ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (30)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977

Р.О. Масталиев

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1).

Рассматривается задача управления ступенчатой структурой, описываемой системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При предположении открытости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.
Ключевые слова: разностные и интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра; ступенчатая задача; вариация функционала; уравнения Эйлера.

В работах [1, 2] изучены задачи оптимального управления, соответственно, описываемые интегральными и разностными уравнениями типа Вольтерра, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Предлагаемая работа посвящена изучению одной ступенчатой задаче оптимального управления, описываемой разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u,v)=\varphi\big(x(t_1)\big)+\phi\big(y(T)\big) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t} f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big), \quad t\in T_1=\{t_0,t_0+1,t_0+2,\dots,t_1-1\}, \\ x(t_0)=x_0, \\ \dot{y}(t)=\int\limits_{t_1}^{t} g\big(t,\tau,y(\tau),v(\tau)\big)d\tau, \quad t\in T_2=[t_1,T], \\ y(t_1)=G\big(x(t_1)\big). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь t_0, t_1, T, x_0 заданы, причем разность t_1-t_0 – натуральное число; $\varphi(x)$ и $\phi(y)$ – заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $f(t,\tau,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно; $g(t,\tau,y,v)$ – заданная m-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, вместе с частными производными по (y,v) до второго порядка включительно; $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция; $u(t)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U; $v(t)$ – r-мерный кусочно-непрерывный на T_2 вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества (V), т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1,$$
$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \tag{3}$$

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ – допустимым процессом.

Целью данной работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче.

2. Первая и вторая вариации функционала качества

Считая $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t), x^{\circ}(t), y^{\circ}(t))$ оптимальным процессом, обозначим через $(\bar{u}(t) = u^{\circ}(t) + \Delta u(t),\ \bar{v}(t) = v^{\circ}(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^{\circ}(t) + \Delta x(t),\ \bar{y}(t) = y^{\circ}(t) + \Delta x(t))$ произвольный допустимый процесс и запишем формулу приращения функционала:

$$\Delta S(u^{\circ}, v^{\circ}) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^{\circ}, v^{\circ}) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^{\circ}(t_1)) + \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^{\circ}(T)). \tag{4}$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^{\circ}(t), y^{\circ}(t))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \left[f(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, x^{\circ}(\tau), u^{\circ}(\tau)) \right], \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \ t \in T_1, \tag{6}$$

$$\Delta \dot{y}(t) = \int_{t_1}^{t} \left[g(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)) \right] d\tau, \ t \in T_2, \tag{7}$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^{\circ}(t_1)). \tag{8}$$

Обозначим через $(\psi\ (t), p\ (t))$ пока неизвестную $(n+m)$- мерную вектор-функцию.

Умножая обе части соотношений (5), (7) соответственно на $\psi(t)$, $p(t)$ скалярно, а затем, суммируя и интегрируя полученные тождества по множествам T_1 и T_2, будем иметь

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) \left[f(\tau, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\tau, t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t)) \right], \tag{9}$$

$$\int_{t_1}^{T} p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = \int_{t_1}^{T} \int_{t}^{T} p'(\tau) \left[g(\tau, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(\tau, t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t)) \right] d\tau\, dt. \tag{10}$$

Ясно что,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \psi'(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t),$$

$$\int_{t_1}^{T} p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p'(T) \Delta y(T) - p'(t_1) \Delta y(t_1) - \int_{t_1}^{T} \dot{p}'(t) \Delta y(t) dt.$$

Отсюда с учетом (8) будем иметь

$$\int_{t_1}^{T} p'(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p'(T) \Delta y(T) - p'(t_1) \left(G(\bar{x}(t_1)) - G(x^{o}(t_1)) \right) - \int_{t_1}^{T} \dot{p}'(t) \Delta y(t) dt.$$

