ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (30)

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

А.М. Горцев, А.А. Калягин, Л.А. Нежельская

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 годы.

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Методом максимального правдоподобия решается задача об оценивании длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока.
Ключевые слова: обобщенный полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; функция правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; длительность мертвого времени.

Настоящая статья является непосредственным продолжением исследований обобщенного полусинхронного потока событий (далее поток), начатых в статьях [1–4]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО [5]. Можно выделить два класса дважды стохастических потоков событий: 1) потоки событий с интенсивностью, представляющей собой непрерывный случайный процесс; 2) потоки событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков в настоящее время принято называть МС-потоками либо МАР-потоками событий. В [6] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и МАР-потоками событий. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков приведена в [1].

Параметры потоков событий, функционирующих в реальном времени, неизвестны частично, либо полностью, либо представляют собой функцию времени. В подобных случаях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [7]. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [8, 9]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [10, 11].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [12], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем CSMA / CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени применяется метод максимального правдоподобия [13], так как оценки, полученные на основе этого метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{matrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2+\alpha) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{matrix} \right\| = \left\| D_0 \middle| D_1 \right\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

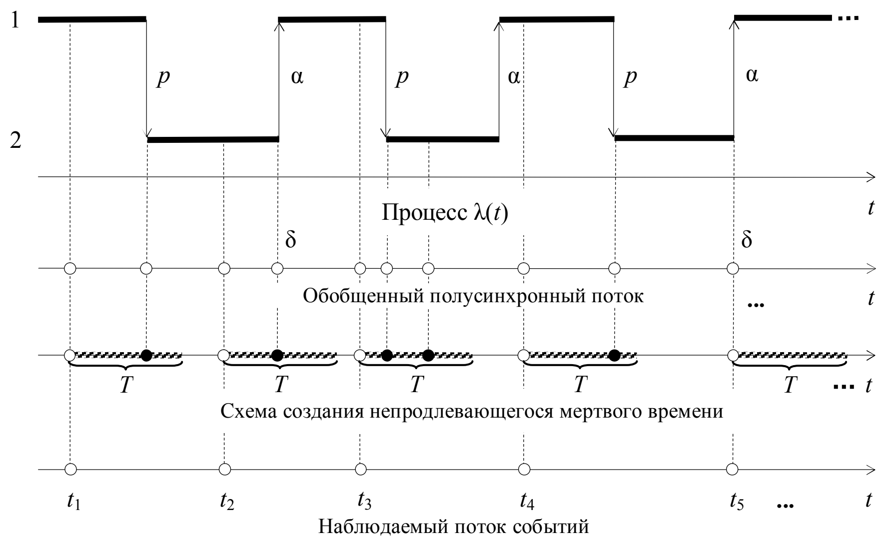

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где *1*, *2* – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквой δ; штриховка – периоды мертвого времени длительности T; t_1, t_2,… – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Подчеркнем, что если $\delta = 0$, то имеет место обычный полусинхнонный поток событий [14]. Отметим также, что в соответствии с классификацией MAP-потоков событий, приведенной в [6], обобщенный полусинхронный поток относится к классу MAP-потоков событий второго порядка.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) принципиально ненаблюдаемые, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, … наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 1,2,...)$ значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока $(\tau_k > 0)$. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [4] плотность вероятностей примет вид

$$p_T(\tau) = 0,\ 0 \leq \tau < T;\ p_T(\tau) = [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau - T)},$$
$$f(T) = \frac{p(\alpha+\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}, \tag{1}$$
$$F(T) = (\alpha + \lambda_2) - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T},\ 0 \leq T \leq \tau,\ \tau \geq 0.$$

В (1) функция $F(T) > 0$ для любых T $(0 \leq T \leq \tau)$. Сначала рассмотрим общий случай $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$. Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$,..., $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1,..., \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} <...< \tau^{(k)}$. В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента наступления события (с момента t_k, $k = 1,2,...$). Тогда функция правдоподобия, с учетом (1) [13], запишется в виде

$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = 0,\ 0 \leq \tau_{\min} < T;$$
$$L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}),\ \tau_{\min} \geq T.$$

Поскольку поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока λ_i, p, α, δ известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, её реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$\begin{gathered} L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^{k} \{[1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau^{(j)} - T)} + \\ + f(T)(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau^{(j)} - T)}\} \Rightarrow \max_T,\ 0 \leq T \leq \tau_{\min},\ \tau_{\min} > 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $f(T)$ определена в (1).

