: [2]):

$$\bar{a}_x(\delta) = M(z) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi(x, \delta)}{S(x)} \right), \quad (1)$$

где M – символ математического ожидания, $S(x) = P(X > x)$ – функция выживания,

$$\Phi(x, \delta) = -e^{\delta x} \int_x^\infty e^{-\delta t} dS(t).$$

В настоящей работе рассмотрена задача оценивания актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты, выполнен синтез непараметрической оценки пожизненной ренты, исследованы асимптотические свойства предложенной оценки. Приводятся результаты моделирования.

1. Оценка пожизненной ренты

Пусть имеется случайная выборка $X_1 \dots X_N$ продолжительностей жизни N индивидов. Оценим отдельно числитель и знаменатель в (1). Воспользуемся вместо неизвестной функции выживания $S(x)$ её непараметрической оценкой:

$$S_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i > x),$$

где $I(A)$ – индикатор события A .

Подставив $S_N(x)$ в формулу (1), получим следующую оценку пожизненной ренты:

$$\bar{a}_x^N(\delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{e^{\delta x}}{S_N(x) \cdot N} \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x) \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi_N(x, \delta)}{S_N(x)} \right), \quad (2)$$

где $\Phi_N(x, \delta) = \frac{e^{\delta x}}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x)$.

2. Среднеквадратическая ошибка оценки

Найдем главную часть асимптотической среднеквадратической ошибки (СКО) и порядок смещения оценки (2). Для этого нам понадобится теорема 1 из [3], которую ниже сформулируем в виде Леммы.

Введем обозначения согласно [3]: $t_N = (t_{1N}, t_{2N}, \dots, t_{sN})^T$ – s -мерная векторная статистика с компонентами $t_{jN} = t_{jN}(x) = t_{jN}(x; X_1, \dots, X_N)$, $j = \overline{1, s}$, $x \in R^a$, R^a – a -мерное евклидово пространство; функция $H(t): R^s \rightarrow R^1$, где $t = t(x) = (t_1(x), \dots, t_s(x))^T$ – s -мерная ограниченная вектор-функция; $N_s(\mu, \sigma)$ – s -мерная нормально распределенная случайная величина с вектором средних $\mu = \mu(x) = (\mu_1, \dots, \mu_s)^T$ и ковариационной матрицей $\sigma = \sigma(x)$;

$$\nabla H(t) = (H_1(t), \dots, H_s(t))^T, \quad H_j(t) = \frac{\partial H(z)}{\partial z_j} \Big|_{z=t}, \quad j = \overline{1, s};$$

$\Rightarrow$ – знак сходимости по распределению (слабой сходимости); $\|x\|$ – евклидова норма вектора x .

Лемма. Пусть:

- 1) функция $H(t)$ – дважды дифференцируема, причем $\nabla H(t) \neq 0$;
- 2) $M\|t_N - t\|^i = O(d_N^{-i/2})$, $i = 1, 2, \dots$.

Тогда $\forall k = 1, 2, \dots$:

$$\left| M[H(t_N) - H(t)]^k - M[\nabla H(t) \cdot (t_N - t)]^k \right| = o(d_N^{-(k+1)/2}). \quad (3)$$

Заметим, что, полагая в формуле (3) $k = 1$, получаем главную часть смещения оценки $H(t_n)$, а при $k = 2$ – главную часть её СКО.

Теорема 1. Если $S(x) > 0$, $S(t)$ непрерывна в точке x , то:

- 1) для смещения оценки ренты выполняется соотношение

$$|b(\bar{a}_x^N(\delta))| = o(N^{-1});$$

- 2) СКО оценки определяется выражением

$$u^2(\bar{a}_x^N(\delta)) = M(\bar{a}_x^N(\delta) - \bar{a}_x(\delta))^2 = \frac{\sigma(\bar{a}_x(\delta))}{N} + o(N^{-3/2}),$$

где $\sigma(\bar{a}_x(\delta))$ задается формулой (4).

Доказательство. Для оценки $\bar{a}_x^N(\delta)$, задаваемой формулой (2), в обозначениях приведенной выше леммы имеем

$$\begin{aligned} t_N &= (\Phi_N(x, \delta), S_N(x))^T; \quad d_N = N; \quad t = (\Phi(x, \delta), S(x))^T; \\ H(t) &= \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi(x, \delta)}{S(x)} \right) = \bar{a}_x; \quad H(t_N) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi_N(x, \delta)}{S_N(x)} \right) = \bar{a}_x^N; \\ \nabla H(t) &= (H_1(t), H_2(t))^T = \left(\frac{1}{\delta} \frac{1}{S(x)}, -\frac{1}{\delta} \frac{\Phi(x, \delta)}{S^2(x)} \right)^T \neq 0. \end{aligned}$$

Известно, что $S_N(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $S(x)$. Покажем, что $\Phi_N(x, \delta)$ является несмещенной оценкой функционала $\Phi(x, \delta)$:

$$M\Phi_N(x, \delta) = \frac{e^{\delta x}}{N} M \left\{ \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x) \right\} = \Phi(x, \delta).$$

Теперь для оценки $\Phi_N(x, \delta)$ вычислим дисперсию:

$$D\Phi_N(x, \delta) = D \left\{ \frac{e^{\delta x}}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i > x) e^{-\delta X_i} \right\} = \frac{e^{2\delta x}}{N^2} \sum_{i=1}^N D \{ I(X_i > x) e^{-\delta X_i} \} = \frac{1}{N} (\Phi(x, 2\delta) - \Phi^2(x, \delta)).$$

Отношение двух несмещенных оценок может иметь смещение. Нахождение смещения отношения, как правило, является сложной задачей и требует использования результатов работы [3]. Найдем порядок смещения оценки. Так как $M(t_N - t) = 0$, то

$$\left| M(\bar{a}_x^N(\delta) - \bar{a}_x(\delta)) - M[\nabla H(t)(t_N - t)] \right| = \left| M(\bar{a}_x^N(\delta) - \bar{a}_x(\delta)) \right| = \left| b(\bar{a}_x^N(\delta)) \right| = o(N^{-1}).$$

Теперь найдем компоненты ковариационной матрицы статистики t_N :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= ND\{\Phi_N(x, \delta)\} = \Phi(x, 2\delta) - \Phi^2(x, \delta); \\ \sigma_{22} &= ND\{S_N(x)\} = S(x)(1 - S(x)); \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= N \operatorname{cov}(S_N(x), \Phi_N(x, \delta)) = N(M\{S_N(x)\Phi_N(x, \delta)\} - M\{S_N(x)\}M\{\Phi_N(x, \delta)\}) = \\ &= (1 - S(x))\Phi(x, \delta).\end{aligned}$$

Используя предыдущий результат о смещении и найденную ковариационную матрицу, получаем СКО оценки:

$$u^2(\bar{a}_x^N(\delta)) = M[\nabla H(t)(t_N - t)]^2 + O(N^{-3/2}) = \frac{\sigma(\bar{a}_x)}{N} + O(N^{-3/2}),$$

где

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{a}_x(\delta)) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_j(t) \sigma_{jp} H_p(t) = H_1^2(t) \sigma_{11} + H_2^2(t) \sigma_{22} + 2H_1(t)H_2(t) \sigma_{12} = \\ &= \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\Phi(2\delta)}{S^2(x)} - \frac{3\Phi^2(x, \delta)}{S^3(x)} + \frac{2\Phi^2(x, \delta)}{S^2(x)} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Теорема доказана.

3. Асимптотическая нормальность оценки

Для нахождения предельного распределения оценки (2) нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 2 (центральная предельная теорема в многомерном случае) [4. С 178–202]. Если $t_1, t_2, \dots, t_N, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных s -мерных векторов

$$\begin{aligned}M\{t_s\} &= 0, \sigma(x) = M\{t_s^T t_s\}, \\ S_N &= \sum_{s=1}^N t_s,\end{aligned}$$

то при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} \Rightarrow N_s(0, \sigma(x)).$$

Теорема 3 (об асимптотической нормальности $H(t_N)$) [5]. Пусть:

- 1) $\sqrt{N} \cdot t_N \Rightarrow N_s\{\mu, \sigma(x)\}$;
- 2) функция $H(z)$ дифференцируема в точке μ , $\nabla H(\mu) \neq 0$.

Тогда $\sqrt{N}(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow N_1\left\{\sum_{j=1}^s H_j(\mu)\mu_j, \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s H_j(\mu)\sigma_{jp}H_p(\mu)\right\}$.

Теорема 4 (о предельном распределении оценки (2)). В условиях теоремы 1

$$\sqrt{N}(\bar{a}_x^N(\delta) - \bar{a}_x(\delta)) \Rightarrow N_1(0, \sigma(\bar{a}_x(\delta))). \quad (5)$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 2 имеем $s = 2, \sigma(x) = \sigma(\bar{a}_x(\delta))$. Таким образом,

$$\sqrt{N}\{(\Phi_N(x, \delta), S_N(x)) - (\Phi(x, \delta), S(x))\} \Rightarrow N_2(0, \sigma(\bar{a}_x(\delta))),$$

где

$$\sigma(\bar{a}_x(\delta)) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Функция $H(z)$ дифференцируема в точке $t = (\Phi(x, \delta), S(x))$ и $\nabla H(t) \neq 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 3 и утверждение (5) справедливо. Теорема доказана.

4. Статистическое моделирование

Рассмотрим модель де Муавра, для которой продолжительность жизни X индивида распределена равномерно в интервале $(0, \omega)$, где ω – предельный возраст, а пожизненная рента, согласно (1), принимает вид

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)}.$$

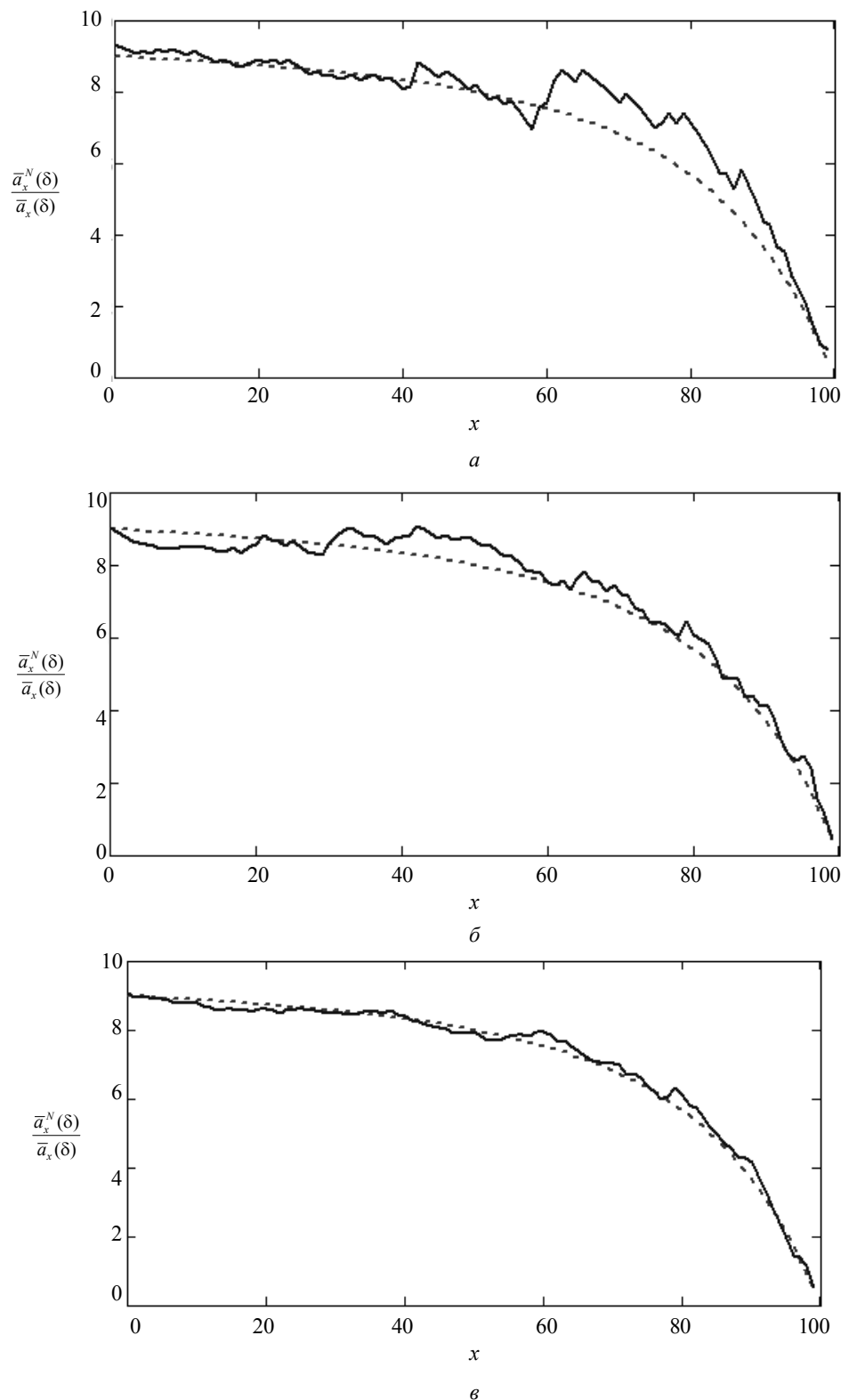


Рис.1. Зависимость пожизненной ренты $\bar{a}_x(\delta)$ и её оценки $\bar{a}_x^N(\delta)$ от возраста x при объёмах выборок N : $a - 50$; $b - 100$; $v - 500$

На рис. 1 представлены пожизненные ренты и их оценки, построенные по выборкам объема $N = 50, 100, 500$ независимых случайных величин $X_1, \dots, X_N$, равномерно распределенных на интервале $(0, 100)$ при интенсивности процентов $\delta = 0,09531 (9,531\%)$. Заметим, что при такой интенсивности процентов эффективная годовая процентная ставка $i = e^\delta - 1 = 0,1 (10\%)$.

Будем характеризовать качество оценок, представленных на рис. 1, следующими эмпирическими среднеквадратическими ошибками:

$$G(N, \delta) = \frac{\sum_{x=0}^{99} (\bar{a}_x(\delta) - \bar{a}_x^N(\delta))^2}{N}, \quad N = 50, 100, 500.$$

В результате вычислений получаем

$$G(50, 0,09531) = 0,75935, \quad G(100, 0,09531) = 0,16183, \quad G(500, 0,09531) = 0,00522,$$

т.е. качество оценивания улучшается с ростом объема выборки.

Таким образом, в рамках нашей модели современная стоимость полной непрерывной пожизненной ренты для человека в возрасте $x = 45$ лет при $\delta = 0,09531$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. равна

$$12\,000 \cdot \bar{a}_{45}(0,09531) = 12\,000 \cdot 8,501 = 102\,012 \text{ руб.}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача оценивания современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты. Доказаны асимптотические свойства оценки: несмещенность, состоятельность и нормальность. Находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки предложенной оценки. Статистическое моделирование в рамках модели де Муавра показывает, что качество оценивания по эмпирическому критерию $G(N, \delta)$ улучшается с ростом объема выборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Анкил, 2002. 262 с.
2. Кошкин Г.М., Лопухин Я.Н. Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 2. С. 315–329.
3. Кошкин Г.М. Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 604–618.
4. Кошкин Г.М. Введение в математику страхования жизни. Томск: ТГУ, 2004. 112 с.
5. Кошкин Г.М., Ланкина Н.В. Непараметрическое оценивание нетто-премий для смешанного страхования жизни // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314, № 5. С. 236–240.

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, проф. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

Губина Оксана Викторовна. E-mail: gov7@mail.ru

Томский государственный университет

Gubina Oksana V., Koshkin Gennady M. (Tomsk State University. Russian Federation).

Estimation of actuarial present value of the whole continuous life annuity.

Keywords: non-parametric estimation; whole life insurance; life annuity; asymptotic normality; mean square error.

Consider the estimation problem of the present value for the whole continuous life annuity

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta},$$

where $\bar{A}_x$ is a net premium (mathematical expectation of the present value of an insured unitary sum for the whole life insurance at age x), δ is a force of interest.

As an estimate $\bar{a}_x(\delta)$ from a random lifetime sample $X_1 \dots X_N$, we take the statistics

$$\bar{a}_x^N(\delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{e^{\delta x} \sum_{i=1}^N e^{-\delta X_i} I(X_i > x)}{\sum_{i=1}^N I(X_i > x)} \right),$$

where $I(A)$ is an indicator of a set A .

The main part of the asymptotic mean square error of the estimate $\bar{a}_x^N(\delta)$ is found, and the asymptotic normality of $\bar{a}_x^N(\delta)$ is proved. The simulations were carried out for the de Moivre model with the limiting age 100 years. In this case,

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)},$$

the present value of the whole continuous life annuity for a person at the age $x = 45$ years, by $\delta = 0.09531$ and monthly payments in the size of 1000 rubles, is equal to

$$12000 \cdot \bar{a}_{45}(0.09531) = 12000 \cdot 8,501 = 102012 \text{ rub.}$$

The simulations show that the empirical mean square errors of life annuity estimates decrease when the sample size N increases.

REFERENCES

1. Falin G.I. *Matematicheskie osnovy teorii strakhovaniya zhizni i pensionnykh skhem* [Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes]. Moscow: Ankil Publ., 2002. 262 p.
2. Koshkin G.M., Lopukhin Ya.N. Otsenivanie netto-premiy v modelyakh dolgosrochnogo strakhovaniya zhizni [Estimation of net premiums in the models of long-term life insurance]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2003, vol. 10, issue 2, pp. 315-329.
3. Koshkin G.M. Momenty otkloneniy otsenki podstanovki i ee kusochno-gladykh approksimatsiy [Moments of deviations of substitution estimate and its piecewise-smoothed approximations]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 604-618.
4. Koshkin G.M. *Vvedenie v matematiku strakhovaniya zhizni* [Introduction to Mathematics of Life Insurance]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2004. 112 p.
5. Koshkin G.M., Lankina N.V. Neparametricheskoe otsenivanie netto-premiy dlya smeshannogo strakhovaniya zhizni [Nonparametric estimation of net premiums for the mixed life insurance]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2009, vol. 314, no. 5, pp. 236-240.

M.I. Kusainov

ON OPTIMAL ADAPTIVE PREDICTION OF MULTIVARIATE ARMA(1,1) PROCESS

The problem of asymptotic efficiency of adaptive one-step predictors for ARMA(1,1) process with unknown dynamic parameters is considered. The predictors are based on the truncated estimators of the unknown matrix. The truncated estimation method is a modification of the truncated sequential estimation method, that yields estimators with a given accuracy by samples of fixed size. The criterion of prediction optimality is based on the loss function, defined as a linear combination of sample size and squared prediction error's sample mean. The cases of known and unknown variance of the noise model are studied. In the latter case the optimal sample size is a special stopping time.

Keywords: adaptive predictors; asymptotic risk efficiency; multivariate ARMA; optimal sample size; stopping time; truncated parameter estimators.

According to Ljung's concept of construction of complete probabilistic models of dynamic systems, the prediction is a crucial part of it (see [1, 2]). A model is said to be useful if it allows one to make predictions of high statistical quality. Models of dynamic systems often have unknown parameters, which demand estimation in order to build adaptive predictors. The quality of adaptive prediction is explicitly dependent on the chosen estimators of model parameters.

There is a wide variety of possible estimation methods. For example, the sequential estimation method makes it possible to obtain estimators with guaranteed accuracy by samples of finite but random and unbounded size (see, e.g., [3] among others). The more modern truncated sequential estimation method yields estimators with prescribed accuracy by samples of random but bounded size (see, e.g., [4]).

This work suggests predictors based upon the truncated estimators of parameters introduced in [5, 6] as a modification of the truncated sequential estimators. Truncated estimators were constructed for ratio type functionals and are designed to use samples of fixed (non-random) size and have guaranteed accuracy in the sense of the L_{2m} -norm, $m \geq 1$.