Принимая во внимания эти тождества, формула приращения (1) записывается в виде

$$\Delta S\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=\varphi\left(\bar{x}\left(t_1\right)\right)-\varphi\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)+\phi\left(\bar{y}\left(T\right)\right)-\phi\left(y^{\mathrm{o}}\left(T\right)\right)+\psi'\left(t_1-1\right)\Delta x\left(t_1\right)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'\left(t-1\right)\Delta x\left(t\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi'\left(\tau\right)\left[f\left(\tau,t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right)-f\left(\tau,t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\right]+$$
$$+p'\left(t_2\right)\Delta y\left(T\right)-p'\left(t_1\right)\left(G\left(\bar{x}\left(t_1\right)\right)-G\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)\right)-\int_{t_1}^{T}\dot{p}'\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt- \tag{11}$$
$$-\int_{t_1}^{T}\int_{t}^{T}p'\left(\tau\right)\left[g\left(\tau,t,\bar{y}\left(t\right),\bar{v}\left(t\right)\right)-g\left(\tau,t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\right]d\tau\,dt.$$

Введем обозначения:

$$H\left(t,x(t),u(t),\psi(t)\right)=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi'\left(\tau\right)f\left(\tau,t,x,u\right),\ M\left(t,y(t),v(t),p(t)\right)=\int_{t}^{T}p'\left(\tau\right)g\left(\tau,t,y,v\right)d\tau,$$
$$N\left(x\right)=p'\left(t_1-1\right)G\left(x\right),\ H_x[t]=H_x(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi(t)),\ H_u[t]=H_u(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi(t)),$$
$$H_{xx}[t]=H_{xx}(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi(t)),\ H_{xu}[t]=H_{xu}(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi(t)),$$
$$M_y[t]=M_y(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p(t)),\ M_v[t]=M_v(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p(t)),$$
$$M_{yy}[t]=M_{yy}(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p(t)),\ M_{vv}[t]=M_{vv}(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p(t)),$$
$$f_x[t,\tau]=f_x(t,\tau,x^{\mathrm{o}}(\tau),u^{\mathrm{o}}(\tau)),\ f_u[t,\tau]=f_u(t,\tau,x^{\mathrm{o}}(\tau),u^{\mathrm{o}}(\tau)),$$
$$g_y[t,\tau]=g_y(t,\tau,y^{\mathrm{o}}(\tau),v^{\mathrm{o}}(\tau)),g_v[t,\tau]=g_v(t,\tau,y^{\mathrm{o}}(\tau),v^{\mathrm{o}}(\tau)).$$

Тогда формула приращения (11) представляется в виде

$$\Delta S\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=\varphi\left(\bar{x}\left(t_1\right)\right)-\varphi\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)+\phi\left(\bar{y}\left(T\right)\right)-\phi\left(y^{\mathrm{o}}\left(T\right)\right)+\psi'\left(t_1-1\right)\Delta x\left(t_1\right)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'\left(t-1\right)\Delta x\left(t\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)-H\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)\right]+$$
$$+p'\left(T\right)\Delta y\left(T\right)-\left(N\left(\bar{x}\left(t_1\right)\right)-N\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)\right)-\int_{t_1}^{T}\dot{p}'\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt- \tag{12}$$
$$-\int_{t_1}^{T}\left[M\left(t,\bar{y}\left(t\right),\bar{v}\left(t\right),p\left(t\right)\right)-M\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p\left(t\right)\right)\right]dt.$$

Используя формулу Тейлора из (12), после некоторых преобразований получим

$$\Delta S(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}})=\varphi_x(x^{\mathrm{o}}(t_1))\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x^{\mathrm{o}}(t_1))\Delta x(t_1)+\phi_y'(y^{\mathrm{o}}(T))\Delta y(T)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta y'(T)\phi(y^{\mathrm{o}}(T))\Delta y(T)+\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)-\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}H_x'[t]\Delta x(t)-\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}H_u'[t]\Delta u(t)- \tag{13}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)-\frac{1}{2}\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)-\sum_{t=t_{\mathrm{o}}}^{t_1-1}\Delta x'(t)H_{xu}[x]\Delta u(t)+$$
$$+p'(T)\Delta y(T)-N_x'(x^{\mathrm{o}}(t_1))\Delta x(t_1)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x^{\mathrm{o}}(t_1))\Delta x(t_1)-\int_{t_1}^{T}\dot{p}'(t)\Delta y(t)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{T}M_y'[t]\Delta y[t]dt-\int_{t_1}^{T}M_v'[t]\Delta v(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T}\Delta v'(t)M_{vv}[t]\Delta v(t)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)M_{yv}[t]\Delta v(t)dt+\eta(\Delta u,\Delta v).$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u,\Delta v)=o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_4\left(\left\|\Delta z(t)\right\|^2\right)-\int_{t_1}^{T}o_5\left(\left\|\Delta k(t)\right\|^2\right)dt, \tag{14}$$

где $\Delta z(t)=(\Delta x,\Delta u)'$, $\Delta k(t)=(\Delta y,\Delta v)'$.

Величины $o_i(\cdot)$, $i=\overline{1,5}$, определяются, соответственно, из разложений

$$\varphi(\overline{x}(t_1))-\varphi(x^o(t_1))=\varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right),$$

$$\phi(\overline{y}(T))-\phi(y^o(T))=\phi'_y(y^o(T))\Delta y(T)+\frac{1}{2}\Delta y'(T)\phi_{yy}(y^o(T))\Delta y(T)+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|^2\right),$$

$$N(\overline{x}(t_1))-N(x^o(t_1))=N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1)+o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right),$$

$$H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\psi(t))-H(t,x^o(t),u^o(t),\psi(t))=H_x[t]\Delta x(t)+H_u[t]\Delta u(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)+\frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)+\Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t)+o_4\left(\left\|\Delta z(t)\right\|^2\right),$$

$$M(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t),p(t))-M(t,y^o(t),v^o(t),p(t))=M_y[t]\Delta y(t)+M_v[t]\Delta v(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t)+\Delta y(t)M_{yv}[t]\Delta v(t)+o_5\left(\left\|\Delta k(t)\right\|^2\right).$$

Если предполагать, что вектор-функция $(\psi(t),p(t))$ является решением задачи

$$\begin{aligned}&\psi(t-1)=H_x[t],\\&\psi(t_1-1)=-\varphi_x(x^o(t_1))+N_x(x^o(t_1)),\\&\dot{p}(t)=M_y[t],\\&p(T)=-\phi_y(y^o(T)),\end{aligned} \tag{15}$$

то формула приращения (13) примет вид

$$S(u^o,v^o)=-\left[\sum_{t=t_o}^{t_1-1}H_u[t]\Delta u(t)+\int_{t_1}^{T}M[t]\Delta v(t)dt\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\Delta x'(t_1)\big[\varphi_{xx}(x^o(t_1))-N(x^o(t_1))\big]\Delta x(t_1)+\Delta y'(T)\phi_{yy}(y^o(T))\Delta y(t)-$$
$$-\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)-\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)-2\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t)- \tag{16}$$
$$-\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t)dt-\int_{t_1}^{T}\Delta v'(t)M_{vv}[t]\Delta v(t)dt-2\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)M_{yv}[t]\Delta v(t)dt\Big]+\eta(\Delta u,\Delta v).$$

Уравнения (15) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче управления (см., например: [4]).

Специальное приращение оптимального управления $(u^o(t),v^o(t))$, в силу открытости областей управления U,V, можно определить по формуле

$$\begin{aligned}&\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta u(t),t\in T_1,\\&\Delta v(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta v(t),t\in T_2.\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\delta u(t),t\in T$ – произвольная r-мерная вектор-функция со значениями из R^r, $\delta v(t)$; $t\in T$ – произвольная кусочно-непрерывная вектор-функция со значениями из R^q; ε – достаточно малое по абсолютной величине число.

Обозначим через $\left(\Delta x\left(t;\varepsilon\right), \Delta y\left(t;\varepsilon\right)\right)$ специальное приращение оптимальной траектории $\left(x^{\circ}\left(t\right), y^{\circ}\left(t\right)\right)$, отвечающее приращению $(\Delta u(t;\varepsilon), v(t;\varepsilon))$ управления $\left(u^{\circ}\left(t\right), v^{\circ}\left(t\right)\right)$.