The requirement of both good quality of predictions and reasonable duration of observations needed to achieve one is formulated as a risk efficiency problem. The criterion is given by certain loss functions and optimization is performed based on it. The loss function describing sample mean of squared prediction errors and sample size as well as the corresponding risk as applied to scalar AR(1) were examined in [7]. It was shown that the least squares estimators of the dynamic parameter are asymptotically risk efficient. Later, this result was refined and extended to other stochastic models in [8], using the sequential estimators of unknown parameters.

In this paper we construct and investigate real-time predictors based on truncated estimators in the case of more general model. We consider the problem of the risk minimization associated with size of a sample and predictions of values of a stable multivariate ARMA(1,1) process with unknown dynamic matrix parameter. The proposed procedure is shown to be asymptotically risk efficient as the cost of prediction error tends to infinity.

The same problem for scalar AR(1) case was considered in [9], multivariate AR(1) in [10]. The ARMA model was studied in [1, 2] among others. A thorough review of risk efficient parameter estimation and adaptive prediction problem for autoregressive processes was recently made in [11] (see the references therein as well).

1. Problem statement

Consider the multivariate stable ARMA(1,1) process satisfying the equation

$$x(k) = \Lambda x(k-1) + \xi(k) + M\xi(k-1), \quad k \geq 1, \quad (1)$$

where Λ and M are $p \times p$ matrix parameters with eigenvalues from the unit circle to provide the process stability (henceforth we shall refer to such matrices as "stable" ones). We assume the parameter Λ to be unknown

and M to be known. The random vectors $\xi(k)$ for $k \geq 1$ are independent and identically distributed (i.i.d.) with zero mean and finite variance $\sigma^2 = E \|\xi(1)\|^2$, we also assume the components $\xi_j(k)$, $j = \overline{1, p}$, to be uncorrelated and i.i.d. so that the covariance matrix $\Sigma = E\xi(1)\xi'(1)$ is diagonal with elements σ^2 / p . Denote the Λ stable region $\Lambda^0 \subset \mathbb{R}^{p \times p}$.

It is known that the optimal in the mean square sense one-step predictor is the conditional expectation of the process with respect to its past, i.e.

$$x^{opt}(k) = \Lambda x(k-1) + M \xi(k-1), \quad k \geq 1.$$

Since both the parameter Λ and the value of $\xi(k-1)$ are unknown, it is natural to replace them with some estimators $\tilde{\Lambda}_k$ and $\tilde{\xi}(k-1)$, which we specify in Section 2 below.

Define adaptive predictors as the following (see, e.g., [1, 12]):

$$\tilde{x}(k) = \tilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1) + M \tilde{\xi}(k-1), \quad k \geq 1, \quad (2)$$

for which the corresponding prediction errors have the following form

$$\tilde{e}(k) = x(k) - \tilde{x}(k) = (\Lambda - \tilde{\Lambda}_{k-1})x(k-1) + M(\xi(k-1) - \tilde{\xi}(k-1)) + \xi(k).$$

Let $e^2(n)$ denote the sample mean of squared prediction error

$$e^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{e}(k)\|^2.$$

Define the loss function

$$L_n = \frac{A}{n} e^2(n) + n,$$

where the parameter $A(>0)$ is the cost of prediction error.

The corresponding risk function

$$R_n = E_0 L_n = \frac{A}{n} E_0 e^2(n) + n, \quad (3)$$

E_0 denotes expectation under the distribution P_0 with the given parameter $\theta = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{pp}, \mu_{11}, \dots, \mu_{pp}, \sigma^2)$. Define the set Θ such that for $\theta \in \Theta$ the matrices Λ and M are stable and $\sigma^2 > 0$.

The main aim is to minimize the risk R_n on the sample size n .

We consider the cases of known and unknown σ^2 .

2. Main result

In this section we solve the stated optimization problem under different conditions on model parameters.

We use, similarly to [10], the truncated estimation method introduced in [5]. This method makes it possible to obtain the ratio type estimators with guaranteed accuracy using a sample of fixed size. Such quality may essentially simplify investigation of analytical properties in various adaptive procedures.

Let the truncated estimators of the autoregressive parameter Λ be based on the following Yule-Walker type estimators

$$\Lambda_k = \bar{\Phi}_k \bar{G}_k^{-1}, \quad k \geq 2, \quad \Lambda_0 = \Lambda_1 = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\Phi}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k x(i)x'(i-2), \quad \bar{G}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k x(i-1)x'(i-2)$$

and have the form

$$\tilde{\Lambda}_k = \Lambda_k \chi(|\bar{\Delta}_k| \geq H_k), \quad k \geq 2. \quad (5)$$

Here $\bar{\Delta}_k = \det(\bar{G}_k)$, the notation $\chi(B)$ means the indicator function of the set B and

$$H_k = \log^{-1/2} k. \quad (6)$$

We note that according to [5], H_k can be taken as any decreasing slowly changing positive function.

We take the estimators for $\xi(k)$ in the following form

$$\tilde{\xi}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (x(k-i) - \tilde{\Lambda}_k x(k-1-i)), \quad k \geq 1. \quad (7)$$

This way the prediction error can be rewritten as

$$\tilde{e}(k) = \xi(k) + (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i).$$

2.1. Known σ^2 case

If the noise variance σ^2 is known, instead of Λ_k in (2) we shall use the projection of estimators (5) onto a closed ball $B \in R^{p \times p}$, such that $\Lambda^0 \subset B$

$$\Lambda_k^* = \text{proj}_{[-1,1]} \tilde{\Lambda}_k,$$

ensuring

$$\|\Lambda_k^* - \Lambda\| \leq d_B, \quad (8)$$

where d_B is the diameter of B . Given that σ^2 is known, the property (8) allows one to weaken the noise moment conditions compared to the more general case of unknown σ^2 (see Section 2.2 below).

Rewrite the formulae accordingly

$$\begin{aligned} \xi^*(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (x(k-i) - \Lambda_k^* x(k-1-i)), \quad x^*(k) = \Lambda_{k-1}^* x(k-1) + M \xi^*(k-1), \\ e^*(k) &= x(k) - x^*(k) = \xi(k) + (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i), \\ e_*^2(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|e^*(k)\|^2, \quad L_n = \frac{A}{n} e_*^2(n) + n, \quad R_n = E_0 L_n = \frac{A}{n} E_0 e_*^2(n) + n. \end{aligned}$$

To minimize the risk R_n we rewrite it in the form

$$R_n = \frac{A}{n} (\sigma^2 + D_n) + n, \quad (9)$$

where

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0 \|x^*(k) - x^{opt}(k)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0 \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2.$$

We shall use the properties of the estimators $\tilde{\Lambda}_k$ given in Lemma 1 below.

Define $k_0 = \max\{p, [e^{|\Lambda|^2}]_1\}$, where $[a]_1$ denotes the integer part of a and

$$\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_k, \quad P_0 - \text{a.s.}$$

Now we establish the conditions on the system parameters, under which $\Delta \neq 0$. It can be shown, similarly to, e.g., [13], that due to ergodicity of the process $(x(k))_{k \geq 0}$:

$$\bar{G}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k x(i-1)x'(i-2) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G, \quad P_0 - \text{a.s.},$$

where

$$\begin{aligned} G &= \Lambda F + M \Sigma, \\ F &= \sum_{i \geq 0} \Lambda^i S \Lambda'^i, \quad S = \Lambda \Sigma M' + M \Sigma \Lambda' + \Sigma + M \Sigma M'. \end{aligned} \quad (10)$$

The condition for $\Delta \neq 0$ is thus nondegeneracy of G . For example, in the scalar case $p=1$ we have

$$G = \frac{(\Lambda + M)(1 + \Lambda M)}{1 - \Lambda^2} \sigma^2,$$

which is the first order autocovariance; the condition is $\Lambda + M \neq 0$ as stability of the process implies $1 + \Lambda M \neq 0$.

From here on C denotes those non-negative constants, the values of which are not critical.

Lemma 1. Assume the model (1) and let for some integer $m \geq 1$ the conditions

$$E \|\xi(1)\|^{4pm} < \infty, \quad E \|x(0)\|^{4pm} < \infty \quad (11)$$

be true. Assume also that the matrix G defined in (10) is nondegenerate. Then the truncated estimators $\tilde{\Lambda}_k$ satisfy

(i) for $1 \leq k < k_0$

$$E_0 \|\tilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq C; \quad (12)$$

(ii) for $k \geq k_0$

$$E_0 \|\tilde{\Lambda}_k - \Lambda\|^{2m} \leq \frac{C \log^m k}{k^m}. \quad (13)$$

The proof of Lemma 1 is similar to that of the assertion (31) in [5] and Lemma 1 in [10].

Now we rewrite D_n in the form

$$\begin{aligned} D_n = & \frac{\sigma^2}{n \cdot p} \sum_{k=1}^n \|M^k\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 - \\ & - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n E_0 [(-M)^k \xi(0)]^* \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i E_0 (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i). \end{aligned} \quad (14)$$

Consider the first summand. It is known that $M^k = TJ^k T^{-1}$, where J is Jordan canonical form of M and the columns of T are generalized eigenvectors of M . It then can be shown that $\|M^k\| \leq C \max |\mu_i|^k$, where $\mu_i, i = \overline{1, p}$ are the eigenvalues of M . Boundedness of the series now follows from the stability of M , so we have

$$\frac{\sigma^2}{n \cdot p} \sum_{k=1}^n \|M^k\|^2 \leq \frac{C}{n}.$$

Consider the second summand of (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} E_0 \|M^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i)\|^2 + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{i=0}^{k-1} E_0 \|\Lambda_{k-1}^* - \Lambda\|^2 \|M^j x(k-1-j)\| \cdot \|M^i x(k-1-i)\|. \end{aligned} \quad (15)$$

If the conditions $E \|\xi(1)\|^{4p} < \infty, E \|x(0)\|^{4p} < \infty$ hold then using the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, (8) and (13) we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} E_0 \|M^i (\Lambda_{k-1}^* - \Lambda) x(k-1-i)\|^2 \leq \\ & \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{E_0 \|\Lambda_{k-1}^* - \Lambda\|^2 \|M^i\|^2} \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\log^{1/2} k}{k^{1/2}} \leq \frac{C \log^{1/2} n}{n^{1/2}}. \end{aligned}$$

The second summand of (15) and the third summand of D_n itself are treated the same way and don't have impact on the result. Thus, usage of estimators Λ_k^* in adaptive predictors yields

$$D_n \leq C n^{-1/2} \log^{1/2} n = o(1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Considering (9), the stated risk minimization problem reduces to minimization of the principal term

$$R_n \approx \frac{A}{n} \sigma^2 + n \longrightarrow \min_n.$$

Since the parameter σ^2 is known, the expression can be easily minimized with the optimal sample size

$$n_A^o = A^{1/2} \sigma. \quad (16)$$

The corresponding approximate minimal risk value is

$$R_{n_A^o} = 2 A^{1/2} \sigma + O(A^{1/4} \log^{1/2} A) \quad \text{as } A \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Thus, the following corollary is true.

Corollary 1. Assume that $E \| \xi(1) \|^{4p} < \infty$, $E \| x(0) \|^{4p} < \infty$ and the variance σ^2 is known. Then the number n_A^o defined in (16) minimizes the risk function R_n defined in (9) and the asymptotic formula (17) for $R_{n_A^o}$ holds.

2.2. Unknown σ^2 case

Since σ^2 is directly involved in the expression (9) for R_n , the optimal sample size can not be obtained as before. Similarly to [7, 8, 10], one uses the stopping time T_A as an estimator of n_A^o , replacing σ^2 in its definition with an estimator $\tilde{\sigma}_n^2$

$$T_A = \inf_{n \geq n_A} \{n \geq A^{1/2} \tilde{\sigma}_n\}, \quad (18)$$

where n_A is the initial sample size depending on A and specified below (see Theorem 1),

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{p}{p + \|M\|^2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x(k) - \tilde{\Lambda}_n x(k-1)\|^2. \quad (19)$$

The choice of estimator is motivated by the fact that using the strong law of large numbers we have

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x(k) - \Lambda x(k-1)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \left(1 + \frac{\|M\|^2}{p}\right), \quad P_0 - \text{a.s.}$$

In this section we define predictors of $x(k)$ using truncated estimators $\tilde{\Lambda}_k$ instead of Λ_k^* . Rewrite the needed formulae

$$\tilde{\xi}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (x(k-i) - \tilde{\Lambda}_k x(k-1-i)), \quad \tilde{x}(k) = \tilde{\Lambda}_{k-1} x(k-1) + M \tilde{\xi}(k), \quad (20)$$

$$\tilde{e}(k) = x(k) - \tilde{x}(k) = \xi(k) + (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i),$$

$$\overline{e^2}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{e}(k)\|^2, \quad \bar{L}_n = \frac{A}{n} \overline{e^2}(n) + n, \quad R_n = E_0 \bar{L}_n = \frac{A}{n} E_0 \overline{e^2}(n) + n. \quad (21)$$

Analogously to [7], we prove the asymptotic equivalence of T_A and n_A^o in the almost surely and mean senses (see (23), (24) below) and the optimality of the adaptive prediction procedure in the sense of equivalence of the obviously modified risk

$$\bar{R}_A = E_0 \bar{L}_{T_A} = A E_0 \frac{1}{T_A} \overline{e^2}(T_A) + E_0 T_A \quad (22)$$

and $R_{n_A^o}$, see (8).

Theorem 1. Assume that $E \| \xi(1) \|^{16p} < \infty$, $E \| x(0) \|^{16p} < \infty$ and n_A in (18) is such that $\max\{k_0, A^r \log^2 A\} \leq n_A = o(A^{1/2})$ with $r \in (2/5, 1/2)$. Let the predictors $\tilde{x}(k)$ be defined by (20) and the risk functions defined by (21), (22). Then for every $\theta \in \Theta$

$$\frac{T_A}{n_A^o} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1, \quad P_0 - \text{a.s.}, \quad (23)$$

$$\frac{E_0 T_A}{n_A^o} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1, \quad (24)$$

$$\frac{\bar{R}_A}{R_{n_A^o}} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1. \quad (25)$$

The proof of Theorem 1 is presented in Section 3.

Remark 1. The third assertion of Theorem 1 is also true for predictors based on Λ_k^* .

3. Proof of Theorem 1

First, we prove the properties (23), (24) of the stopping time T_A .

From the conditions of Theorem 1 on noise moments for $\Lambda \in \Lambda^0$ it follows

$$\sup_{k \geq 0} E_0 \|x(k)\|^{16p} \leq C. \quad (26)$$

Denote

$$C_M = \frac{p}{p + \|M\|^2}.$$

Rewrite formula (19) for $\tilde{\sigma}_n^2$ using (1):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_n^2 &= \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1) + (\Lambda - \tilde{\Lambda}_n)x(k-1)\|^2 = \\ &= \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + W_n + v_n, \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$W_n = \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|(\tilde{\Lambda}_n - \Lambda)x(k-1)\|^2, \quad v_n = -\frac{2C_M}{n} \sum_{k=1}^n [(\tilde{\Lambda}_n - \Lambda)x(k-1)]'(\xi(k) + M\xi(k-1)).$$

Now we show that

$$\tilde{\sigma}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2, \quad P_0 - \text{a.s.} \quad (28)$$

Consider W_n . It follows from the definition (5) of the truncated estimators $\tilde{\Lambda}_n$ that they are asymptotically equivalent to the corresponding correlation estimators (4), see, e.g., p. 8 in [5]. Since the estimators (4) are strongly consistent we have

$$\tilde{\Lambda}_n - \Lambda \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad P_0 - \text{a.s.}$$

Given that

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(k-1)x'(k-1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F, \quad P_0 - \text{a.s.},$$

where F is a constant matrix (see (10)), it follows that

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad P_0 - \text{a.s.}$$

Similar arguments are used to show

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad P_0 - \text{a.s.}$$

The relation (28) obviously follows from these facts, the representation (27) and strong law of large numbers.

From the definition (18) of T_A it follows that with P_0 -probability one $T_A \rightarrow \infty$ as $A \rightarrow \infty$. Therefore, by (28) we have $\tilde{\sigma}_{T_A}^2 \rightarrow \sigma^2$ P_0 - a.s. and hence

$$\frac{T_A}{A^{1/2}\sigma} \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{} 1, \quad P_0 - \text{a.s.}$$

For proof of (24) we introduce for any positive A the auxiliary sequence of numbers $\gamma_{A,n}$

$$\gamma_{A,n} = n^2 A^{-1} \frac{1}{2 \log A}, \quad n \geq 1.$$

Denote

$$m_n = \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \left(\|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 - \left(\sigma^2 + \frac{\|M\|^2}{p} \sigma^2 \right) \right).$$

By the definition of T_A and (27) we have

$$\begin{aligned}
E_0 T_A &\leq n_A + \sum_{n \geq n_A} P_0 \left(n^2 A^{-1} \leq \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + W_n + v_n \right) \leq \\
&\leq n_A + \sum_{n \geq n_A} \left\{ P_0 \left(n^2 A^{-1} \leq \frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + \gamma_{A,n} \right) + P_0(W_n + |v_n| > \gamma_{A,n}) \right\} \leq \\
&\leq n_A + \sum_{n \geq n_A} \{ P_0(n^2 A^{-1} \leq \sigma^2 + 2\gamma_{A,n}) + \\
&+ P_0(|v_n| > \gamma_{A,n}/2) + P_0(W_n > \gamma_{A,n}/2) + P_0(|m_n| > \gamma_{A,n}) \}. \tag{29}
\end{aligned}$$

Note that

$$n_A + \sum_{n \geq n_A} P_0(n^2 A^{-1} \leq \sigma^2 + 2\gamma_{A,n}) = n_A + \sum_{n \geq n_A} 1 = n_A^*,$$

where

$$n_A^* = \inf_{n \geq n_A} \{n^2 A^{-1} > \sigma^2 + 2\gamma_{A,n}\} = \left\lceil A^{1/2} \sigma \left(1 + \frac{1}{\log A - 1}\right)^{1/2} \right\rceil + 1.$$

Therefore

$$\frac{n_A + \sum_{n \geq n_A} P_0(n^2 A^{-1} \leq \sigma^2 + 2\gamma_{A,n})}{A^{1/2} \sigma} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1.$$

Now we show that the other summands in the right-hand side of (29) vanish as $A \rightarrow \infty$, when normalized appropriately.

Consider the probability $P_0(|v_n| > \gamma_{A,n})$. According to (26), the Chebyshev inequality and the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality for $n \geq n_A$ we have

$$\begin{aligned}
P_0(|v_n| > \gamma_{A,n}/2) &= P_0 \left(\frac{2C_M}{n} \left| \sum_{k=1}^n [(\tilde{\Lambda}_n - \Lambda)x(k-1)]'(\xi(k) + M\xi(k-1)) \right| > \gamma_{A,n}/2 \right) \leq \\
&\leq \frac{C}{n\gamma_{A,n}} \sum_{k=1}^n (E_0 \|\tilde{\Lambda}_n - \Lambda\|^2 E_0 \|x(k-1)\|^2 \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{C \log^{1/2} n}{\sqrt{n}\gamma_{A,n}} \leq CA \log A \frac{\log^{1/2} n}{n^{5/2}}.
\end{aligned}$$

From the assumptions on n_A it follows that

$$\begin{aligned}
A^{-1/2} \sum_{n \geq n_A} P_0(|v_n| > \gamma_{A,n}) &\leq CA^{1/2} \log A \sum_{n \geq n_A} \frac{\log^{1/2} n}{n^{5/2}} \leq \\
&\leq CA^{1/2} \log^{3/2} A \cdot n_A^{-3/2} \leq CA^{-\frac{3r-1}{2}} \log^{-3/2} A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

The probability $P_0(W_n > \gamma_{A,n})$ is treated analogously.

As for the probability $P_0(|m_n| > \gamma_{A,n})$, note that m_n is sum of martingales, thus the Chebyshev inequality and the Burkholder inequality yield

$$\begin{aligned}
P_0(|m_n| > \gamma_{A,n}) &\leq P_0 \left(\frac{C_M}{n} \left| \sum_{k=1}^n (\|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 - (\sigma^2 + \|M\| \sigma^2)) \right| > \gamma_{A,n} \right) \leq \\
&\leq C\gamma_{A,n}^{-2} n^{-1} = 4CA^2 \log^2 A \cdot n^{-5}.
\end{aligned}$$

Therefore, by assumptions on n_A

$$\begin{aligned}
A^{-1/2} \sum_{n \geq n_A} P_0(|m_n| > \gamma_{A,n}) &\leq CA^{3/2} \log^2 A \sum_{n \geq n_A} n^{-5} \leq \\
&\leq CA^{3/2} \log^2 A \cdot n_A^{-4} \leq CA^{-\frac{8r-3}{2}} \log^{-6} A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Then from (29) it follows that

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{E_0 T_A}{A^{1/2} \sigma} \leq 1. \tag{30}$$

Same arguments can be used to show

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{E_0 T_A}{A^{1/2} \sigma} \geq 1$$

and thus, in view of (30) the assertion (24) holds.

Regarding (25), rewrite its left-hand side using (17) and (22)

$$\frac{\bar{R}_A}{R_{n_A^0}} = \frac{A E_0 \frac{1}{T_A} \bar{e}^2(T_A) + E_0 T_A}{2 A^{1/2} \sigma + O(A^{1/4} \log^{1/2} A)}. \quad (31)$$

From (24) and (31) it follows that to prove (25) it suffices to show the convergence

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A} \bar{e}^2(T_A) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1. \quad (32)$$

Define

$$N' = [(\sigma - \epsilon) A^{1/2}]_1, \quad N'' = [(\sigma + \epsilon) A^{1/2}]_1 + 1, \quad 0 < \epsilon < \sigma.$$

We will need the following properties

$$P_0(T_A < N') = O(A^{-r}), \quad P_0(T_A > N'') = O(A^{-1}), \quad (33)$$

which we prove similarly to Lemma 4 of [7].

Denote $\delta_1 = \sigma^2 - (\sigma - \epsilon)^2$. Using non-negativeness of W_n , definitions of T_A and $\tilde{\sigma}_n^2$ one gets

$$\begin{aligned} P_0(T_A < N') &\leq P_0(T_A < (\sigma - \epsilon) A^{1/2}) = \\ &= P_0(\tilde{\sigma}_n^2 \leq A^{-1} n^2, \text{ for some } n_A \leq n \leq (\sigma - \epsilon) A^{1/2}) \leq \\ &\leq P_0\left(\frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + v_n \leq (\sigma - \epsilon)^2, \text{ for some } n \geq n_A\right) = \\ &= P_0(m_n + v_n \geq \delta_1, \text{ for some } n \geq n_A) \leq \\ &\leq \sum_{n \geq n_A} P_0\left(|m_n| \geq \frac{\delta_1}{2}\right) + \sum_{n \geq n_A} P_0(|v_n| \geq \delta_1/2). \end{aligned} \quad (34)$$

Consider the first summand. By the Chebyshev inequality, (26) and the Burkholder inequality

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_A} P_0\left(\frac{C_M}{n} \sum_{k=1}^n (\|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 - (\sigma^2 + \|M\| \sigma^2)) \geq \frac{\delta_1}{2}\right) &\leq \\ &\leq C \sum_{n \geq n_A} \frac{E_0 |m_n|^4}{n^4} \leq C \sum_{n \geq n_A} n^{-2} \leq C A^{-r} \log^{-2} A. \end{aligned} \quad (35)$$

The following is proved analogously to how (29) is treated

$$\sup_{n \geq 1} E_0(n \log^{-1} n \cdot |v_n|)^2 < \infty.$$

Thus,

$$\sum_{n \geq n_A} P_0(|v_n| \geq \delta_1/2) \leq C \sum_{n \geq n_A} n^{-2} \log^2 n \leq C n_A^{-1} \log^2 A \leq C A^{-r}. \quad (36)$$

The first property of (33) follows from (34)–(36).

Prove the second property of (33). Denote $\delta_2 = (\sigma + \epsilon)^2 - \sigma^2$. Then, by definition (18) of T_A and (27)

$$\begin{aligned} P_0(T_A > N'') &\leq P_0\left(\frac{C_M}{N''} \sum_{k=1}^{N''} \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + W_{N''} + v_{N''} > A^{-1} (N'')^2\right) \leq \\ &\leq P_0\left(\frac{C_M}{N''} \sum_{k=1}^{N''} \|\xi(k) + M\xi(k-1)\|^2 + |W_{N''} + v_{N''}| > (\sigma + \epsilon)^2\right) \leq \\ &\leq P_0(|m_{N''}| > \delta_2/2) + P_0(|W_{N''} + v_{N''}| > \delta_2/2). \end{aligned}$$

By the Chebyshev and Burkholder inequalities

$$P_0(|m_{N''}| > \delta_2/2) \leq C(N'')^{-2} = O(A^{-1}), \quad P_0(|W_{N''} + v_{N''}| > \delta_2/2) \leq C(N'')^{-2} = O(A^{-1}).$$

Thus, the second assertion in (33) holds true.

To prove (32) we show that

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A} \overline{e^2}(T_A) \chi(T_A < N') \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0, \quad A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A} \overline{e^2}(T_A) \chi(T_A > N'') \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0, \quad (37)$$

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A \sigma} \overline{e^2}(T_A) \chi(N' \leq T_A \leq N'') \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1. \quad (38)$$

Prove the first assertion in (37). By the definition of $\overline{e^2}(k)$ we get

$$\begin{aligned} & A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A} \overline{e^2}(T_A) \chi(T_A < N') = \\ & = A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \chi(T_A < N') + \\ & + 2 A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \xi'(k) \left((-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right) \chi(T_A < N') + \\ & + A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \|\xi(k)\|^2 \chi(T_A < N'). \end{aligned} \quad (39)$$

Consider the first summand. By the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality and the definition of T_A assumptions on n_A and r , the properties (33) and Lemma 1 we have

$$\begin{aligned} & A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \chi(T_A < N') \leq \\ & \leq A^{1/2} P_0^{1/2}(T_A < N') \frac{1}{n_A^2} \sum_{k=1}^{N'} \sqrt{E_0 \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^4}. \end{aligned}$$

Examine the expression under the root square. The most significant summand is treated using the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality

$$\begin{aligned} & E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^4 \leq \\ & \leq \sqrt{E_0 \|\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda\|^8 E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i x(k-1-i) \right\|^8} \leq \frac{C \log^2 k}{k^2} \sqrt{E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i x(k-1-i) \right\|^8}. \end{aligned}$$

It can be easily shown, employing the Hölder inequality, that

$$E_0 \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i x(k-1-i) \right\|^8 \leq E_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|M^i\| \cdot \|x(k-1-i)\| \right)^8 \leq C \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|M^{i/2}\|^{\frac{8}{7}} \right)^7 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \|M^{i/2}\|^8 \leq C$$

and hence, by the assumptions on n_A and r , the properties (33) and Lemma 1 we have

$$\begin{aligned} & A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \chi(T_A < N') \leq \\ & \leq C A^{1/2} P_0^{1/2}(T_A < N') \frac{1}{n_A^2} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\log k}{k} \leq C A^{-\frac{5r-1}{2}} \log^{-2} A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Consider the second summand of (39). The Doob's maximal inequality for martingales (see, e.g., [14]) and the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality yield

$$\begin{aligned} & A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \xi'(k) \left((-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right) \chi(T_A < N') \leq \\ & \leq A^{-\frac{r-1}{2}} \frac{1}{n_A^2} \sqrt{E_0 \max_{1 \leq n \leq N'} \left(\sum_{k=1}^n \xi'(k) \left((-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right) \right)^2} \leq \\ & \leq \sigma A^{-\frac{5r-1}{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N'} E_0 \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \xi(0) \right\|^2} \leq \\ & \leq C A^{-\frac{5r-1}{2}} \log A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Consider the last summand of (39). We have

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \|\xi(k)\|^2 \chi(T_A < N') \leq A^{1/2} n_A^{-2} P_0^{1/2}(T_A < N') \sum_{k=1}^{N'} \sqrt{E_0 \|\xi(k)\|^4} \leq$$

$$\leq C A^{-\frac{5\epsilon-1}{2}} \log^{-4} A \cdot N' \leq C A^{-\frac{5\epsilon-2}{2}} \log^{-4} A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

Thus, the first part of (37) has been proved, similar arguments are applied to the second part with $\chi(T_A < N')$ replaced by $\chi(T_A > N')$ to get

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \chi(T_A > N') \leq C A^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0,$$

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \xi'(k) \left((-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right) \chi(T_A > N') \leq C A^{-\frac{3}{4}} \log A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0,$$

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2} \sum_{k=1}^{T_A} \|\xi(k)\|^2 \chi(T_A > N') \leq C A^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

and to (38) with $\chi(T_A < N')$ replaced by $\chi(N' \leq T_A \leq N'')$ to get

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \sum_{k=1}^{T_A} \left\| (-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right\|^2 \chi(N' \leq T_A \leq N'') \leq C A^{-\frac{1}{2}} \log^2 A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0,$$

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \sum_{k=1}^{T_A} \xi'(k) \left((-M)^k \xi(0) - \sum_{i=0}^{k-1} (-M)^i (\tilde{\Lambda}_{k-1} - \Lambda) x(k-1-i) \right) \chi(N' \leq T_A \leq N'') \leq C A^{-\frac{1}{2}} \log A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

Now we show that

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \sum_{k=1}^{T_A} \|\xi(k)\|^2 \chi(N' \leq T_A \leq N'') \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1.$$

To this end rewrite the left-hand side as follows

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \sum_{k=1}^{T_A} \|\xi(k)\|^2 \chi(N' \leq T_A \leq N'') =$$

$$= A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \sum_{k=1}^{T_A} (\|\xi(k)\|^2 - \sigma^2) \chi(N' \leq T_A \leq N'') + A^{1/2} \sigma E_0 \frac{1}{T_A} \chi(N' \leq T_A \leq N'').$$

We show that the first summand converges to 0 and the second one converges to 1. By the Doob's maximal inequality and the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality

$$A^{1/2} E_0 \frac{1}{T_A^2 \sigma} \left| \sum_{k=1}^{T_A} (\|\xi(k)\|^2 - \sigma^2) \right| \chi(N' \leq T_A \leq N'') \leq C A^{1/2} \frac{1}{(N')^2} \left(E_0 \max_{1 \leq n \leq N''} \left(\sum_{k=1}^n (\|\xi(k)\|^2 - \sigma^2) \right)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C A^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{N''} E_0 \|\xi(k)\|^4 \right)^{1/2} \leq C A^{-1/4} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

Consider the second summand. To prove its almost sure convergence to 1 it suffices (see, e.g., [15]) to show that

$$P_0\text{-}\lim_{A \rightarrow \infty} A^{1/2} \sigma \frac{1}{T_A} \chi(N' \leq T_A \leq N'') = 1 \quad (40)$$

and that the family of random variables

$$Z = \left\{ A^{1/2} \frac{1}{T_A} \chi(N' \leq T_A \leq N'') \right\}_{A \geq 1} \quad (41)$$

is uniformly integrable.

The property (40) is fulfilled as, according to (23),

$$\frac{T_A}{A^{1/2} \sigma} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 1, \quad P_0\text{-a.s.}$$

and hence

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \chi(N' \leq T_A \leq N'') = \lim_{A \rightarrow \infty} \chi\left(1 - \epsilon / \sigma \leq \frac{T_A}{A^{1/2} \sigma} \leq 1 + \epsilon / \sigma\right) = 1, \quad P_0\text{-a.s.}$$

Property (41) holds true since Z is uniformly bounded.

4. Numerical simulation

To confirm theoretical results we performed numerical simulation programmed in MATLAB for 2-dimensional stable ARMA(1,1). The needed expected values are approximated by sample means of 100 realizations. E.g., the realizations of the stopping time T_A are

$$T_A^{(n)} = \inf_{k \geq n_A} \{k \geq A^{1/2} \tilde{\sigma}_k^{(n)}\}, \quad n = \overline{1, 100},$$

then its expectation $E_\theta T_A$ is computed as follows

$$\widehat{E_\theta T_A} = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} T_A^{(n)}.$$

The initial value $x(0)$ and the noises $\xi(k)$ are generated from the multivariate Gaussian distribution

$$x(0) \sim N(0, I), \quad \xi(k) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2} I\right),$$

Where I is the identity 2x2 matrix and thus, $E \|\xi(k)\|^2 = \sigma^2$.

We take the true value of the matrix parameters to be

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.4 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$$

with eigenvalues, respectively, $\lambda_1 = 0.6446$, $\lambda_2 = -0.7446$, $\mu_1 = 0.25 + 0.3428i$, $\mu_2 = 0.25 - 0.3428i$, which satisfy the stability conditions.

Tables 1(a, b) contain comparison of the estimates of $R_{n_A^\circ}$ and the value $2A^{1/2}\sigma$ as implied by (17) for the prediction error two values of prediction error cost A , as well as the estimates of $\frac{E_\theta T_A}{n_A^\circ}$ and $\frac{\bar{R}_A}{R_{n_A^\circ}}$.

Table 1

Estimates of the crucial values

a) The prediction error cost $A = 5000$

σ^2	n_A°	$\frac{E_\theta T_A}{n_A^\circ}$	$R_{n_A^\circ}$	$\frac{R_{n_A^\circ}}{2A^{1/2}\sigma}$	$\frac{\bar{R}_A}{R_{n_A^\circ}}$
1	70.71	1.02	166.9	1.18	0.98
3	122.5	1.01	282.5	1.15	0.99
5	158.1	1.00	341.5	1.08	1

b) The prediction error cost $A = 10000$

σ^2	n_A°	$\frac{E_\theta T_A}{n_A^\circ}$	$R_{n_A^\circ}$	$\frac{R_{n_A^\circ}}{2A^{1/2}\sigma}$	$\frac{\bar{R}_A}{R_{n_A^\circ}}$
1	100	1.01	222.3	1.12	0.99
3	173.2	0.99	377.5	1.09	1
5	223.6	1.00	468.1	1.04	1

As the tables imply, the ratio $\frac{E_\theta T_A}{n_A^\circ}$ converges to 1 with growth of the optimal sample size n_A° , which is also reflected in the fact that the values of risks $\bar{R}_A$ and $R_{n_A^\circ}$, for cases of unknown and known noise variance re-

spectively, are very close to each other. At the same time, the values of both risks are accurately approximated by $2A^{1/2}\sigma$ only if the prediction error cost and with it the optimal sample size are rather large.

5. Summary

This paper presents the problem of optimization of both one-step prediction quality and sample size for stable multivariate ARMA(1,1) process with unknown dynamic parameters. The cases of known and unknown noise variance were studied. In both cases optimization is performed based on the loss function describing the sample mean of squared prediction error. If the noise variance is unknown, the risk function depends on the mean of the duration of observations, defined as a stopping time in this case. It was shown that the risk functions are equivalent to each other asymptotically.

The adaptive predictors were constructed upon the basis of truncated estimators of the dynamic matrix parameter. The mentioned estimators have given statistical properties on a sample of fixed size. Usage of such estimators essentially simplifies analytical investigation of statistical properties of adaptive predictors and can be applied in various adaptive procedures (control, filtration, etc.).

Acknowledgements

The author wishes to thank his scientific adviser professor Vasiliev V.A., who provided valuable comments and ideas regarding the research theme.

REFERENCES

1. Ljung L., Söderström T. System Identification Theory for the User. Prentice Hall. Upper Saddle River, 1983.
2. Ljung L. Theory and Practice of Recursive Identification. Cambridge : The MIT Press, 1987.
3. Konev V., Pergamenschikov S. On the Duration of Sequential Estimation of Parameters of Stochastic Processes in Discrete Time // Stochastics. 1986. V. 18. Is. 2. P. 133–154.
4. Konev V., Pergamenschikov S. Truncated Sequential Estimation of the Parameters in Random Regression // Sequential Analysis. 1990. V. 9, issue 1. P. 19–41.
5. Vasiliev V.A. Truncated Estimation Method with Guaranteed Accuracy // Annals of Institute of Statistical Mathematics. 2014. V. 66. P. 141–163.
6. Vasiliev V. Guaranteed Estimation of Logarithmic Density Derivative By Dependent Observations // Topics in Nonparametric Statistics: Proceedings of the First Conference of the International Society for Non-parametric Statistics / eds. by M.G. Akritas et al. New York : Springer, 2014.
7. Sriram T. Sequential Estimation of the Autoregressive Parameter in a First Order Autoregressive Process // Sequential Analysis. 1988. V. 7. Is. 1. P. 53–74.
8. Konev V., Lai T. Estimators with Prescribed Precision in Stochastic Regression Models // Sequential Analysis. 1995. V. 14. Is. 3. P. 179–192.
9. Vasiliev V., Kusainov M. Asymptotic Risk-Efficiency of One-Step Predictors of a Stable AR(1) // Proceedings of XII All-Russian Conference on Control Problems. Moscow, 2014.
10. Kusainov M., Vasiliev V. On Optimal Adaptive Prediction of Multivariate Autoregression // Sequential Analysis. 2015. V. 34. Is. 2. (to be published).
11. Sriram T., Iaci R. Sequential Estimation for Time Series Models. Sequential Analysis. 2014. V. 33. Is. 2. P. 136–157.
12. Box G., Jenkins G., Reinsel G. Time Series Analysis: Forecasting and Control. Wiley, Hoboken, 2008.
13. Pergamenschikov S. Asymptotic Properties of the Sequential Plan for Estimating the Parameter of an Autoregression of the First Order // Theory of Probability and Its Applications. 1991. V. 36. Is. 1. P. 42–53.
14. Liptser R., Shiryaev A. Statistics of Random Processes. New York : Springer, 1977.
15. Gikhman I., Skorokhod A. Introduction to the Theory of Random Processes. Saunders, Philadelphia, 1969.

Kusainov Marat Islambekovich. E-mail: rjrltsk@gmail.com
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

Поступила в редакцию 10 декабря 2014 г.

Кусаинов Марат И. (Томский государственный университет. Россия).

Об оптимальном адаптивном прогнозе многомерного процесса АРМА(1,1).

Ключевые слова: адаптивные прогнозы; асимптотическая риск-эффективность; многомерный АРМА; момент остановки; оптимальный размер выборки; усечённое оценивание.

Рассматривается проблема асимптотической эффективности адаптивных одношаговых прогнозов многомерного устойчивого процесса $APMA(1,1)$ с неизвестными параметрами динамики. Прогнозирование основано на методе усечённого оценивания матрицы. Усечённые оценки являются модификацией усечённых последовательных оценок, позволяющей достичь заданной точности на выборках фиксированного размера. Критерий оптимальности прогнозов основан на функции потерь, определённой как линейная комбинация размера выборки и выборочного среднего квадрата ошибки прогноза. Изучены случаи известной и неизвестной дисперсии шума. В последнем случае оптимальный объём наблюдения записывается как момент остановки.