Используя формулу Тейлора и лемму Гроноулла–Белмана, из формул (5)–(7) по схеме, приведённой в [1. С. 15–21; 3. С. 86–87; 4. С. 33–38], доказывается справедливость оценок

$$\begin{gathered}
\left\|\Delta x(t)\right\| \leq L\sum_{t=t_0}^{t_1}\left\|\Delta u(t)\right\|, \\
\left\|\Delta y(t)\right\| \leq L\left[\sum_{t=t_0}^{t_1}\left\|\Delta u(t)\right\| + \int_{t_1}^{T}\left\|\Delta v(t)\right\| dt\right], \\
L = \mathrm{const} > 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Из оценок (18) с учетом (17) следует, что $\left\|\Delta x(t;\varepsilon\right\|$, $\left\|\Delta y(t;\varepsilon\right\|$ имеют порядок малости ε, и кроме того, для $\Delta x(t;\varepsilon)$ и $\Delta y(t;\varepsilon)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма. Для специального приращения $\left(\Delta x\left(t;\varepsilon\right), \Delta y\left(t;\varepsilon\right)\right)$ управления траектории $\left(u^{\circ}\left(t\right), v^{\circ}\left(t\right)\right)$ справедливо разложение

$$\begin{gathered}
\Delta x(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta x(t) + o_1(\varepsilon;t), \\
\Delta y(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta y(t) + o_2(\varepsilon;t).
\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $\left(\delta x\left(t\right), \delta y\left(t\right)\right)$ – вариация траектории $(x^{\circ}(t), y^{\circ}(t))$ – является решением следующей системы линейных неоднородных разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра:

$$\begin{gathered}
\delta x\left(t+1\right) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_x[t,\tau]\delta x\left(\tau\right) + f_u[t,\tau]\delta u\left(\tau\right)\right], \\
\delta x\left(t_0\right) = 0,
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}
\delta\dot{y}(t) = \int_{t_1}^{t}\left[g_y[t,\tau]\delta y(\tau) + g_v[t,\tau]\delta v(\tau)\right]d\tau, \\
\delta y\left(t_1\right) = G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)\delta x\left(t_1\right).
\end{gathered} \tag{21}$$

Следуя, например [5], (20)–(21) назовем уравнением в вариациях для рассматриваемой задачи.

Принимая во внимание (17)–(19), в формуле (16) показана справедливость разложения

$$\begin{aligned}
&S(u^{\circ} + \varepsilon\delta u, v^{\circ} + \varepsilon\delta v) - S(u^{\circ}, v^{\circ}) = -\varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u[t]\Delta u(t) + \int_{t_1}^{T}M_v[t]\Delta v(t)dt\right] + \\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\delta x'(t_1)\left[\varphi_{xx}(x^{\circ}(t_1)) - N_{xx}(x^{\circ}(t_1))\right]\delta x(t_1) + \delta y'(T)\phi_{yy}(y^{\circ}(T))\delta y(t) - \\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}[t]\delta u(t) - 2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xu}[t]\delta u(t) - \\
&-\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yy}[t]\delta y(t)dt - \int_{t_1}^{T}\delta v'(t)M_{vv}[t]\delta v(t)dt - 2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)dt\Big] + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) следует, что первая и вторая вариации функционала (1) (в классическом смысле) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\delta^1 S(u^{\circ}, v^{\circ}; \delta u, \delta v) = -\sum_{t=t_o}^{t_1-1}H_u[t]\Delta u(t) - \int_{t_1}^{T}M_v[t]\Delta v(t)dt\,, \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
\delta^2 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = \delta x'(t_1)\big(\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))\big)\delta x(t_1) + \\
+ \delta y'(T)\phi_{yy}(y^o(T))\delta y(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}[t]\delta u(t) - \\
- 2\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xu}[t]\delta u(t) - \int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yy}[t]\delta y(t)dt - \int_{t_1}^{T}\delta v'(t)M_{vv}[t]\delta v(t)dt - \\
- 2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)dt.
\end{aligned} \tag{24}
$$

3. Необходимые условия оптимальности

Известно, что вдоль оптимального процесса первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая вариация неотрицательна (см., например: [5. С. 51–53]), т.е.

$$\delta^1 S(u^{\circ}, v^{\circ}; \delta u, \delta v) = 0\,, \tag{25}$$

$$\delta^2 S(u^{\circ}, v^{\circ}; \delta u, \delta v) \ge 0 \tag{26}$$

для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^r$, $t \in T_2$.

Из тождества (25), учитывая (23), в силу произвольности и независимости вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих воздействий получаем, что

$$
\begin{aligned}
H_u[\theta] = 0, \quad \theta \in T_1, \\
M_v[\theta] = 0, \quad \theta \in T_2
\end{aligned} \tag{27}
$$

есть произвольная точка непрерывности управления $v(t)$.