REFERENCES

1. Ljung L., Söderström T. *System Identification Theory for the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1983.
2. Ljung L. *Theory and Practice of Recursive Identification*. Cambridge: The MIT Press, 1987.
3. Konev V., Pergamenschikov S. On the Duration of Sequential Estimation of Parameters of Stochastic Processes in Discrete Time. *Stochastics*, 1986, vol. 18., issue 2, pp. 133-154. DOI: 10.1080/17442508608833405
4. Konev V., Pergamenschikov S. Truncated Sequential Estimation of the Parameters in Random Regression. *Sequential Analysis*, 1990, vol. 9, issue 1, pp. 19-41. DOI: 10.1080/07474949008836194
5. Vasiliev V. A Truncated Estimation Method with Guaranteed Accuracy. *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, 2014, vol. 66, pp. 141-163. DOI: 10.1007/s10463-013-0409-x
6. Vasiliev V. Guaranteed Estimation of Logarithmic Density Derivative By Dependent Observations. *Topics in Nonparametric Statistics: Proceedings of the First Conference of the International Society for Non-parametric Statistics*. New York: Springer, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4939-0569-0_31
7. Sriram T. Sequential Estimation of the Autoregressive Parameter in a First Order Autoregressive Process. *Sequential Analysis*, 1988, vol. 7, issue 1, pp. 53-74. DOI: 10.1080/07474948808836142
8. Konev V., Lai T. Estimators with Prescribed Precision in Stochastic Regression Models. *Sequential Analysis*, 1995, vol. 14, issue 3, pp. 179-192. DOI: 10.1080/07474949508836330
9. Vasiliev V., Kusainov M. Asymptotic Risk-Efficiency of One-Step Predictors of a Stable $AR(1)$. *Proceedings of XII All-Russian Conference on Control Problems*, Moscow, 2014.
10. Kusainov M., Vasiliev V. On Optimal Adaptive Prediction of Multivariate Autoregression. *Sequential Analysis*, 2015, vol. 34, issue 2. 23 p. (to be published).
11. Sriram T., Iaci R. Sequential Estimation for Time Series Models. *Sequential Analysis*, 2014, vol. 33, issue 2, pp. 136-157.
12. Box G., Jenkins G., Reinsel G. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley, Hoboken, 2008.
13. Pergamenschikov S. Asymptotic Properties of the Sequential Plan for Estimating the Parameter of an Autoregression of the First Order. *Theory of Probability and Its Applications*, 1991, vol. 36, issue 1, pp. 42-53.
14. Liptser R., Shiryaev A. *Statistics of Random Processes*. New York: Springer, 1977.
15. Gikhman I., Skorokhod A. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Philadelphia: Saunders, 1969.

Л.А. Нежелская

**СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ
МОДУЛИРОВАННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ И УСЛОВИЯ РЕКУРРЕНТНОСТИ ПОТОКА**

Изучается модулированный МАР-поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков событий в цифровых сетях интегрального обслуживания (ISDN). Приводятся явный вид плотности вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока, а также явный вид совместной плотности вероятностей длительности двух соседних интервалов. Рассматриваются условия рекуррентности потока.

Ключевые слова: модулированный МАР-поток событий; инфинитезимальные характеристики; плотность вероятностей; совместная плотность вероятностей; рекуррентность потока.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий во многом определило важную сферу приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, телекоммуникационных сетей, которые называют цифровыми сетями интегрального обслуживания – Integrated Service Digital Networks (ISDN). Всё это послужило стимулом к созданию адекватных математических моделей реальных информационных потоков, функционирующих в ISDN, так называемых дважды стохастических потоков событий. В работе [1] дважды стохастический поток определяется как случайный поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков впервые введен в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в статьях [2–4]. В [2, 3] данные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [4] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Последние начиная с конца 1980-х гг. носят название МАР (Markovian arrival process)-потоков событий. МАР-потоки событий наиболее характерны при описании информационных потоков в реальных телекоммуникационных сетях [5]. В зависимости от смены состояний МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [6–11]; 2) асинхронные и обобщённые асинхронные потоки событий [12–17]; 3) полусинхронные и обобщённые полусинхронные потоки событий [18–23]. В [24] введены в рассмотрение МАР-потоки событий первого порядка (собственно МАР-потоки, введенные в [4]) и МАР-потоки событий второго порядка (синхронизированная суперпозиция двух МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [24] показано, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка; асинхронный, обобщённый асинхронный, полусинхронный и обобщённый полусинхронный МС-потоки являются частным случаем МАР-потока второго порядка.

Режим функционирования системы массового обслуживания непосредственно зависит от параметров МС (МАР)-потока и состояний, в которых находится поток. В реальных ситуациях параметры входящих потоков событий, как правило, неизвестны, либо частично известны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого важными задачами являются задачи оценки в произвольный момент времени состояний [14, 17, 19, 23, 25] и параметров [6–12, 16, 18, 20–22] потока по наблюдениям за этим потоком.

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока необходимо знать вероятностные свойства потока [13, 15, 26]. В настоящей статье рассматривается модулированный МАР-поток событий (относится к классу МАР-потоков событий второго порядка), введенный в работах [27–29] и являющийся обобщением МАР-потока первого порядка [24, 25]. Находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления

соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии зависит от двух случайных величин: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью единица из i -го состояния в j -е, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$); 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ в j -е состояние ($i \neq j$) с наступлением события, либо с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ переходит в j -е состояние ($i \neq j$) без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i|\lambda_i)$ переходит в i -е состояние с наступлением события. При этом $P_0(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_i|\lambda_i) = 1$. Случайные величины являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ примут вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком [3]. Заметим, что в приведённом определении модулированного МАР-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое). Отметим, что в реальных потоках событий, моделями которых являются модулированные МАР-потоки, событие потока (в момент окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$) наступает с полной определённой в первом или во втором состоянии процесса $\lambda(t)$. В данной статье при получении формул для плотностей вероятностей данное обстоятельство является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j , $i, j = 1, 2$, происходят мгновенно. Вариант возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1 и λ_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий потока.

Процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаемый, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \dots$. Рассматривается стационарный режим функционирования потока. В силу предпосылок в моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, т.е. модулированный МАР-поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k – момента наступления события потока, $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k . В силу этого момент времени t_k наступления события без ограничения общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала, длительности которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ и $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

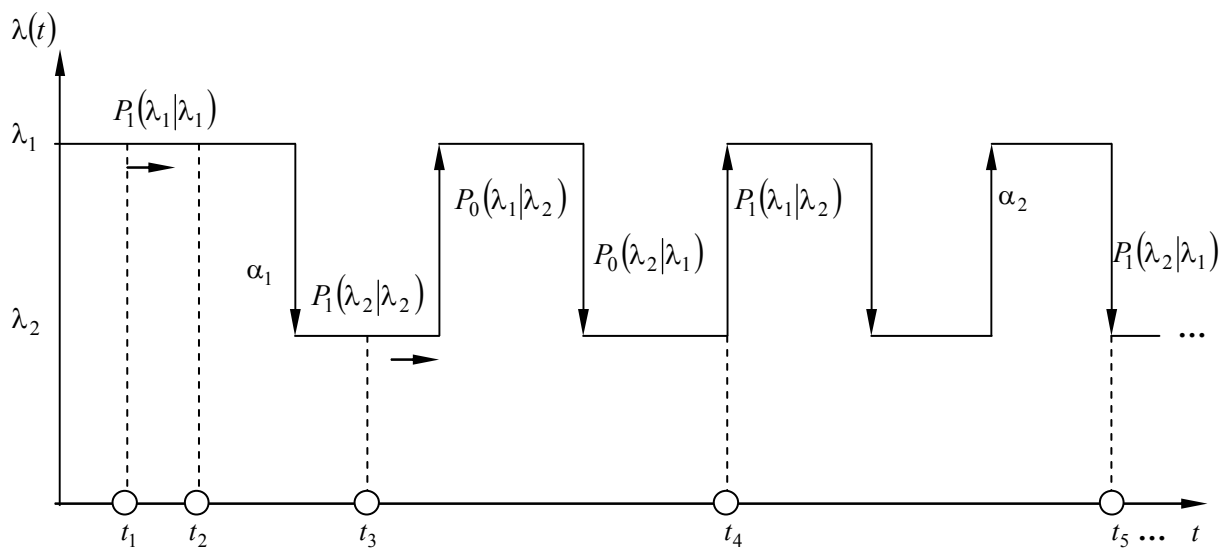


Рис. 1. Модулированный МАР-поток событий

Задача заключается в нахождении явного вида $p(\tau)$ и явного вида $p(\tau_1, \tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности модулированного МАР-потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p(\tau)$

Введём в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий модулированного МАР-потока и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. Тогда для указанных вероятностей справедливы следующие системы дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} p'_{11}(\tau) = -(\alpha_1 + \lambda_1)p_{11}(\tau) + (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) = (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))p_{11}(\tau) - (\alpha_2 + \lambda_2)p_{12}(\tau), \\ p_{11}(0) = 1, p_{12}(0) = 0, \\ p'_{22}(\tau) = -(\alpha_2 + \lambda_2)p_{22}(\tau) + (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))p_{21}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) = (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))p_{22}(\tau) - (\alpha_1 + \lambda_1)p_{21}(\tau), \\ p_{22}(0) = 1, p_{21}(0) = 0. \end{cases}$$

Решая записанные системы, находим вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в виде

$$p_{11}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1} [(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2\tau}],$$

$$p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}],$$

$$p_{22}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1} [(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2\tau}],$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}],$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right], \quad (1)$$

$$0 < z_1 < z_2.$$

С учётом определения модулированного МАР-потока введём $p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий потока на интервале $(0, \tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ перешёл на этом интервале из первого состояния в первое, на полуинтервале $[\tau, \tau+\Delta\tau)$ произошло окончание первого состояния процесса $\lambda(\tau)$ и процесс $\lambda(\tau)$ на полуинтервале $[\tau, \tau+\Delta\tau)$ перешёл из первого состояния в первое с наступлением события потока. Аналогичные совместные вероятности примут вид

$$\begin{aligned} p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau), & \quad p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau), & \quad p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau), & \quad p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau), \\ p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Тогда соответствующие плотности вероятностей запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) p_{11}(\tau), & \tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{12}^{(1)}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) p_{12}(\tau), & \tilde{p}_{12}^{(2)}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) p_{11}(\tau), \\ \tilde{p}_{21}^{(1)}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) p_{21}(\tau), & \tilde{p}_{21}^{(2)}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) p_{22}(\tau), \\ \tilde{p}_{22}^{(1)}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) p_{22}(\tau), & \tilde{p}_{22}^{(2)}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) p_{21}(\tau). \end{aligned}$$

Очевидно, что плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0, \tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдёт на этом интервале из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2$), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) p_{12}(\tau) + \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) p_{11}(\tau), \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) p_{22}(\tau), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) p_{22}(\tau) + \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) p_{21}(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем выражения для плотностей вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в явном виде.

Поскольку τ – произвольный момент времени, то p_{ij} – вероятности перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2$) за время, которое пройдёт от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определяются в виде

$$\begin{aligned} p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(\tau) d\tau = \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) \int_0^\infty p_{11}(\tau) d\tau + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) \int_0^\infty p_{12}(\tau) d\tau, \\ p_{12} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(\tau) d\tau = \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \int_0^\infty p_{12}(\tau) d\tau + \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) \int_0^\infty p_{11}(\tau) d\tau, \\ p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(\tau) d\tau = \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) \int_0^\infty p_{21}(\tau) d\tau + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) \int_0^\infty p_{22}(\tau) d\tau, \\ p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(\tau) d\tau = \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \int_0^\infty p_{22}(\tau) d\tau + \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) \int_0^\infty p_{21}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3), находим

$$\begin{aligned} p_{11} &= (z_1 z_2)^{-1} \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)) \right], \\ p_{12} &= (z_1 z_2)^{-1} \left[\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)) \right], \\ p_{21} &= (z_1 z_2)^{-1} \left[\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)) \right], \end{aligned}$$

$$p_{22} = (z_1 z_2)^{-1} \left[\lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) \right],$$

$$z_1 z_2 = (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)). \quad (4)$$

Введём в рассмотрение $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$ ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$). Тогда, так как $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0)$ справедливы следующие уравнения:

$$\pi_1(0) = p_{11}\pi_1(0) + p_{21}\pi_2(0), \quad \pi_2(0) = p_{12}\pi_1(0) + p_{22}\pi_2(0), \quad (5)$$

где переходные вероятности p_{ij} ($i, j = 1, 2$) определены формулами (4).

Подставляя (4) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \pi_1(0) = & \left\{ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) \right\} \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \right. \\ & \left. + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\}^{-1}, \\ \pi_2(0) = & \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\} \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \right. \\ & \left. + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Плотность вероятностей $p(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями в модулированном МАР-потоке примет вид

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (7)$$

Подставляя в (7) сначала (2), затем (1) и (6) и проделывая достаточно трудоёмкие преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} \{ z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0) [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] \}, \quad (8)$$

где z_1 и z_2 определены в (1), $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ определены в (6). Положив в z_1 и z_2 параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получаем плотность вероятностей $p(\tau)$ для МАР-потока [26].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$

В моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, поэтому совместная плотность вероятностей значений длительности двух соседних интервалов $p(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2), \quad (9)$$

где $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$ – плотности вероятностей, соответствующие переходным вероятностям $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{jk}(\tau_2)$ и вычисленные по формулам (2) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. Подставляя в (9) сначала $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$, затем $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{jk}(\tau_2)$, определённые формулами (1) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ и, наконец, $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, определённые в (6), и проделывая необходимые достаточно трудоёмкие преобразования, находим

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2) = & p(\tau_1) p(\tau_2) + \gamma(1 - \gamma) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} \left[P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \right] \times \\ & \times (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $p(\tau_1)$, $p(\tau_2)$, γ определены в (8) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$; z_1 и z_2 определены в (1).

Полагая в (10) параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим совместную плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ для МАР-потока событий [26].

4. Условия рекуррентности модулированного МАР-потока событий

Рассмотрим случаи, при которых модулированный МАР-поток событий становится рекуррентным. С учётом выражения (8) для γ и выражений (6) для $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, находим

$$\begin{aligned} \gamma(1-\gamma) = & \frac{z_1 z_2}{(z_2 - z_1)^2} \left(\lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] \right) \times \\ & \times \left\{ \pi_1(0) (\lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] + \alpha_1) - \pi_2(0) (\lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] + \alpha_2) \right\} \times \\ & \times \left\{ \lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] (\lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] + \alpha_2) + \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] (\lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] + \alpha_1) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализируя выражение для $\gamma(1-\gamma)$, замечаем:

1) если $\lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] = 0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$; подставляя указанные условия в выражение (1) для z_1 , находим $z_1 = \lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)]$ либо $z_1 = \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]$; при этом из (8) следует, что $\gamma = 1$ и $p(\tau_i) = z_i e^{-z_i \tau_i}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2$, или $p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}$, $\tau \geq 0$;

2) если $\pi_1(0)(\lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] + \alpha_1) - \pi_2(0)(\lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] + \alpha_2) = 0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. При этом из (1) следует, что

$$z_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] + \lambda_1 \alpha_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_2 \alpha_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] + \alpha_2}$$

либо

$$z_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_1 \alpha_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 \alpha_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_2)}{\lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] + \alpha_1}, \quad (12)$$

и из (8) находим $\gamma = 1$ и $p(\tau_i) = z_i e^{-z_i \tau_i}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2$, т.е. $p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Из выражения (10) для совместной плотности вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ следует третье условие её факторизации: $P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$. Тогда из (6) в результате необходимых преобразований находим

$$\begin{aligned} \pi_1(0) = & \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)} \quad \text{либо} \quad \pi_1(0) = \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_2)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)}, \\ \pi_2(0) = & \frac{P_1(\lambda_2 | \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)} \quad \text{либо} \quad \pi_2(0) = \frac{P_1(\lambda_2 | \lambda_2)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Тогда из (8) следует

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{1}{z_2 - z_1} \{ z_2 - \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \}, \\ 1 - \gamma = & \frac{1}{z_2 - z_1} \{ -z_1 + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \} \end{aligned}$$

и $p(\tau_i) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau_i} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau_i}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2$, т.е. $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Если выполняется одно из перечисленных условий, то тогда модулированный МАР-поток событий будет рекуррентным потоком. Действительно, пусть $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей значений длительностей интервалов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$. Для $k = 1$ имеет место $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2)$. Докажем факторизацию плотности $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ методом математической индукции. Пусть $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p(\tau_1) \dots p(\tau_k)$. Так как в моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \dots, t_k$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, образует вложенную цепь Маркова, то дальнейшее после момента t_k поведение потока не зависит от предыстории. Тогда $p(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_{k+1} | \tau_1, \dots, \tau_k) p(\tau_1, \dots, \tau_k) = p(\tau_{k+1} | \tau_k) p(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Здесь $p(\tau_{k+1} | \tau_k) = p(\tau_k, \tau_{k+1}) / p(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов (t_k, t_{k+1}) ,

(t_{k+1}, t_{k+2}) , $k = 1, 2, \dots$, расположенных на временной оси произвольно, справедливо $p(\tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_k)p(\tau_{k+1})$, то $p(\tau_{k+1}|\tau_k) = p(\tau_{k+1})$. Таким образом, $p(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_{k+1})p(\tau_1, \dots, \tau_k)$ или $p(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_1)p(\tau_2) \dots p(\tau_{k+1})$.

При обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, приведённых в [28, 29].

Для первого условия факторизации $\lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] = \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2)]w(\lambda_1 | t_k - 0) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}.$$

Таким образом, апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ (несмотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}$) зависит от предыстории, т.е. от значений апостериорной вероятности $w(\lambda_1|t)$ в моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k$. Если ввести дополнительное условие $\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) = \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)$, то

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_2)}{1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т.е. апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ не будет зависеть от предыстории, а будет определяться лишь её значением в момент наступления события потока. Это значение апостериорной вероятности одинаково для всех моментов времени t_k наступления событий потока, $k = 1, 2, \dots$. Итак, при дополнительном ограничении имеется некоторая близость модулированного МАР-потока событий к простейшему потоку.

Для второго условия факторизации $\pi_1(0)(\lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)] + \alpha_1) - \pi_2(0)(\lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)] + \alpha_2) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k также будет зависеть от предыстории, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность экспоненциальная: $p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Для третьего условия факторизации $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)} = \pi_1(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ не зависит от предыстории, а определяется лишь её (апостериорной вероятности) значением в момент наступления события потока. Итак, в данной ситуации имеется некоторая близость модулированного МАР-потока событий к простейшему потоку в том смысле, что апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий потока принимает постоянное значение.

Заключение

Полученные результаты можно использовать для решения задачи оценивания неизвестных параметров модулированного МАР-потока событий, таких как интенсивности λ_1, λ_2 и вероятности $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = 1, 2$. При этом, например, для нахождения оценок, после построения соответствующей функции правдоподобия, можно воспользоваться методом максимального правдоподобия либо применить метод моментов, решив соответствующие системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 6. С. 92–99.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.

6. *Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
7. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
8. *Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9 (II). С. 129–138.
9. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
10. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 24–29.
11. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika. 1995. V. 40, No. 7–8. P. 6–10.
12. *Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
13. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
14. *Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
15. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
16. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
17. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko, T.I.* Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
18. *Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Оценка длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
19. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщённого полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
20. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мёртвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
21. *Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A.* Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
22. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1 (I). С. 18–23.
23. *Нежелская Л.А.* Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
24. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
25. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A.* Optimal state estimation in map event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
26. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов МАР-потока событий и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 32–41.
27. *Нежелская Л.А.* Апостериорные вероятности состояний модулированного МАР-потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 95–96.
28. *Нежелская Л.А.* Оптимальная оценка состояний модулированного МАР-потока событий в условиях непродлеваемого мёртвого времени // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014) : материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 193–198.
29. *Nezhel'skaya L.A.* Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Communications in Computer and Information Sciences : proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov «Information Technologies and Mathematical Modeling» (November 20–22, 2014). Cham Heidelberg ; New York ; Dordrecht ; London : Springer, 2014. P. 342–350.

Нежелская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук. E-mail: ludne@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 15 ноября 2014 г.

Consider a modulated MAP flow of events with the intensity represented by a piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: $\lambda(t) = \lambda_1$ or $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). The time when the process $\lambda(t)$ remains at the i th, $i = 1, 2$, state depends on two random values: 1) the first random value has the exponential distribution function $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$; when the i th state ends, process $\lambda(t)$ transits with the probability equal one from the i th state to the j th, $i = 1, 2, (i \neq j)$; 2) the second random value has the exponential distribution function $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; when the i th state ends, process $\lambda(t)$ transits with probability $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ from the i th state to the j th ($i \neq j$) and a flow event occurs or process $\lambda(t)$ transits with probability $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ from the i th state to the j th ($i \neq j$), but the flow event does not occur, or process $\lambda(t)$ transits from the i th state to the i th with probability $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ and a flow event occurs. Here, $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$; $i = 1, 2, i \neq j$.

The first and the second random values are independent from each other. Under these assumptions, $\lambda(t)$ is a Markov process. The infinitesimal characteristics matrices for the process $\lambda(t)$ are as follows:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{bmatrix}.$$

We consider the stationary operation mode for the flow. Denote by $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$ the value of interval k duration between the neighboring flow events. We may take that the probability density of the interval k duration is $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, for any k . Then, we can let $t_k = 0$ without loss of generality, i.e., the moment of the event occurrence is $\tau = 0$. Now, let (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) be the neighboring intervals with the corresponding duration values $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$. Due to the stationary of the flow, the arrangement of the intervals on a time axis is arbitrarily. That is way, we may consider the neighboring intervals (t_1, t_2) , (t_2, t_3) with the corresponding duration values $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Here $\tau_1 = 0$ corresponds to the moment t_1 and $\tau_2 = 0$ corresponds to the time moment t_2 when the next event in the flow occurs. The respective joint probability density is defined as $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

The aim of this article is to obtain the explicit form of the probability density $p(\tau)$ and the joint probability $p(\tau_1, \tau_2)$ and then to formulate the conditions of the flow recurrence. These formulas are obtained and are as follows:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0) [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] \right\},$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right], \quad 0 < z_1 < z_2,$$

$$\pi_1(0) = \left\{ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) \right\} \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\}^{-1},$$

$$\pi_2(0) = \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\} \left\{ \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) \right\}^{-1}.$$

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) + \gamma (1 - \gamma) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1)] \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0.$$

REFERENCES

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*, 1964, vol. 60, no. 4, pp. 923-930.
2. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1980, no. 6, pp. 92-99.

3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1980, no. 1, pp. 55-61.
4. Neuts M.F. A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
5. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU Publ., 2000. 175 p.
6. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 9, pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
7. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika*, 2004, no. 10, pp. 8-16.
8. Vasilevskaya T.P., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of the synchronous alternative flow with displaying or no displaying of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2004, no. 9 (II), pp. 129-138. (In Russian).
9. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Estimation of the dead-time period and parameters of the synchronous alternative flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2003, no. 6, pp. 232-239.
10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events by the moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2002, no. 1(I), pp. 24-29.
11. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika*, 1995, vol. 40, no. 7-8, pp. 6-10.
12. Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. Maximum-likelihood estimation of the dead time in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2013, no. 2 (23), pp. 54-63. (In Russian).
13. Gortsev A.M., Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. Joint probability density of the intervals duration for generalized asynchronous flow of events with unextendable dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2012, no. 4 (21), pp. 14-25. (In Russian).
14. Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. The probability of wrong decision in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2012, no. 2 (19), pp. 88-101. (In Russian).
15. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
16. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the asynchronous flow with initiation of superfluous events by moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2006, no. 18, pp. 267-273.
17. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A., Shevchenko, T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*, 1993, vol. 36, no. 12, pp. 1153-1167.
18. Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. [Estimation of the dead time duration in a generalized semi-synchronous flow of events]. *Materialy konferentsii "Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur"* [Proceedings of the 10th Russian conference with international participation "Novel information technologies for studying complex structures"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pp. 96-97. (In Russian).
19. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation for a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2 (11), pp. 66-81. (In Russian).
20. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 31-41. (In Russian).
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
22. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the semi-synchronous double stochastic flow of events by moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2002, no. 1 (I), pp. 18-23.
23. Nezhel'skaya L.A. Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudae-mosti [Optimal state estimation of the semi-synchronous flow of events under incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2000, no. 269, pp.95-98.
24. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1 (14), pp. 13-21. (In Russian).
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in map event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
26. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. The join density of probability intervals MAP of the flow of events and condition of its recurrence. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 3 (20), pp. 32-41. (In Russian).

27. Nezhel'skaya L.A. [Optimal state estimation for a modulated MAP events flow with unextendable dead time]. *Materialy XIII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM)"* [Proceedings of the 13th International scientific conference named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pt. 2, pp. 193-198. (In Russian).
28. Nezhel'skaya L.A. [Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014): materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Proceedings of the 13th International scientific conference named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pt. 2, pp. 193-198. (In Russian).
29. Nezhel'skaya, L.A. [Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time]. *Communications in Computer and Information Sciences: Proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"*. Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer, 2014, pp. 342-350.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.17

В.В. Андреева, К.А. Сорудейкин

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕСТОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИТЕРАТИВНОГО ПОДХОДА ПО МНОГИМ ПЕРЕМЕННЫМ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 14-19-00218.

Предлагается метод сокращения тестовых последовательностей, представленных в виде троичных векторов с помощью дерева декомпозиции, основанного на разложении множеств троичных векторов по нескольким переменным.

Ключевые слова: дерево декомпозиции; максимально-совместимые подмножества; троичные векторы.

Рассматривается тестовая последовательность $T = \{t_1, \dots, t_s\}$, представленная в виде троичных векторов. Тестовый набор b_i , полученный из троичного вектора t_i путем доопределения неопределенных компонент, обнаруживает неисправность f_i из множества F . Необходимо найти минимальную либо достаточно близкую к минимальной тестовую последовательность без потери покрытия множества рассматриваемых неисправностей.

В данной работе предлагается модификация алгоритма, описанного нами ранее в работе [3] и до этого развиваемого в работах [1, 2]. Анализируется тестовая последовательность, в которой отсутствуют поглощающие векторы. Сокращение длины тестовой последовательности выполняется за счет операции пересечения троичных векторов. Основная идея сокращения тестовой последовательности заключается в выделении максимально совместимых подмножеств T'_i из T , где каждое T'_i порождает булев вектор (тестовый набор), полученный путем пересечения (совмещения) всех элементов этого подмножества с последующим доопределением неопределенных компонент. Построение максимально совместимых подмножеств предлагается выполнять с помощью дерева разложения по немонотонным переменным, рассматриваемого в [1–3]. В работе [3] предлагается модификация дерева разложения, которая позволяет, во-первых, избавиться от дублирования троичных векторов в дочерних вершинах, а во-вторых, находить решение без использования классической задачи покрытия. Отсутствие дублирования сокращает глубину дерева разложения, а исключение задачи покрытия сокращает вычислительные затраты при поиске решения. Если правильно распределить ограничения и поставить наиболее значительные из них в самом начале, то можно сократить вычислительные затраты. Этому принципа мы придерживаемся в наших работах и называем его *пространственно-ориентированной оптимизацией* [4].

В данной работе развивается подход [5,7], основанный на разложении множества векторов по многим переменным. Такое разложение выполняется в том случае, если в множестве векторов выделяется некоторое *множество максимально определенных немонотонных переменных*, а именно немонотонных переменных с одинаковым минимальным числом неопределенных символов. Предлагается итеративный подход к построению дерева декомпозиции, который позволяет избавиться от избыточных шагов на стадии формирования результата и освободиться в ряде случаев от необходимости использования перебора.

1. Типы данных и основные определения

Заданное множество T троичных векторов представляется в древовидной структуре путем распределения векторов по вершинам на основе некоторого набора признаков. В качестве таких признаков выбираются значения отдельных переменных векторов.

Троичный вектор представляет собой вектор, компоненты (переменные) которого могут принимать значения из множества $\{0, 1, x\}$. Напомним, что символ x в троичном векторе означает неопределенную компоненту, которая может принимать значение либо 0, либо 1. Значения $\{0, 1\}$ переменной троичного вектора будем называть *определенными* значениями, значение x – *неопределенным* значением.

Векторы, у которых одноименные переменные принимают значения 0,1 (1,0), будем называть *ортгогональными*.

Переменная для некоторого множества векторов может быть *монотонной*. Это значит, что в векторах этого множества она встречается либо со значением 0(1), либо со значением x . Переменная для этого множества векторов *не монотонна*, если она встречается как со значением 0, так и со значением 1.

Основная операция, используемая для сокращения длины тестовой последовательности, – это операция *пересечения*. Троичные векторы, пересечение которых не пусто, будем называть *совместимыми*. Например, рассмотрим следующие троичные векторы: $t_1 = 1xx10$, $t_2 = x10xx$, их результат пересечения определяется вектором $t_1 \cap t_2 = 11010$. Совместимые векторы монотонны по всем переменным.

Из заданного множества T необходимо сформировать попарно не пересекающиеся *максимально-совместимые* подмножества.

2. Использование дерева для извлечения решения

В данной работе в качестве анализируемой структуры используется дерево. Мы обобщаем его структуру, представленную в [1, 6]. Из вершины дерева может исходить одна, две или три дуги. Каждой дуге сопоставляются значения соответствующих переменных, используемых для разложения множества векторов для рассматриваемой вершины. Множество разбивается на более мелкие подмножества, соответствующие дочерним вершинам. В каждом подмножестве дочерней вершины значения переменных разложения совпадают с комбинацией значений переменных дуги, заходящей в эту вершину. Будем говорить, что векторы дочерних вершин совместимы по переменным разложения родительской вершины. Отметим, что каждой вершине дерева сопоставляется множество троичных векторов, совместимое по значениям переменных разложения, сопоставляемых вершинам пути, ведущим из корня дерева в рассматриваемую вершину. Вершина объявляется *концевой*, если сопоставляемое ей подмножество монотонно по всем переменным.

Итак, исходное множество T троичных векторов разделяется на подмножества, сопоставляемые вершинам дерева, на основе свойства совместимости по значениям на подмножестве переменных, определяемых путем, ведущим в рассматриваемую вершину.

Возможны различные правила выбора переменных (различные эвристики) для разложения в очередной вершине дерева. Например, для сокращения глубины дерева при разложении выбирается переменная с минимальным числом неопределенных значений в множестве векторов, сопоставляемых вершине. В этом случае из вершины дерева проводится три дуги – по одной на каждое значение переменной из множества $\{0, 1, x\}$. Дочерним вершинам сопоставляются множества троичных векторов, принимающие соответствующие (одинаковые) значения по рассматриваемой переменной. Каждое полученное множество разлагается, если возможно, аналогичным образом. В результате такого разложения строится дерево, в котором концевым вершинам будут соответствовать *совместимые подмножества*, а ветвям со значением x – множества, элементы которых добавляются в совместимые подмножества с целью построения максимально-совместимых подмножеств. Правила добавления рассматриваются в [1, 2].

Для удобства дальнейшего изложения предлагаемого подхода введем понятие *поддерева решения*. В него включаются пути дерева, помеченные определенными значениями $\{0, 1\}$ переменных и ведущие в терминальные вершины. В дереве присутствуют дуги, помеченные значением x . Будем считать, что эти дуги вместе с инцидентными им вершинами не входят в дерево решения. Множество троичных

векторов, сопоставляемое этим вершинам, будем называть **LDC** (local don't care set)-множеством – множеством локальных неопределенных компонент. Множества **LDC_i**, сопоставляемые некоторым вершинам дерева, используются для добавления их векторов в множества, сопоставляемые концевым вершинам *поддерева решения* с целью получения максимально совместимых подмножеств.

3. Метод построения максимально совместимых подмножеств

Максимально совместимые подмножества предлагается строить с помощью дерева декомпозиции. В разделе 3 описан общий механизм его построения на основе исходного множества троичных векторов. Опишем здесь детали общей процедуры.

Одна процедура построения дерева (раскрытие вершины дерева) в нашей работе называется *итерацией*. В процессе решения задачи может быть выполнено несколько итераций для достижения требуемого результата. По выполнении итерации производится проверка на получение нужного решения, и в случае необходимости осуществляется следующая итерация. Существует набор условий, на основании которого мы выполняем эту проверку. Можно выделить начальную, результирующую и промежуточные итерации, располагаемые между ними. В свою очередь, каждая итерация включает в себя ряд действий, в основе которых лежит построение дерева и получение в процессе построения разбиения векторов начального множества. В данной работе полученные на каждой итерации результаты представляем в виде нового начального множества и обрабатываем его той же самой процедурой разложения дерева, повторяя этот процесс, пока не выполняются *условия*, описанные в работе [6]:

- Если очередной вершине сопоставляется монотонное подмножество, то вершина объявляется концевой. В соответствии с работой [6] считается, что терминальные вершины не относятся к дугам **LDC_i**, которые являются *вспомогательными*.

- Наличие множества **LDC_i** означает необходимость дальнейшей обработки этого множества либо новой итерацией, либо процедурой обратного обхода. Следует иметь ввиду, что все векторы **LDC_i** необходимо в конце концов распределить по терминальным вершинам.

- Модификация начального множества выполняется в случае формирования совместимых подмножеств мощности больше 1, соответствующих терминальным вершинам дерева разложения. В результате пересечения совместимого подмножества продуцируется новый элемент, который будет не равен какому-либо уже существующему элементу в исходном множестве заданной итерации, но возможно поглощение этим элементом других; в этом случае все поглощенные элементы исключаются и формируется новая итерация.

4.1. Выбор переменных для дерева разложения

В соответствии с правилами построения дерева разложения в каждой вершине выбирается переменная разложения с минимальным числом неопределенных значений на множестве троичных векторов, сопоставляемом вершине. Возможно, что таких переменных несколько. В более ранних работах [1, 2] эта ситуация игнорировалась и разложение проводилось по любой из них. В работе [7] была высказана идея разложения по многим переменным. В данной работе эта идея развивается.

Напомним, что терминальным вершинам дерева декомпозиции соответствуют совместимые подмножества, относительно которых в дальнейшем формируются максимально совместимые подмножества путем добавления в них элементов из **LDC_i**.

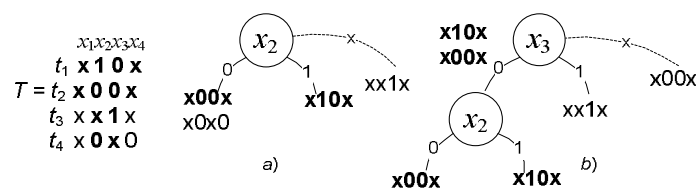


Рис. 1. Пример с двумя альтернативными деревьями декомпозиции

Анализируя множество максимально определенных столбцов, можно выделить следующие ситуации:

1. Из заданного множества троичных векторов можно выделить такое подмножество **D** троичных векторов, у которых переменные с минимальным числом неопределенных значений для множества в целом принимают *только определенные значения*. В этом случае, если выполнять разложение по *любым* из соответствующих переменных, эти троичные векторы будут приписаны терминальным вершинам во всех альтернативных деревьях, полученных по этим переменным. Например, переменным x_2, x_3 (рис. 1) соответствуют максимально определенные столбцы, а троичные векторы t_1, t_2 по этим переменным принимают только определенные значения. Здесь при поиске решения возможны альтернативы, так как присутствуют два максимально определенных столбца. Итак, построив для каждой из альтернатив свое дерево разложения, векторы t_1, t_2 будут сопоставляться терминальным вершинам в каждом дереве, что следует из процедуры разложения.

2. Из заданного множества троичных векторов невозможно выделить подмножество **D** троичных векторов, у которых переменные с минимальным числом неопределенных значений для множества в целом принимают только определенные значения. Если выполнять разложение по *любым* из соответствующих переменных, каждый раз будет построено очередное альтернативное решение. В этом случае воспользуемся максиминной стратегией выбора переменной разложения, а именно выбираем ту переменную, которой соответствует максимально определенный столбец с минимальным количеством определенных значений **0(1)**. Такой выбор переменной обусловлен тем, что одной из ветвей будет соответствовать минимальное по мощности множество, а раз векторов с таким определенным значением по этой переменной мало, то формирование решения можно начать с них.

3. Из заданного множества троичных векторов можно выделить такое подмножество **D*** троичных векторов, у которых переменные с минимальным числом неопределенных значений для множества в целом принимают *только неопределенные значения*. В этом случае, если выполнять разложение по *любым* из соответствующих переменных, эти троичные векторы будут входить в множество LDC_i . Следовательно, во всех альтернативных деревьях эти векторы либо расширяют совместимые множества до максимально совместимых, либо формируют новое решение.

Третий вариант не применяется в решаемой задаче, поэтому в данной работе предлагается учитывать первые две ситуации при построении дерева разложения и построении решения.

4.2. Разложение по многим переменным

Разложение по нескольким переменным выполняется в том случае, если выполняются следующие условия:

1. На этапе выбора немонотонной переменной выделяется некоторое множество из двух и более переменных с минимальным числом неопределенных значений для множества в целом.
2. Можно выделить троичные векторы, принимающие определенные значения по этим переменным.

Т а б л и ц а 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
t_1	x	1	1	x	x	x
t_2	x	1	x	1	x	x
t_3	x	1	x	x	1	1
t_4	0	x	x	1	x	0
t_5	1	0	x	1	x	x
t_6	1	x	1	x	x	x
t_7	x	0	0	0	0	1
t_8	0	x	x	1	0	1
t_9	0	x	0	0	x	1
t_{10}	x	0	0	0	1	x
t_{11}	1	0	x	x	0	x
t_{12}	x	1	0	0	x	0

При выполнении этих условий, дерево разложения по многим переменным строится следующим образом: из общего множества троичных векторов выделяется подмножество **T*** векторов, удовлетворяющих условиям 1, 2. Из оставшихся векторов формируется множество **LDC** по переменным $\{x_i\}$, не удовлетворяющим условиям 1, 2. Такое множество в дальнейшем будем обозначать LDC^*_i .

Множество **T*** разлагается по выделенным переменным стандартным способом, в результате чего строится дерево разложения. Если множество LDC^*_i не пусто, то оно приписывается корневому узлу дерева. Графически это можно представить так, что из корня дерева проводится дуга, помеченная значением $\{x_i\}$, которой сопоставляется множество LDC^*_i .

Если терминальным вершинам $0(1)$ деревьев соответствует хотя бы одно совместимое подмножество мощности больше 1, то формируется *шаг итерации*, в противном случае осуществляется поиск максимально совместимых подмножеств.

Рассмотрим построение разложения по многим переменным на примере табл. 1, где список троичных векторов представлен в виде матрицы. Ее столбцам сопоставляются переменные, а строками являются троичные векторы.

В рассматриваемом примере столбцы, соответствующие переменным x_2 и x_4 , являются максимально определенными (с минимальным числом неопределенных значений), а троичные векторы $t_2, t_5, t_7, t_{10}, t_{12}$ принимают определенные значения по этим переменным. Сформируем множество T^* , включив в него выделенные троичные векторы, а все остальные векторы включим в множество LDC^*_1 . Строим дерево разложения по переменным x_2, x_4 , сначала выполняется разложение по x_2 , затем по x_4 . Заметим, что эти переменные являются в множестве T^* не только максимально, но и полностью определенными, что следует из построения. Этот факт говорит о том, что порядок разложения по переменным x_2, x_4 не влияет на результат разложения. Для рассматриваемого примера и непустого множества LDC^*_1 формируется дуга, выходящая из корня дерева, помеченная $\{x_2, x_4\}$ (рис. 2).

4.3. Процесс построения решения

Если в результате разложения по многим переменным LDC множество является пустым, тогда троичные векторы, находящиеся в терминальных вершинах, *включаются в решение*, в противном случае выполняется построение *максимально совместимых подмножеств*.