Результат сформулируем в виде теорем.

Теорема 1 (аналог уравнения Эйлера). Для оптимальности допустимого управления $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t))$ в задаче (1)–(2) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (27).

Как обычно, допустимое управление $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t))$, удовлетворяющее уравнению Эйлера (27), назовем классической экстремалью в задаче (1)–(3).

Аналог уравнения Эйлера является необходимым условием оптимальности первого порядка. Используя неравенство (26), удается получить необходимые условия оптимальности второго порядка.

Применительно к задаче (1)–(3) с учетом (24) получаем справедливость

$$
\begin{aligned}
\delta x'(t_1)\big(\varphi_{xx}(x^{\circ}(t_1)) - N_{xx}(x^{\circ}(t_1))\big)\delta x(t_1) + \\
+\delta y'(T)\phi_{yy}(y^{\circ}(T))\delta y(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}[t]\delta u(t) - \\
-2\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xu}[t]\delta u(t) - \int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yy}[t]\delta y(t)dt - \int_{t_1}^{T}\delta v'(t)M_{vv}[t]\delta v(t)dt - \\
-2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)dt \ge 0.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t))$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство (28) выполнялось для всех $\delta u(t)$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$.

Заключение

Применяя модификацию метода приращений, вычислены первая и вторая вариации терминального функционала в ступенчатых задачах оптимального управления, описываемые системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога уравнения Эйлера. Получены условия оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Элм, 2013. 224 с.
2. *Mansimov K.B., Mastaliyev R.O.* Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // Journal Automatic Control and Computer Sciences. 2008. V. 42, No 2. P. 71–76.
3. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку : Изд-во БГУ, 2002. 114 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск : Наука и техника, 1974. 274 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.

Масталиев Рашад Огтай оглы, доктор философии по математике. E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com
Институт систем управления им. ак. А. Гусейнова НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджан.

Поступила в редакцию 5 января 2015 г.

Mastaliyev Rashad Ogtay oglu (Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

Necessary optimality conditions in problem of optimal control by discrete-continuous system.

Keywords: difference and integro-differential equations of Volterra type; stepwise problem; variation of the functional; Euler equation.

Consider a minimization problem of the functional

$$S(u,v)=\varphi(x(t_1))+\phi(y(T)),$$

$$\begin{cases} x(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau)), & t\in T_1=\{t_0,t_0+1,t_0+2,\dots,t_1-1\}, \\ x(t_0)=x_0\ , & \\ \dot{y}(t)=\int\limits_{t_1}^{t} g(t,\tau,y(\tau),v(\tau))d\tau, & t\in T_2=[t_1,T], \\ y(t_1)=G(x(t_1))\ . & \end{cases}$$

Here t_0, t_1, t_2, x_0 are the given values, the difference t_1-t_0 is a natural number, $\varphi(x)$, $\phi(y)$ are the given continuously-differentiable scalar functions, $f(t,\tau,x,u)$, $(g(t,\tau,y,v))$ are the given n(m)-dimensional vector- functions continuous in the aggregate of variables together with partial derivatives with respect (x,u) $((y,v))$, $G(x)$ is the given continuously-differentiable m-dimensional vector-function, $u(t)$ $(v(t))$ are $r(q)-$ dimensional vectors of control actions with the values from the given non-empty, bounded, and open set $U(V)$, i.e.

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T_1,$$
$$v(t)\in V\subset R^q,\quad t\in T_2.$$

We call the pair $(u(t),v(t))$ with the above mentioned properties an admissible control, the corresponding process $(u(t),v(t),x(t),y(t))$ – an admissible process.

Our goal is to derive a necessary optimality condition in the problem under above considerations.

REFERENCES

1. Abdullaev A.A., Mansimov K.B. *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvaemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in the process described by the system of integral equations of Volterra type]. Baku: Elm Publ., 2013. 224 p.
2. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 71-76. DOI: 10.3103/S014641160802003X
3. Mansimov K.B. *Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. Baku: Baku State University Publ., 2002. 114 p.
4. Gabasov R., Kirillova F.M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [Maximum principle in theory of optimal control]. Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1974. 274 p.
5. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 256 p.