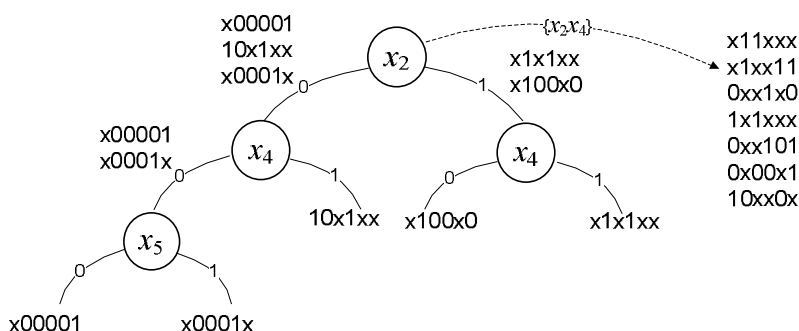


Рис. 2. Пример дерева разложения по многим переменным

Отметим, что терминальным вершинам при разложении по многим переменным сопоставляются отдельные троичные векторы q_i . К каждому вектору могут быть добавлены векторы из LDC^* . Полученные множества обозначим Q_i , $q_i \in Q_i$. Так как множество LDC^*_i не пусто, для построения максимально совместимых подмножеств необходимо добавить подходящие векторы из LDC^*_i в одноэлементные множества терминальных вершин дерева. Строим каждое множество Q_i путем добавления троичных векторов из LDC^*_i , *совместимых* с q_i . Заметим, что при таком построении множеств Q_i возможно появление одинаковых троичных векторов в разных Q_i , поскольку элементы из LDC^*_i могут совмещаться с различными терминальными элементами q_i . Далее необходимо выполнить следующие шаги.

1. Если среди множеств Q_i выделяются совместимые, то они являются *максимально совместимыми*, так как ни один новый элемент не может быть добавлен в эти множества. В данном случае для каждого совместимого множества формируется свой вектор путем совмещения всех элементов с последующим добавлением его в решение. Так как на этапе построения множеств Q_i допускались одинаковые векторы в различных множествах, то после добавления полученных векторов в решение у оставшихся подмножеств исключаются те элементы, которые уже участвовали в формировании решения. Таким образом, среди оставшихся множеств Q_i возможно появление новых совместимых подмножеств. В этом случае действия 1 повторяются, в противном случае переходим к действиям, определенным в разделе 2.

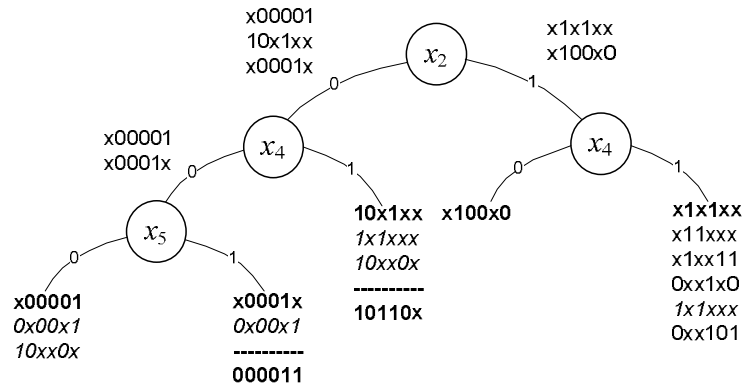


Рис. 3. Формирование множеств для элементов q_i

2. Если множества Q_i не совместимы, то для каждого множества продолжается разложение. Результат разложения представляется деревом определенного вида: элемент q_i всегда будет соответствовать дуге, помеченной значениями x , все остальные векторы, объединённые в совместимые подмножества, – терминальным вершинам. Такое представление связано с тем, что при построении множество Q_i состоит из элемента q_i и элементов, совместимых с ним. Следовательно, в общем случае для дерева такого вида формирование максимально совместимого подмножества элемента q_i выполняется путем добавления этого элемента к любому совместимому подмножеству этого дерева. Предлагается на этом этапе в решении выбирать максимально совместимые подмножества максимальной мощности, в которые входят элементы q_i , с последующим исключением из оставшихся множеств повторяющихся векторов, уже включенных в решения. В результате этой процедуры все максимально совместимые подмножества, включающие элемент q_i , будут добавлены в решение, а оставшееся дерево может удовлетворять следующим условиям:

- если множество LDC^*_i не пусто и в дереве присутствуют максимально совместимые подмножества, то в этом случае формируется *новая итерация*;
- если множество LDC^*_i пусто и в дереве присутствуют максимально совместимые подмножества, то они включаются в решение.

Для примера рассмотрим построение максимально совместимых подмножеств (рис. 2). Для каждой терминальной вершины, которой сопоставлен троичный вектор q_i , формируем множество Q_i путем добавления совместимых с q_i векторов из множества LDC^*_i . На рис. 3 показаны множества Q_i для элементов q_i , курсивом отмечены те элементы, которые включены в разные подмножества.

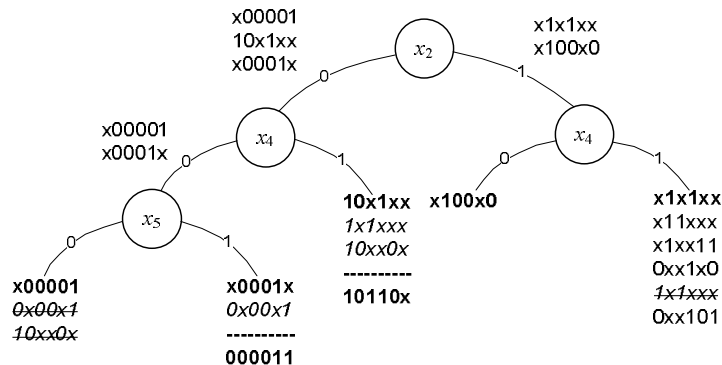


Рис. 3а. Выполнение операции совмещения

Если после добавления вновь получившиеся множества являются совместимыми, то применяем операцию *пересечения* к элементам *совместимых* подмножеств, а получившиеся векторы добавляем в решение. Так как при формировании подмножеств возможны повторения одинаковых векторов в тер-

минальных вершинах, то после формирования решения нужно исключить из оставшихся подмножеств векторы, которые уже участвовали в формировании решений (рис. 3а).

В рассматриваемом примере текущее решение будет иметь вид $T = \{10110x, 000011, x100x0\}$, а дерево после упрощения будет иметь вид, представленный на рис. 4, а.

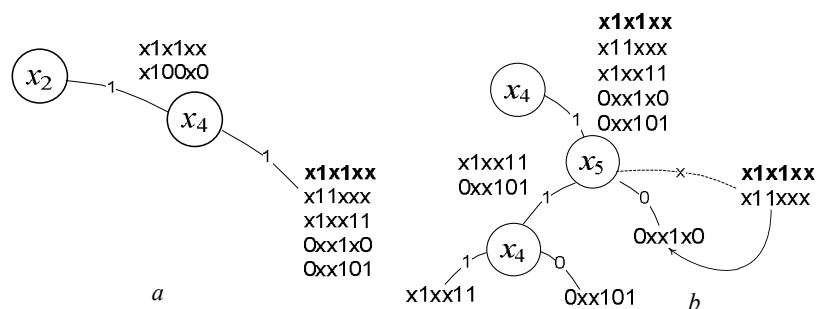


Рис. 4. Сокращенное дерево (а), дальнейшая процедура (b)

В примере оставшееся множество не является совместимым, следовательно, разложение этого множества продолжается традиционным способом (рис. 4, b), так как здесь всего один максимально определенный столбец.

Формируем максимально совместимое подмножество и полученные троичные векторы добавляем в окончательное решение. Если после выполнения такой процедуры в множестве остаются несовместимые подмножества, то они объединяются и разлагаются, а полученные векторы включаются в решение.

Получаем следующее результирующее множество: $T = \{10110x, 000011, x100x0, x1xx11, 0xx101, 01110\}$.

5. Экспериментальные результаты

Предложенный алгоритм программно реализован и испытан. В качестве оценки рассматриваемого подхода к сокращению длины тестовой последовательности предлагается сравнить полученные результаты с результатами сокращения длины алгоритмом [2]. Основные отличия предложенного подхода заключаются в том, что в алгоритме [2] выполняется построение максимально совместимых подмножеств на основе дерева декомпозиции, строящегося без формирования множеств LDC_i . В этом случае все элементы, принимающие значение x по переменной разложения, сопоставляются как левой, так и правой ветви. Кроме того, поиск окончательного решения сводится к задаче покрытия.

Таблица 2

№ п/п	%DC	L	L^*	T^*	L^{**}	t^{**}
1	60	32	23	0,2020	22	0,0051
2	65	32	19	0,1853	17	0,0046
3	75	32	12	0,4656	12	0,0070
4	66	32	19	0,2703	17	0,0050
5	56	32	26	0,2033	25	0,0073
6	76	32	9	1,0400	10	0,0060
7	86	32	7	1,9730	6	0,0050
8	90	32	5	1,7371	5	0,0090
9	71	32	13	0,5360	15	0,0080
10	67	32	17	1,2851	18	0,0070

В качестве тестовых примеров рассматривались короткие тестовые последовательности, анализ которых не требует существенных вычислительных затрат. Количество входных переменных и начальная длина теста принимают значение 32. Примеры генерируются с помощью программы PlaGenerator 2.1 [8]. Экспериментальные результаты представлены в табл. 2, в которой введены следующие обозначения:

- **%DC** – данный параметр определяет количество символов X в процентах, генерируемых программой PlaGenerator 2.1;
- **L** – начальная длина теста;
- **L*** – длина теста, полученная методом из работы [2];
- **t*** – время работы алгоритма из работы [2] в секундах;
- **L**** – длина теста, полученная предложенным методом;
- **t**** – время работы предложенного алгоритма в секундах.

Анализируя полученные результаты, видим, что разработанный подход позволят получить неплохие по качеству решения, а в некоторых случаях наблюдаются улучшения результатов при существенном сокращении временных затрат.

Заключение

В данной работе предложен подход к сокращению длины тестовой последовательности, основанный на построении дерева декомпозиции. В очередной вершине дерева используется, если возможно, разложение подмножеств троичных векторов по многим переменным. Предлагаемый подход позволяет на порядки сокращать временные затраты при сохранении в целом качества сжатия исходных тестовых последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andreeva V.* Test minimization technique for multiple stuck-at faults of combinational circuits // Proc. 8th East-West Design&Test International Symposium, Saint Petersburg, Russia, 2010. P. 168–170.
2. *Andreeva V.* Test Set Compaction Procedure for Combinational Circuits Based On Decomposition Tree. // Proc. 9th East-West Design &Test Symposium, Sevastopol, Ukraine, 2011. P. 251–254.
3. *Andreeva V., Sorudeykin K.* A research of heuristic optimization approaches to the test set compaction procedure based on decomposition tree // Proceeding of IEEE EWDTS. 2012. P. 382–387.
4. *Sorudeykin K.* Irrespective Priority-Based Regular Properties of High-Intensity Virtual Environments // 20th IEEE Telecomm. Forum TELFOR 2012, Belgrade, Serbia, Nov 2012. P. 510–513.
5. *Андреева В.В., Сорудейкин К.А.* Пространственно-ориентированная оптимизация тестовых последовательностей с применением итеративного подхода // Материалы 10-й российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM 2014. Томск : Изд-во ТГУ, 2014. С. 46–47.
6. *Sorudeykin K., Andreeva V.* Decomposition Tree - based Compaction Procedure with Iteration Steps for Interconversional Layouts of Tasks // Proc. 12th IEEE East-West Design & Test Symposium, 2014. Kiev, Ukraine, 2014. P. 173–178.
7. *Андреева В.В., Сорудейкин К.А.* Сокращение длины тестовой последовательности на основе дерева декомпозиции // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56, № 9/2. С. 187–190.
8. URL: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Circ_Gen/

Андреева Валентина Валерьевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: valentina.andreeva@mail.tsu.ru

Томский государственный университет

Сорудейкин Кирилл Александрович. E-mail: Kirill.Sorudeykin@relvecorp.com

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редакцию 20 ноября 2014 г.

Andreeva Valentina V., Sorudeykin Kirill A. (Tomsk State University, Russian Federation, Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine).

Spatial-related optimization of test sequences based on iteration approach.

Keywords: Tree of decomposition; triple vectors; maximally compatible subsets.

In this paper, we study structures with source-child relations projection. First we provide (deduce) a specification of several indicators and relations of subject matter. Then, we go through practical implementation. As an example, we consider a modification of algorithm proposed earlier in our research. According to our terminology, we process series of triple vectors containing variables, shorten the data by constructing a decomposition tree applying the operations of intersection, merging, and absorption of vectors within groups according to the structure. Then, we form maximally compatible subsets by a decomposition tree and perform hiping for non-specified variables by merging several vectors into one. The task is specified as a matrix of triple variables, and rows are vectors. Each vector is used in operations as a whole in spite of the vectors are series of variables. Maximally compatible subsets are considered in the scope of the given initial task by the Pareto-effective relation.

Earlier, we have introduced several modifications of an algorithm, making several specifications to avoid duplication of indifferent vectors in child nodes and reducing the necessity of covering task. As usual, we determine maximally defined variable to build a next node for a decomposition tree.

So, we apply the distribution by several maximally defined variables in case of a group with the same amount of defined values. From here, less steps and smaller tree are obtained. Note, an iteration approach has been proposed for the procedure, which allows avoiding excess steps and combinatory actions on the assembling stage. At this, recursion and universalization of method are used here. Also, the principle of the Layout-Related optimization is introduced in our paper.

REFERENCES

1. Andreeva V. Test minimization technique for multiple stuck-at faults of combinational circuits. *Proc. 8th East-West Design&Test International Symposium*, Saint Petersburg, Russia, 2010, pp. 168-170. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742046
2. Andreeva V. Test Set Compaction Procedure for Combinational Circuits Based On Decomposition Tree. *Proc. 9th East-West Design & Test Symposium*, Sevastopol, Ukraine, 2011, pp. 251-254. DOI: 10.1109/EWDTS.2011.6116596
3. Andreeva V., Sorudeykin K. A research of heuristic optimization approaches to the test set compaction procedure based on decomposition tree. *Proceeding of IEEE EWDTS*, 2012, pp. 382-387. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673219
4. Sorudeykin K. Irrespective Priority-Based Regular Properties of High-Intensity Virtual Environments. *20th IEEE Telecomm. Forum TELFOR 2012*, Belgrade, Serbia, Nov 2012, pp. 510-513. DOI: 10.1109/TELFOR.2012.6419259
5. Andreeva V.V., Sorudeykin K.A. [A method for minimizing test sequences based on spatial-related optimization with iteration steps] *Materialy 10 oy rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur" ICAM 2014* [Proc. of the 10th new information technologies in the study of complex structures ICAM 2014]. Tomsk: TSU Publ., 2014, pp. 46-47.
6. Sorudeykin K., Andreeva V. Decomposition Tree-based Compaction Procedure with Iteration Steps for Interconversional Layouts of Tasks. *Proc. 12th IEEE East-West Design & Test Symposium*, 2014, Kiev, Ukraine, 2014, pp. 173-178. DOI: 10.1109/EWDTS.2014.7027091
7. Andreeva V.V., Sorudeykin K.A. Sokrashchenie dliny testovoy posledovatel'nosti na osnove dereva dekompozitsii [Reducing the length of the test sequence based on tree decomposition]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 9/2, pp. 187-190.
8. *Random Circuits Generators*. Available at: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Circ_Gen/

О.И. Голубева

**ФУНКЦИИ ОБНАРУЖЕНИЯ КОНСТАНТНОЙ НЕИСПРАВНОСТИ,
УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ПОЛЮСА ЭЛЕМЕНТА
КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ**

Исследуются функции обнаружения константной неисправности, управляемости и наблюдаемости полюса элемента комбинационной схемы. В работе предложены эффективные методы получения функции наблюдаемости в виде BDD и ортогональной ДНФ. BDD и ОДНФ представления для функции обнаружения константной неисправности α предлагается получать как произведение BDD и ОДНФ соответственно функции наблюдаемости и функции $\bar{\alpha}$ -управляемости. Выполненные исследования позволяют совместно решать ряд задач, связанных с константной неисправностью на полюсе элемента схемы.

Ключевые слова: комбинационная схема; константная неисправность; тестовые наборы; наблюдаемость; BDD; ОДНФ.

В настоящее время цифровые устройства используются повсеместно, и обеспечение их надежного функционирования является актуальной проблемой. Сегодня существует достаточно много моделей неисправностей, но классическая модель константной неисправности на полюсе элемента схемы остается по-прежнему популярной и исследователи продолжают искать эффективные методы решения различных задач, связанных с константной неисправностью [1]. Для константной неисправности исследуются такие задачи, как построение одного теста, некоторого подмножества тестов или всех тестов, оценка управляемости и наблюдаемости полюса элемента схемы и т.д. Исследования, выполненные в данной работе, позволяют решать совместно ряд задач, связанных с константной неисправностью.

В настоящей статье исследуются функции обнаружения константной неисправности, наблюдаемости и управляемости для некоторого полюса элемента комбинационной схемы. Функция обнаружения константной неисправности представляет все тестовые наборы для обнаружения одиночной константной неисправности на полюсе; функция наблюдаемости представляет множество тех наборов входных переменных, которые обеспечивают смену значения на выходе схемы при смене значения на рассматриваемом полюсе; функция управляемости представляет наборы входных переменных, устанавливающие на полюсе значений α , $\alpha \in \{0, 1\}$. Также исследуются эффективные способы получения этих функций в виде BDD и ортогональной дизъюнктивной нормальной формы (ОДНФ). ОДНФ и BDD представления булевой функции характерны тем, что по ним легко получить множество наборов значений входных переменных, обращающих функцию в единицу, так как конъюнкции ОДНФ взаимно ортогональны и, следовательно, любой набор значений входных переменных может обратить в единицу не более одной конъюнкции ОДНФ; в BDD все пути от корня к некоторой терминальной вершине также представляют взаимно-ортогональные конъюнкции. То есть, например, ОДНФ функции обнаружения некоторой константной неисправности представляет множество тестов для этой неисправности, а каждая конъюнкция ОДНФ представляет подмножество этого множества, и подмножества, соответствующие разным конъюнкциям, не пересекаются. Кроме того, имея ОДНФ или BDD представление булевой функции, легко вычислить вероятность единичного значения функции на случайном входном наборе, и, следовательно, получение одного из этих представлений для рассмотренных функций позволяет вычислить меры тестопригодности: вероятность обнаружения неисправности, управляемость и наблюдаемость. Данная работа является продолжением исследований, выполненных в работах [2–4].

1. Основные определения

Пусть имеется комбинационная схема S с n входами и m выходами. В данной работе будем рассматривать только одиночные константные неисправности.

Пусть константная неисправность $\alpha \in \{0, 1\}$ присутствует в полюсе v схемы; $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, – функция, реализуемая i -м выходом исправной схемы и зависящая от входных переменных множества X , $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, а $\varphi_i^\alpha(X)$, $\alpha \in \{0, 1\}$, – функция, реализуемая i -м выходом схемы, в которой присутствует неисправность константа α в полюсе v .

Будем говорить, что булева функция представляет некоторое множество входных наборов тогда, когда она принимает значение 1 на всех наборах из этого множества и только на них.

Будем называть *функцией обнаружения неисправности* α , $\alpha \in \{0, 1\}$, $D^\alpha(X)$, функцию вида

$$D^\alpha(X) = (\varphi_1(X) \oplus \varphi_1^\alpha(X)) \vee \dots \vee (\varphi_m(X) \oplus \varphi_m^\alpha(X)) = D_1^\alpha(X) \vee \dots \vee D_m^\alpha(X), \quad (1)$$

$$D_i^\alpha(X) = \varphi_i(X) \oplus \varphi_i^\alpha(X), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь $D_i^\alpha(X)$ – функция обнаружения неисправности α , $\alpha \in \{0, 1\}$, на i -м выходе схемы.

Функция обнаружения неисправности $D^\alpha(X)$ представляет все тестовые наборы для константной неисправности α .

Будем называть *функцией наблюдаемости* $B(X)$ функцию вида

$$B(X) = (\varphi_1^1(X) \oplus \varphi_1^0(X)) \vee \dots \vee (\varphi_m^1(X) \oplus \varphi_m^0(X)) = B_1 \vee \dots \vee B_m, \quad (3)$$

$$B_i(X) = \varphi_i^1(X) \oplus \varphi_i^0(X), \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Здесь B_i – функция наблюдаемости полюса v на i -м выходе схемы.

Функция $B(X)$ представляет наборы входных переменных, на которых смена значения в полюсе v приводит к смене значения хотя бы на одном из выходов схемы.

Функцию, реализуемую полюсом v схемы, будем называть *функцией 1-управляемости*, а инверсию этой функции – *функцией 0-управляемости*. Обозначим функцию 1-управляемости через $C^1(X)$, а 0-управляемости через $C^0(X)$; обозначим через $f(X)$ функцию, реализуемую полюсом v схемы. Тогда

$$C^1(X) = f(X), \quad C^0(X) = \overline{f(X)}. \quad (5)$$

Получение функции обнаружения неисправности и функции наблюдаемости непосредственно по формулам (1)–(4) в некотором известном в настоящее время представлении при больших размерах исходной схемы S может оказаться достаточно трудоемким. Например, если получать их по структурному описанию схемы, то необходимо рассмотреть схему практически двойного размера относительно исходной. Исследуем возможности сокращения трудоемкости при получении представлений данных функций. Рассмотрим получение этих функций в виде двух представлений: ОДНФ и BDD. Напомним, что ОДНФ называется ДНФ, в которой конъюнкции попарно ортогональны. Графовое представление булевых функций в виде BDD является одним из широко используемых в настоящее время, так как позволяет компактно представлять функции и эффективно выполнять операции над ними.

Начнем рассмотрение с функции наблюдаемости, а затем рассмотрим функцию обнаружения неисправности, поскольку она выражается через функцию наблюдаемости.

2. Функция наблюдаемости

2.1. ОДНФ-представление функции наблюдаемости

Сопоставим рассматриваемому полюсу схемы переменную v . Затем получим функцию $\eta_i(X, v)$, $i = \overline{1, m}$, реализуемую i -м выходом схемы, рассматривая переменную v в качестве входной.

$\eta_i(X, v)$ порождает функции $\varphi_i(X)$ и $\varphi_i^\alpha(X)$ для неисправности константа $\alpha \in \{0, 1\}$.

Для неисправности константа 1

$$\varphi_i^1(X) = \eta_i(X, 1);$$

для неисправности константа 0

$$\varphi_i^0(X) = \eta_i(X, 0).$$

Пусть $f(X)$ – булева функция, реализуемая полюсом v схемы и зависящая от входных переменных множества X . Тогда

$$\varphi_i(X) = \eta_i(X, f(X)).$$

Заметим, что $B_i(X)$ – это булева производная функции $\eta_i(X, v)$ по переменной v ($B_i(X) = \frac{\partial \eta_i(X, v)}{\partial v}$) [5].

Получим функции $\eta_i(X, v)$, $\bar{\eta}_i(X, v)$ и $f(X)$ в виде ОДНФ по структурному описанию схемы. ОДНФ функции $\eta_i(X, v)$ может быть представлена в виде

$$\eta_i(X, v) = K_i \vee K_i^v \cdot v \vee K_i^{\bar{v}} \cdot \bar{v}, \quad (6)$$

здесь K_i , K_i^v , $K_i^{\bar{v}}$ – ДНФ, не зависящие от переменной v . Очевидно, что ДНФ K_i , K_i^v , $K_i^{\bar{v}}$ являются ОДНФ.

Тогда ОДНФ функции для неисправности константа 1 примет вид

$$\varphi_i^1(X) = \eta_i(X, 1) = K_i \vee K_i^v;$$

ОДНФ функции для неисправности константа 0 примет вид

$$\varphi_i^0(X) = \eta_i(X, 0) = K_i \vee K_i^{\bar{v}}.$$

Функция исправной схемы примет вид

$$\varphi_i(X) = \eta_i(X, f(X)) = K_i \vee K_i^v \cdot f(X) \vee K_i^{\bar{v}} \cdot \bar{f}(X).$$

Представление функции $\eta_i(X, v)$ в виде (6) предложено в работе [6].

ОДНФ функции $\bar{\eta}_i(X, v)$ может быть представлена в виде $\bar{\eta}_i(X, v) = \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v \cdot v \vee \underline{K}_i^{\bar{v}} \cdot \bar{v}$. Такое представление функции $\bar{\eta}_i(X, v)$ также предложено в работе [6]. $\underline{K}_i$, $\underline{K}_i^v$, $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ – ОДНФ, не зависящие от переменной v . Тогда для неисправности константа 1

$$\bar{\varphi}_i^1(X) = \bar{\eta}_i(X, 1) = \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v;$$

для неисправности константа 0

$$\bar{\varphi}_i^0(X) = \bar{\eta}_i(X, 0) = \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^{\bar{v}};$$

и для функции исправной схемы

$$\bar{\varphi}_i(X) = \bar{\eta}_i(X, f(X)) = \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v \cdot f(X) \vee \underline{K}_i^{\bar{v}} \cdot \bar{f}(X).$$

Преобразуем формулу (4) для функции наблюдаемости $B_i(X)$ полюса v на i -м выходе:

$$\begin{aligned} B_i(X) &= \varphi_i^1(X) \oplus \varphi_i^0(X) = \varphi_i^1(X) \bar{\varphi}_i^0(X) \vee \bar{\varphi}_i^1(X) \varphi_i^0(X) = \\ &= (K_i \vee K_i^v) \cdot (\underline{K}_i \vee \underline{K}_i^{\bar{v}}) \vee (\underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v) \cdot (K_i \vee K_i^{\bar{v}}) = \\ &= K_i \cdot \underline{K}_i \vee K_i \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}} \vee K_i^v \cdot \underline{K}_i \vee K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i \cdot K_i \vee \underline{K}_i \cdot K_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i^v \cdot K_i \vee \underline{K}_i^v \cdot K_i^{\bar{v}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Две ДНФ ортогональны друг другу, если любая конъюнкция одной ДНФ ортогональна любой конъюнкции другой ДНФ. Две конъюнкции k_1 и k_2 ортогональны, если $k_1 \wedge k_2 = 0$. Если две конъюнкции ортогональны, то некоторая переменная входит в одну из них с инверсией, а в другую – без инверсии.

Утверждение 1.

1. ОДНФ K_i ортогональна ОДНФ K_i^v и $K_i^{\bar{v}}$.
2. ОДНФ $\underline{K}_i$ ортогональна ОДНФ $\underline{K}_i^v$ и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$.

Доказательство. Рассмотрим конъюнкции $k' \in K_i^v$ и $k'' \in K_i$; конъюнкция $k = k' \cdot v$ принадлежит ОДНФ (6) функции $\eta_i(X, v)$ и, следовательно, k'' и k ортогональны. Поскольку k'' не зависит от переменной v по построению, то k' и k'' ортогональные конъюнкции. Так как это верно для любых конъюнкций $k' \in K_i^v$ и $k'' \in K_i$, то ОДНФ K_i и K_i^v ортогональны друг другу. Остальные выводы утверждения доказываются аналогично.

Утверждение 2.

1. ОДНФ K_i ортогональна ОДНФ $\underline{K}_i$, K_i^v и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$.
2. ОДНФ $\underline{K}_i$ ортогональна ОДНФ K_i , K_i^v и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$.

Доказательство. ОДНФ $\eta_i(X, v)$ и $\bar{\eta}_i(X, v)$ ортогональны друг другу. Следовательно, ОДНФ K_i ортогональна ОДНФ $\underline{K}_i$. Рассмотрим конъюнкции $k' \in \underline{K}_i^v$ и $k'' \in K_i$. Конъюнкция $k = k' \cdot v$ принадлежит построенной ОДНФ функции $\bar{\eta}_i(X, v)$, следовательно, конъюнкции k'' и k ортогональны друг другу. Поскольку конъюнкция k'' по построению не содержит переменной v , то k'' ортогональна конъюнкции k' . Так как это верно для любых конъюнкций $k'' \in K_i$ и $k' \in \underline{K}_i^v$, то ОДНФ K_i и $\underline{K}_i^v$ ортогональны друг другу. Остальные положения утверждения доказываются аналогично.

Утверждение 3.

1. ОДНФ K_i^v и $\underline{K}_i^v$ ортогональны друг другу.
2. ОДНФ $K_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ ортогональны друг другу.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

Принимая во внимание утверждения 1–3 и учитывая, что произведение ортогональных друг другу ДНФ равно 0, преобразуем выражение (7) и получим

$$B_i(X) = K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i^v \cdot K_i^{\bar{v}}. \quad (8)$$

Согласно утверждению 3 ОДНФ K_i^v и $\underline{K}_i^v$ ортогональны друг другу, ОДНФ $K_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ также ортогональны друг другу. Следовательно, произведения $K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^v \cdot K_i^{\bar{v}}$ ортогональны друг другу. Поскольку K_i^v , $K_i^{\bar{v}}$, $\underline{K}_i^v$, $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ являются ОДНФ, то произведения $K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^v \cdot K_i^{\bar{v}}$ также являются ОДНФ.

Итак, получив произведение ОДНФ K_i^v и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$, а также ОДНФ $\underline{K}_i^v$ и $K_i^{\bar{v}}$ из (8), получаем ОДНФ для функции $B_i(X)$.

Если предположить, что все ДНФ K_i , $\underline{K}_i$, K_i^v , $K_i^{\bar{v}}$, $\underline{K}_i^v$, $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ состоят из одного и того же числа конъюнкций, то применение формулы (8) вместо (7) позволяет в четыре раза сократить число перемножаемых конъюнкций.

Функция наблюдаемости $B(X)$ полюса v для схемы в целом, согласно формуле (3), имеет вид $B(X) = B_1(X) \vee B_2(X) \vee \dots \vee B_m(X)$. Поскольку полученные по формуле (8) ОДНФ $B_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, не обязательно ортогональны друг другу, то дизъюнкция ОДНФ $B_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, в общем случае не является ОДНФ. Ортогонализируем (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} B(X) &= B_1(X) \vee B_2(X) \vee \dots \vee B_m(X) = \\ &= B_1(X) \vee \bar{B}_1(X) \cdot B_2(X) \vee \dots \vee \bar{B}_1(X) \cdot \bar{B}_2(X) \cdot \dots \cdot \bar{B}_{m-1}(X) \cdot B_m(X). \end{aligned}$$

Чтобы по этой формуле получить ОДНФ функции $B(X)$, необходимо представить $B_i(X)$ и $\bar{B}_i(X)$ в виде ОДНФ. Функция $B_i(X)$ в виде ОДНФ уже получена. Получим функцию $\bar{B}_i(X)$ также в виде ОДНФ. Для этого инвертируем формулу (4) и подставим в полученное выражение ОДНФ функций $\varphi_i^0(X)$, $\varphi_i^1(X)$, $\bar{\varphi}_i^0(X)$, $\bar{\varphi}_i^1(X)$:

$$\begin{aligned} \bar{B}_i(X) &= \overline{\varphi_i^1(X) \oplus \varphi_i^0(X)} = \varphi_i^1(X) \varphi_i^0(X) \vee \bar{\varphi}_i^1(X) \bar{\varphi}_i^0(X) = \\ &= (K_i \vee K_i^v) \cdot (K_i \vee K_i^{\bar{v}}) \vee (\underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v) \cdot (\underline{K}_i \vee \underline{K}_i^{\bar{v}}) = \\ &= K_i \cdot K_i \vee K_i \cdot K_i^{\bar{v}} \vee K_i \cdot K_i^v \vee K_i^v \cdot K_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i \cdot \underline{K}_i \vee \underline{K}_i \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i \cdot \underline{K}_i^v \vee \underline{K}_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пользуясь утверждением 1, сократим полученную формулу:

$$\bar{B}_i(X) = K_i \vee K_i^v \cdot K_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}}. \quad (10)$$

Выполнив произведение ОДНФ K_i^v и $K_i^{\bar{v}}$, а также $\underline{K}_i^v$ и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ из (10), согласно утверждениям 1–3, получим ОДНФ функции $\bar{B}_i(X)$.

Если предположить, что все ДНФ K_i , $\underline{K}_i$, K_i^v , $K_i^{\bar{v}}$, $\underline{K}_i^v$, $\underline{K}_i^{\bar{v}}$ состоят из одного и того же числа конъюнкций, то применение формулы (10) вместо (9) позволяет в четыре раза сократить число перемножаемых конъюнкций.

Пример 1. Для иллюстрации предложенного метода получения функции наблюдаемости в виде ОДНФ рассмотрим схему Q (заимствована из [6]), изображенную на рис. 1.

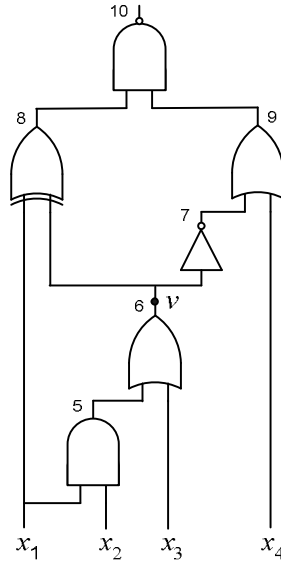


Рис. 1. Схема Q

Сопоставим числа 5, ..., 10 выходам элементов. Пусть $u_5, \dots, u_{10}$ – внутренние переменные, соответствующие этим выходам. Рассмотрим полюс v схемы. Получим ОДНФ функции наблюдаемости для этого полюса.

Получим ОДНФ функции $\eta(X, v)$:

$$\begin{aligned}\eta(X, v) &= u_{10} = \overline{u_8 u_9} = \overline{u_8} \vee \overline{u_9} = \overline{x_1 \oplus v} \vee (x_1 \oplus v)(u_7 \vee x_4) = \\ &= x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee (x_1 \bar{v} \vee \bar{x}_1 v) \cdot \bar{x}_4 \bar{u}_7 = \\ &= x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee (x_1 \bar{v} \vee \bar{x}_1 v) \cdot \bar{x}_4 v = x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 v.\end{aligned}$$

Получим ОДНФ K , K^v , $K^{\bar{v}}$:

$$K = \emptyset, K^v = x_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4, K^{\bar{v}} = \bar{x}_1.$$

Получим ОДНФ функции $\bar{\eta}(X, v)$:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(X, v) &= \overline{u_{10}} = \overline{u_8 u_9} = (x_1 \oplus v) \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4 u_7) = (x_1 \bar{v} \vee \bar{x}_1 v) \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4 u_7) = \\ &= (x_1 \bar{v} \vee \bar{x}_1 v) \cdot (x_4 \vee \bar{x}_4 \bar{v}) = x_1 x_4 \bar{v} \vee x_1 \bar{x}_4 \bar{v} \vee \bar{x}_1 x_4 v.\end{aligned}$$

Получим ОДНФ $\underline{K}$, $\underline{K}^v$, $\underline{K}^{\bar{v}}$:

$$\underline{K} = \emptyset, \underline{K}^v = \bar{x}_1 x_4, \underline{K}^{\bar{v}} = x_1 x_4 \vee x_1 \bar{x}_4 = x_1.$$

Получим ОДНФ функции наблюдаемости по формуле (8):

$$B(X) = K^v \cdot \underline{K}^{\bar{v}} \vee \underline{K}^v \cdot K^{\bar{v}} = (x_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4) \cdot x_1 \vee \bar{x}_1 x_4 \cdot \bar{x}_1 = x_1 \vee \bar{x}_1 x_4.$$

2.2. BDD-представление функции наблюдаемости

Binary Decision Diagram (BDD) – это ориентированный граф с корнем и множеством вершин W [7]. Множество W содержит два типа вершин: *терминальные* и *нетерминальные*. Нетерминальная вер-

шина w имеет две дочерние вершины $low(w) \in W$ и $high(w) \in W$. В дочернюю вершину $low(w)$ ведет левое ребро, исходящее из вершины w , а в вершину $high(w)$ – правое ребро. Терминальная вершина w имеет значение $value(w) \in \{0, 1\}$.

Нетерминальной вершине BDD сопоставляется некоторая переменная x_i , от которой зависит булева функция, представляемая BDD. Иногда будем переменную, сопоставляемую вершине w , обозначать $x(w)$.

BDD G с корнем w сопоставляется булева функция f_w , определяемая следующим образом:

1. Если w является терминальной вершиной, то
 - а) если $value(w) = 1$, то $f_w = 1$;
 - б) если $value(w) = 0$, то $f_w = 0$.
2. Если w – нетерминальная вершина, которой сопоставляется переменная x_i , то

$$f_w(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_i \cdot f_{low(w)}(x_1, \dots, x_n) \vee x_i \cdot f_{high(w)}(x_1, \dots, x_n).$$

Будем обозначать через $G(h(x))$ BDD-представление функции $h(X)$. Здесь под BDD мы будем понимать *reduced* BDD, как они определены в [7].

Ориентированной цепи BDD сопоставляется конъюнкция, состоящая из переменных, соответствующих нетерминальным вершинам, через которые проходит цепь; причем если ребро в цепи является левым ребром, исходящим из вершины w , то переменная $x(w)$ входит в конъюнкцию с инверсией, иначе – без инверсии.

Конъюнкции, сопоставленные различным ориентированным цепям BDD, ведущим из корня в одну из терминальных вершин, ортогональны друг другу. В дальнейшем слово «ориентированные» будем опускать.

Пусть $t_1, \dots, t_s$ – цепи BDD $G(h(X))$, ведущие из корня в терминальную вершину 1, а $k(t_1), \dots, k(t_s)$ – конъюнкции, сопоставленные этим цепям; $t'_1, \dots, t'_s$ – цепи BDD $G(h(X))$, ведущие из корня в терминальную вершину 0, и $k(t'_1), \dots, k(t'_s)$ – конъюнкции, сопоставленные цепям $t'_1, \dots, t'_s$. Тогда из определения BDD следует, что $h(X) = k(t_1) \vee \dots \vee k(t_s)$, $\bar{h}(X) = k(t'_1) \vee \dots \vee k(t'_s)$.

Представим функцию $\eta_i(X, v)$ в виде BDD. Выберем переменную v в качестве последней переменной, по которой будет производиться разложение при построении BDD для $\eta_i(X, v)$.

Извлечем из $G(\eta_i(X, v))$ ОДНФ $\eta_i(X, v)$ и $\bar{\eta}_i(X, v)$. Представим, как и ранее, ОДНФ $\eta_i(X, v)$ в виде $\eta_i(X, v) = K_i \vee K_i^v \cdot v \vee K_i^{\bar{v}} \cdot \bar{v}$ и ОДНФ $\bar{\eta}_i(X, v)$ в виде $\bar{\eta}_i(X, v) = \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v \cdot v \vee \underline{K}_i^{\bar{v}} \cdot \bar{v}$.

Утверждение 4. ДНФ $K_i^v \vee K_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^v \vee \underline{K}_i^{\bar{v}}$, извлеченные из $G(\eta_i(X, v))$, состоят из тех и только тех конъюнкций, которые соответствуют цепям в $G(\eta_i(X, v))$, ведущим из корня графа в вершины, сопоставленные переменной v .

Если из некоторой вершины w , сопоставленной переменной v , в терминальную вершину 1 ведет правое ребро, то конъюнкции, соответствующие цепям, ведущим из корня в вершину w , принадлежат ДНФ K_i^v и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$. Если же из этой вершины в терминальную вершину 1 ведет левое ребро, то конъюнкции принадлежат ДНФ $K_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^v$.

Утверждение 5.

1. ДНФ K_i^v и $\underline{K}_i^{\bar{v}}$, извлеченные из $G(\eta_i(X, v))$, совпадают.
2. ДНФ $K_i^{\bar{v}}$ и $\underline{K}_i^v$, извлеченные из $G(\eta_i(X, v))$, совпадают.

Утверждение 6. ДНФ K_i ($\underline{K}_i$), извлеченная из $G(\eta_i(X, v))$, состоит из тех и только тех конъюнкций, которые соответствуют цепям в $G(\eta_i(X, v))$, ведущим из корня графа в терминальную вершину 1 (0) и не проходящим через вершины, сопоставленные переменной v .

Имея в виду утверждение 5, формулу (8) для функции $B_i(X)$ преобразуем к виду

$$B_i = K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\bar{v}} \vee \underline{K}_i^v \cdot K_i^{\bar{v}} = K_i^v \vee K_i^{\bar{v}}. \quad (11)$$

Из формулы (10), утверждения 3 и утверждения 5 получим

$$\begin{aligned}\overline{B}_i(X) &= K_i \vee K_i^v \cdot K_i^{\overline{v}} \vee \underline{K}_i \vee \underline{K}_i^v \cdot \underline{K}_i^{\overline{v}} = \\ &= K_i \vee K_i^v \cdot \underline{K}_i^{\overline{v}} \vee \underline{K}_i \vee K_i^{\overline{v}} \cdot \underline{K}_i^v = K_i \vee \underline{K}_i.\end{aligned}\quad (12)$$

В формулах (11) и (12) ДНФ K_i^v , $K_i^{\overline{v}}$, $\underline{K}_i^{\overline{v}}$, $\underline{K}_i^v$, K_i , $\underline{K}_i$ извлечены из $G(\eta_i(X, v))$.

Из утверждений 4 и 6 и формул (11) и (12) получим следующую процедуру построения BDD $G(B_i(X))$ из BDD $G(\eta_i(X, v))$.

Процедура 1. Получение BDD $G(B_i(X))$ из BDD $G(\eta_i(X, v))$.

1. Последние ребра всех цепей BDD $G(\eta_i(X, v))$, ведущих из корня в терминальные вершины и не проходящих через вершины, сопоставленные переменной v , направляются в терминальную вершину 0.

2. Удаляются все вершины, сопоставленные переменной v вместе с исходящими из них ребрами, а ребра, ведущие в эти вершины, направляются в терминальную вершину 1.

Итак, установлено, что BDD $G(B_i(X))$ получается простой модификацией BDD $G(\eta_i(X, v))$ и не превосходит последней по сложности.

BDD $G(B(X))$ для функции $B(X)$ строится как дизъюнкция BDD $G(B_i(X))$ для функций $B_i(X)$, $i = \overline{1, m}$.

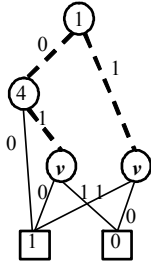


Рис. 2. BDD $G(\eta(X, v))$

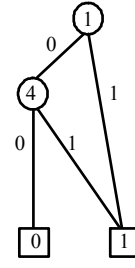


Рис. 3. BDD $G(B(X))$, где $B(X)$ – функция наблюдаемости полюса v схемы Q

Пример 2. Построим BDD $G(B(X))$ для функции наблюдаемости полюса v схемы Q (рис. 1).

Построим BDD $G(\eta(X, v))$ для функции, реализуемой выходом схемы, полученной из схемы Q , в которой полюсу v сопоставлена входная переменная v , выполнив разложение по переменной v в последнюю очередь. Полученный граф представлен на рис. 2.

В графе на рис. 2 курсивом выделены цепи, представляющие конъюнкции из ДНФ $B(X) = K^v \vee K^{\overline{v}}$. Это конъюнкции $k_1 = \overline{x}_1 x_4$ и $k_2 = x_1$.

На рис. 3 показан BDD $G(B(X))$, полученный из BDD $G(\eta(X, v))$ по процедуре 1.

3. Функция обнаружения неисправности

Представим функции $\phi_i(X)$, $\overline{\phi}_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\phi_i(X) &= \eta_i(X, f(X)) = \eta_i(X, 1) \cdot f(X) \vee \eta_i(X, 0) \cdot \overline{f}(X) = \\ &= \phi_i^1(X) \cdot f(X) \vee \phi_i^0(X) \cdot \overline{f}(X),\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_i(X) &= \overline{\eta}_i(X, f(X)) = \overline{\eta}_i(X, 1) \cdot f(X) \vee \overline{\eta}_i(X, 0) \cdot \overline{f}(X) = \\ &= \overline{\phi}_i^1(X) \cdot f(X) \vee \overline{\phi}_i^0(X) \cdot \overline{f}(X).\end{aligned}\quad (14)$$

Рассмотрим неисправность константа 1 и функцию $D_i^1(X)$ обнаружения константной неисправности 1 на i -м выходе, $i = \overline{1, m}$. Подставим формулы (13) и (14) в (2), получим

$$\begin{aligned}D_i^1(X) &= \phi_i(X) \oplus \phi_i^1(X) = \phi_i(X) \cdot \overline{\phi}_i^1(X) \vee \overline{\phi}_i(X) \cdot \phi_i^1(X) = \\ &= (\phi_i^1(X) \cdot f(X) \vee \phi_i^0(X) \cdot \overline{f}(X)) \cdot \overline{\phi}_i^1(X) \vee \\ &\quad (\overline{\phi}_i^1(X) \cdot f(X) \vee \overline{\phi}_i^0(X) \cdot \overline{f}(X)) \cdot \phi_i^1(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vee (\bar{\varphi}_i^1(X) \cdot f(X) \vee \bar{\varphi}_i^0(X) \cdot \bar{f}(X)) \cdot \varphi_i^1(X) = \\
& = \varphi_i^0(X) \cdot \bar{\varphi}_i^1(X) \cdot \bar{f}(X) \vee \bar{\varphi}_i^0(X) \cdot \varphi_i^1(X) \cdot \bar{f}(X) = \\
& = (\varphi_i^0(X) \oplus \varphi_i^1(X)) \cdot \bar{f}(X).
\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичными преобразованиями получим формулу для неисправности константа 0:

$$D_i^0(X) = \varphi_i(X) \oplus \varphi_i^0(X) = (\varphi_i^0(X) \oplus \varphi_i^1(X)) \cdot f(X). \tag{16}$$

Имея ввиду формулы (15) и (16), запишем общую формулу для неисправности константа α , $\alpha \in \{0, 1\}$:

$$D_i^\alpha(X) = (\varphi_i^0(X) \oplus \varphi_i^1(X)) \cdot f^\alpha(X),$$

где $f^1(X) = f(X)$, а $f^0(X) = \bar{f}(X)$.

Функция обнаружения неисправности для многовыходной схемы принимает вид

$$\begin{aligned}
D^\alpha(X) &= D_1^\alpha(X) \vee D_2^\alpha(X) \vee \dots \vee D_m^\alpha(X) = \\
&= \left((\varphi_1^1(X) \oplus \varphi_1^0(X)) \vee (\varphi_2^1(X) \oplus \varphi_2^0(X)) \vee \dots \vee (\varphi_m^1(X) \oplus \varphi_m^0(X)) \right) \cdot f^\alpha(X).
\end{aligned}$$

Согласно формуле (3) выражение в скобках соответствует функции наблюдаемости $B(X)$, а согласно формуле (5) $f^\alpha(X)$ – это функция $\bar{\alpha}$ -управляемости $C^{\bar{\alpha}}(X)$.

Следовательно,

$$D^\alpha(X) = B(X) \cdot C^{\bar{\alpha}}(X). \tag{17}$$

Таким образом, функция обнаружения неисправности константа 1 есть произведение функции наблюдаемости и функции 0-управляемости, а функция обнаружения неисправности константа 0 есть произведение функции наблюдаемости и функции 1-управляемости.

Формула (17) позволяет выделить общую часть при получении функций обнаружения неисправностей константа 1 и константа 0.

Согласно формуле (17) ОДНФ или BDD представления функции обнаружения неисправности α $D^\alpha(X)$ можно получить как произведение ОДНФ или BDD представлений, соответственно, функции наблюдаемости $B(X)$ и функции $\bar{\alpha}$ -управляемости $C^{\bar{\alpha}}(X)$. Напомним, что произведение двух ОДНФ есть также ОДНФ. Эффективные методы получения ОДНФ и BDD представлений для функции наблюдаемости $B(X)$ описаны выше. ОДНФ и BDD представления для функции $C^{\bar{\alpha}}(X)$ можно получить по структурному описанию схемы, имея ввиду, что $C^1(X)$ – это функция, реализуемая выходом подсхемы, соответствующей полюсу v , а $C^0(X)$ – функция, реализуемая этой подсхемой, к выходу которой добавлен инвертор.

Отметим, что при решении некоторых задач можно не находить полное произведение, а ограничиться частичным произведением формул для функций $B(X)$ и $C^{\bar{\alpha}}(X)$. Например, при поиске одного тестового набора.

Формула (17) соответствует результату, полученному в работе [5], где показано, что тестовые наборы для константной неисправности 1(0) являются решениями системы из двух уравнений: $f(X) = 0(1)$ и $B(X) = 1$. В работе [5] функция $B(X)$ рассматривается как булева производная функции $\eta(X, v)$ по переменной v . Здесь мы записали формулу (17) в терминах данной работы для многовыходной схемы. В работе [1] отмечается, что метод построения тестов, предложенный в работе [5], не широко используется из-за трудоемкости построения булевой производной. В данной работе предложены методы, позволяющие сократить трудоемкость построения функции $B(X)$.

Заключение

В данной работе исследуются функции обнаружения константной неисправности, управляемости и наблюдаемости для полюса элемента комбинационной схемы. Разработаны эффективные методы получения функции наблюдаемости в виде ОДНФ и BDD. Предложенная формула для получения ОДНФ

функции наблюдаемости позволяет приблизительно в 4 раза сократить объем вычислений по сравнению с получением ОДНФ по исходной формуле (3). Сложность получения BDD для функции наблюдаемости предложенным в работе методом сопоставима со сложностью построения BDD для подсхемы исходной схемы, в которой рассматриваемому полюсу сопоставлена входная переменная. ОДНФ и BDD представления функции обнаружения константной неисправности α , $\alpha \in \{1, 0\}$, предлагается получать как произведение ОДНФ и BDD соответственно функции наблюдаемости и функции $\bar{\alpha}$ -управляемости. Использование этой формулы позволяет выделить общую часть при получении функций обнаружения неисправностей константа 1 и константа 0. При решении некоторых задач достаточно выполнить лишь частичное произведение формул, представляющих две функции.

Выполненные исследования позволяют решить совместно ряд задач, связанных с константной неисправностью на полюсе элемента схемы. Так, например, ОДНФ и BDD функции обнаружения неисправности представляют множество всех тестовых наборов для данной константной неисправности. Построив ОДНФ или BDD рассмотренных функций легко вычислить меры тестопригодности: вероятность обнаружения неисправности, управляемость и наблюдаемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bushnell M.L., Agrawal V.D.*, Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory and Mixed-Signal VLSI Circuits. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 690.
2. *Голубева О.И.* Метод вычисления вероятности обнаружения неисправности, основанный на BDD представлении функции // Труды 3-го Международного симпозиума «Application of the Conversion Research Results for International Cooperation». Томск. 18–20 мая 1999. Томск, 1999. Т. 1. С. 195–197.
3. *Голубева О.И., Матросова А.Ю.* Точный метод вычисления вероятности обнаружения неисправности, основанный на ОДНФ-представлении функции // Материалы 3-й Международной конференции «Автоматизация проектирования дискретных систем». Минск. 10–12 ноября 1999. Минск : ИТК НАН Беларуси, 1999. Т. 3. С. 64–71.
4. *Голубева О.И.* Разработка и исследование методов моделирования и оценки мер тестопригодности логических схем : дис. ... канд. техн. наук. Томск, 2000. С. 112.
5. *Sellers F.F., Hsiao M.Y., Bearson L.W.* Analyzing Errors with the Boolean Difference // IEEE Trans. on Computers. 1968. V. C-17, No. 7. P. 676–683.
6. *Евтушенко Н.В., Матросова А.Ю.* О вероятностном подходе к вычислению оценок управляемости и наблюдаемости узла дискретного устройства // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11. С. 152–160.
7. *Bryant R.E.* Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation // IEEE Trans. on Computers. 1986. V. C-35, No. 8. P. 677–691.

Голубева Ольга Ивановна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: golubeva-o@yandex.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 3 ноября 2014 г.

Golubeva Olga I. (Tomsk State University, Russian Federation).

Stuck-at fault detection, controllability and observability functions of the combinational circuit gate pole.

Keywords: combinational circuit; stuck-at fault; test patterns; observability; BDD; orthogonal DNF.

The stuck-at fault at the gate pole is a widely used and studied fault model for combinational and sequential circuits. In this work, stuck-at fault detection, controllability and observability Boolean functions corresponding to the combinational circuit gate pole are considered. Effective methods of their representations obtaining in the orthogonal DNF (ODNF) and the BDD are suggested. Studies allow us to solve together a number of tasks related to the stuck-at fault at the combinational circuit gate pole.

Stuck-at fault detection function represents all test patterns for the single stuck-at fault at the gate pole; *observability function* represents all sets of input values that provide different values on at least one of the circuit output for different values on the considered pole; *α -controllability function* represents sets of input values providing the value α , $\alpha \in \{0, 1\}$, at the pole. Functions are defined on the set of circuit input variables.

The ODNF and the BDD representations of Boolean function have the property that they clearly represent the set of input values sets on which function takes value 1: the ODNF conjunctions are orthogonal in pairs and consequently any set of input values can turn into a value 1 not more than one conjunction of the ODNF; in the BDD paths from the root to a terminal vertex represent conjunctions orthogonal in pairs as well. Besides, having the ODNF or the BDD of considered functions, it is easy to calculate testability measures: the fault detection probability, controllability and observability.

The α -controllability function $C^\alpha(X)$, $\alpha \in \{0, 1\}$, is the function performed by the output of the subcircuit corresponding to the considered pole when $\alpha = 1$, and its inversion when $\alpha = 0$. The ODNF and the BDD of the function $C^\alpha(X)$ can be derived directly from the structural description of the circuit. For the one-output combinational circuit stuck-at- α fault detection function $D^\alpha(X)$ and observability function $B(X)$ can be obtained according to definitions by formulas:

$$D^{\alpha}(X) = \varphi(X) \oplus \varphi^{\alpha}(X), \quad (1)$$

$$B(X) = \varphi^1(X) \oplus \varphi^0(X). \quad (2)$$

In these formulas, $\varphi(X)$ is the function performed by the output of the fault-free circuit, $\varphi^{\alpha}(X)$ is the function performed by the output of the circuit with stuck-at- α fault, $\alpha \in \{1, 0\}$, at the considered pole. Here, for reducing the text, we consider a one-output circuit, whereas, in the full paper, we consider a multiple-output circuit.

To obtain some representation of functions $D^{\alpha}(X)$ and $B(X)$ directly from the formulas (1) and (2), respectively, it is very time-consuming. In this work, for the obtaining of the ODNF and the BDD of observability function $B(X)$, the subcircuit of the initial circuit is considered, where the pole is considered as the subcircuit input. Let us denote as v the input variable met in correspondence to the pole and as $\eta(X, v)$ – the function corresponding to the output of such subcircuit. Obtained in this work the formula for ODNF representation construction of observability function allows to reduce approximately 4 times the computational cost when compared to its obtaining directly from the formula (2). For BDD representation construction of the function, first the BDD of the function $\eta(X, v)$ is obtained, where the variable v is considered as the last variable in the function decomposition, then the BDD of observability function is obtained from the BDD of the function $\eta(X, v)$ by simple procedure proposed in this work. Thus, the complexity of the suggested procedure of the BDD construction of observability function is comparable with the complexity of the BDD construction for the function performed by the output of the subcircuit of the initial circuit.

Also, we propose to obtain the ODNF and BDD representations of stuck-at- α fault detection function, $\alpha \in \{1, 0\}$, by multiplying of the ODNF and BDD, correspondingly, of observability function and $\overline{\alpha}$ -controllability function. Note that this formula corresponds to the known test pattern construction method based on the Boolean difference. This formula allows distinguishing common part for the obtaining of stuck-at fault detection function for the stuck-at-1 and the stuck-at-0 faults. For solving of some tasks, for example, such as search of one test pattern, may be sufficient to perform only partial multiplication of the representations of two functions.

REFERENCES

1. Bushnell M.L., Agrawal V.D. *Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory and Mixed-Signal VLSI Circuits*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 690 p.
2. Golubeva O.I. [The method of the fault detection probability calculation based on BDD representation of a function] *Tr. 3-go mezhdunar. simpoziuma "Application of the Conversion Research Results for International Cooperation"* [Proc. of the Third International Symposium "Application of the conversion research results for international cooperation"]. Tomsk, 1999, vol. 1, pp. 195-197. (In Russian).
3. Golubeva O.I., Matrosova A.Yu. [The precise method of the fault detection probability calculation based on ODNF representation of a function]. *Materialy 3-y mezhdunar. konferentsii "Avtomatizatsiya proektirovaniya diskretnykh system"* [Proc. Of The Third International Conference "Computer-Aided Design Of Discrete Devices"]. Minsk. 10-12 noyabrya 1999. Minsk: ITK NAN Belarusi Publ., 1999, vol. 3, pp. 64-71. (In Russian).
4. Golubeva O.I. *Razrabotka i issledovanie metodov modelirovaniya i otsenki mer testoprignodnosti logicheskikh skhem*. Dis. kand. tekhnicheskikh nauk [Elaboration and research of simulation and testability measures estimation of logical circuits. Engineering Cand. Diss.]. Tomsk, 2000. 112 p.
5. Sellers F.F., Hsiao M.Y., Bearson L.W. Analyzing Errors with the Boolean Difference. *IEEE Transactions on Computers*, 1968, vol. 17, no. 7, pp. 676-683.
6. Evtushenko N.V., Matrosova A.Yu. O veroyatnostnom podkhode k vychisleniyu otsenok upravlyaemosti i nablyudaemosti uzla diskretnogo ustroystva [On a Random Approach to the Calculation of Discrete Device Node Controllability and Observability Measures]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1993, no. 11, pp. 152-160.
7. Bryant R.E. Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, 1986, vol. 35, no. 8, pp. 677-691. DOI: 10.1109/TC.1986.1676819

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНДРЕЕВА Валентина Валерьевна – кандидат технических наук, доцент факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: valentina.andreeva@mail.tsu.ru

ГОЛУБЕВА Ольга Ивановна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программирования факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: golubeva-o@yandex.ru

ГОРЦЕВ Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой исследования операций факультета прикладной математики Томского государственного университета. E-mail: amg@fpmk.tsu.ru

ГУБИНА Оксана Викторовна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: gov7@mail.ru

ДМИТРЕНКО Анатолий Григорьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru

КАЛЯГИН Алексей Андреевич – аспирант факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: redall@inbox.ru

КОШКИН Геннадий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

КУСАИНОВ Марат Исламбекович – аспирант факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: rjrltsk@gmail.com

МАСТАЛИЕВ Рашад Огтай оглы – доктор философии по математике, старший научный сотрудник Института систем управления им. ак. А. Гусейнова НАН Азербайджана. E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры исследования операций факультета прикладной математики Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ПАРАЕВ Юрий Иванович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: paraev@mail.ru

РЮМКИН Александр Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики Томского государственного университета, директор ООО НПО «Сибгеоинформатика». E-mail: airyumkin@mail.ru

СОРУДЕЙКИН Кирилл Александрович – научный сотрудник факультета компьютерной инженерии и управления Харьковского национального университета радиоэлектроники. E-mail: Kirill.Sorudeykin@relvecorp.com

УРИНОВ Радик Истамович – аспирант кафедры исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: rad_d@sibmail.com

ЦВЕТНИЦКАЯ Светлана Александровна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: svetasa@sibmail.com

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2015. № 1 (30)

Редактор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 12.03.2015 г. Формат 60х84¹/₈.

Гарнитура Times.

Печ. л. 11; усл. печ. л. 10,2.

Тираж 250 экз. Заказы № 887.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Телефон 8+(382-2)–53-15-28