Значение T, при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \le T \le \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0$, $j = \overline{2,k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). Изучим поведение функции $p_T(\tau_m)$, $0 \le T \le \tau_m$, как функции переменной T. В дальнейшем изложенная ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Исследуем производную $p_T^{/}(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p_T^{/}(\tau_m) = [\lambda_1 - \lambda_1 f(T) - f^{/}(T)]e^{-\lambda_1(\tau_m - T)} + [(\alpha+\lambda_2)f(T) + f^{/}(T)]e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau_m - T)},$$
$$f^{/}(T) = \frac{p\alpha(\alpha+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)F^2(T)}, \ 0 \le \mathrm{T} \le \tau_m, \ \tau_m \ge 0, \quad (3)$$

где $f(T)$, $F(T)$ определены в (1); $f^{/}(T)$ – производная функции $f(T)$ по T.

Лемма 1. Производная $p_T^{/}(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m при $T = 0$, $0 \le \tau_m < \infty$ ($p_0^{/}(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число $\tau_m \ge 0$, то $p_0^{/}(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m. Подставляя $T = 0$ в (3) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p_0^{/}(\tau_m) = \frac{C}{A^2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)}\left\{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]e^{-\lambda_1\tau_m} + p(\alpha+\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau_m}\right\}, \tau_m \ge 0,$$
$$C = \lambda_1\alpha(1-p+p\delta) + p(\alpha+\lambda_2)(\lambda_2+\alpha\delta) > 0, \ A = \alpha + p(\lambda_2+\alpha\delta) > 0. \quad (4)$$

Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p_0^{/}(\tau_m) = 0$, которое с учетом (4) преобразуется к виду

$$B = e^{-(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\tau_m}, \ B = -\frac{p(\alpha+\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)}{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]}. \quad (5)$$

В (5) знак B определяется знаками $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)$ и $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)]$.
Из (4) находим

$$p_0^{/}(0) = (C/A)^2 > 0, \ \lim p_0^{/}(\tau_m) = 0 \text{ при } \tau_m \to \infty. \quad (6)$$

1. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Тогда $B < 0$ и поэтому уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), следует, что $p_0^{/}(\tau_m) \ge 0$, при этом равенство $p_0^{/}(\tau_m) = 0$ достигается при $\tau_m \to \infty$, т.е. $p_0^{/}(\tau_m) > 0$ для $0 \le \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Здесь и далее данный вариант нереализуем, так как неравенства несовместны.

3. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Тогда $B > 0$. Сравним B с единицей. Имеем

$$1 - B = C(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]\}^{-1}, \quad (7)$$

где C определена в (4). Из (7) следует $B > 1$. В силу этого уравнение (5) корней не имеет, и тогда, с учетом (6), $p_0^{/}(\tau_m) > 0$ для $0 \le \tau_m < \infty$.

4. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) > 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) < 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] < 0$. Здесь и далее данный вариант нереализуем, так как неравенства несовместны.

5. Пусть $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) < 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)] > 0$. Здесь и далее данный вариант нереализуем, так как неравенства несовместны.

6. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)<0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)>0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0$. Тогда $B>0$. Сравним B с единицей. Из (7) следует, что $B<1$. В силу этого уравнение (5) корней не имеет, и тогда, с учетом (6), $p_0^/(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$.

7. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)<0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)<0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]>0$. Здесь и далее данный вариант нереализуем, так как неравенства несовместны.

8. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)<0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)<0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0$. Тогда $B<0$ и поэтому уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), следует, что $p_0^/(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$.

9. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\ne 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)=0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]\ne 0$. Тогда $B=0$ и уравнение (5) решения не имеет. Отсюда следует, что $p_0^/(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$.

10. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\ne 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\ne 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]=0$. Тогда, преобразовывая (5) к виду $\exp[(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\,\tau_m]=B^{-1}$, получаем, что последнее уравнение решения не имеет и $p_0^/(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$.

11. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\ne 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)=0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]=0$. Одновременное выполнение этих равенств возможно только в одном единственном случае: $\delta=1$. Последнее влечет за собой выполнение равенства $\lambda_1-\lambda_2-\alpha=0$ (особый случай).

Объединение результатов пунктов 1–11 доказывает лемму 1.

Лемма 2. Производная $p_T^/(\tau_m)$ при $T=\tau_m$ строго больше нуля ($p^/(\tau_m)>0$), $0\le\tau_m<\infty$.

Доказательство. Подставляя $T=\tau_m$ в (3), получим

$$p^/(\tau_m)=\frac{1}{\alpha+p\lambda_1}\left\{\lambda_1 C+\frac{p\alpha}{F^2(\tau_m)}\varphi_1(\tau_m)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)\tau_m}\right\},$$

$$\varphi_1(\tau_m)=(\alpha+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-p\lambda_1)-(\lambda_1+\lambda_2+\alpha)[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)\tau_m},\ \tau_m\ge 0, \tag{8}$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1), C – в (4). Отметим, что при любых значениях величины $[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]$ функция $\varphi_1(\tau_m)$ в (8) строго больше нуля ($\varphi_1(\tau_m)>0$) для $\tau_m\ge 0$. Рассмотрим (8) как функцию $\tau_m\ge 0$. Имеем

$$p^/(0)=(C/A)^2>0,\quad \lim_{\tau_m\to\infty}p^/(\tau_m)=\lambda_1 C/(\alpha+p\lambda_1)>0, \tag{9}$$

где C, A, определены в (4). Из вида (8) производной $p^/(\tau_m)$ следует, что для любых значений $[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]\ge 0$ (либо $[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]<0$) и $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]\ge 0$ имеет место $p^/(\tau_m)>0$, $0\le\tau_m<\infty$.

Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0$. Выполнение этого неравенства возможно только тогда, когда

$$(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)>0,\ [\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение вторую производную $p_T^{//}(\tau_m)$ по переменной T в точке $T=\tau_m$. Используя (8), находим

$$p^{//}(\tau_m)=-\frac{p\alpha(\alpha+\lambda_2)}{F^3(\tau_m)}\varphi_2(\tau_m)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)\tau_m},$$

$$\varphi_2(\tau_m)=(\alpha+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-p\lambda_1)-(\lambda_1+\lambda_2+p\lambda_1+2\alpha)[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)\tau_m},\ \tau_m\ge 0, \tag{11}$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1). Знак выражения (11) определяется знаком функции $\varphi_2(\tau_m)$, так как в (11) величина

$$-\frac{p\alpha(\alpha+\lambda_2)}{F^3(\tau_m)}(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)\tau_m}>0.$$

Рассмотрим $\varphi_2(\tau_m)$ как функцию переменной τ_m ($\tau_m>0$). Имеем

$$\varphi_2(0)=C-(\alpha+p\lambda_1)[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)],\quad \lim_{\tau_m\to\infty}\varphi_2(\tau_m)=\varphi_2(\infty)=(\alpha+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-p\lambda_1)>0, \tag{12}$$

где C определена в (4). Здесь возможны следующие варианты.

1. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m и $\varphi_2(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует $p^{//}(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Тогда функция $p^{/}(\tau_m)$ есть также возрастающая функция переменной τ_m. С учетом (9) получаем $p^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

2. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m (убывает от $\varphi_2(0)$ до $\varphi_2(\infty) > 0$, оставаясь при этом строго больше нуля ($\varphi_2(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$)). Отсюда следует, что $p^{//}(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Тогда $p^{/}(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной τ_m. С учетом (9) находим $p^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

3. Пусть $\varphi_2(0) > 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m) = (\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - p\lambda_1) > 0$, $\tau_m \geq 0$. Отсюда следует $p^{//}(\tau_m) > 0$, $\tau_m > 0$, т.е. $p^{/}(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m. Тогда, с учетом (9), имеем $p^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \leq \tau_m < \infty$.

4. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Данный вариант нереализуем, так как при выполнении ограничений (10) равенство $\varphi_2(0) = 0$ недостижимо.

5. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия противоречат условию (12): $\varphi_2(\infty) > 0$.

6. Пусть $\varphi_2(0) = 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия входят в противоречие с условиями (12).

7. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] > 0$. Данный вариант нереализуем, так как приведенные ограничения вместе с неравенствами (10) противоречивы.

8. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] < 0$. Данный вариант нереализуем, так как приведенные ограничения противоречат условию (12): $\varphi_2(\infty) > 0$.

9. Пусть $\varphi_2(0) < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$. Данный вариант нереализуем, так как эти условия противоречат условиям (12).

Объединение результатов пунктов 1–9 доказывает лемму 2.

Изучим поведение производной $p_T^{/}(\tau_m)$ как функции T на отрезке $[0, \tau_m]$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p_T^{/}(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (3), приводится к виду

$$\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)} = \Psi(T),\ \Psi(T) = [F_2(T)/F_1(T)]B,$$

$$F_1(T) = \lambda_1\lambda_2(\alpha+\lambda_2)[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]^2 + \lambda_1[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}][\alpha(\alpha+\lambda_2) + p(\alpha+\lambda_2)(\lambda_2+\alpha\delta)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T} +$$
$$+\lambda_2(1-p)(\alpha+p\lambda_1)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}] + (\alpha+p\lambda_1)[\lambda_1\alpha(1-p) + p(\alpha+\lambda_2)(\lambda_2+\alpha\delta) + p\lambda_1\alpha\delta\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T},$$

$$F_2(T) = \lambda_1\lambda_2(\alpha+\lambda_2)[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]^2 + (\alpha+\lambda_2)[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}][\lambda_1\alpha + p\lambda_1(\lambda_2+\alpha\delta)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T} +$$
$$+\lambda_2(\alpha+p\lambda_1)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}] + (\alpha+p\lambda_1)[\lambda_1\alpha(1-p+p\delta) + p(\alpha+\lambda_2)(\lambda_2+\alpha\delta)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T},$$

$$F_1(T) > 0,\ F_2(T) > 0,\ 0 \leq T \leq \tau_m,\ \tau_m \geq 0, \tag{13}$$

где B определена в (5). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то будем считать, что $T \geq 0$. Вычислим производную функции $\Psi(T)$ по переменной T. Имеем

$$\Psi^{/}(T) = -\frac{p(\alpha+\lambda_2)^2(\alpha+p\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]F_1^2(T)} \times$$
$$\times\{\lambda_1(\alpha+\lambda_2)^2[1-\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]^2 - C(\alpha+p\lambda_1)\mathrm{e}^{-2(\alpha+p\lambda_1)T}\}, \tag{14}$$

где C определена в (4). Сначала рассмотрим случай: $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$, $p \neq 1$. Тогда из (14) вытекает $\Psi^{/}(T) = 0$. Последнее означает, что $\Psi(T)$, определенная (13), равна константе ($\Psi(T) = \Psi$).

Лемма 3. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$, $p \neq 1$, то производная $p_T^{/}(\tau_m)$, $0 \leq \tau_m < \infty$, строго больше нуля ($p_T^{/}(\tau_m) > 0$).

Доказательство. С учетом равенства $[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] = 0$ уравнение (13) преобразуется к виду

$$\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)} = \Psi,\ \Psi = -\frac{p\alpha(1-p+p\delta)[\lambda_1(1-p)-\alpha\delta]}{\lambda_1(1-p)^2[\lambda_1(1-p)-\alpha]},$$
$$0 \leq T \leq \tau_m,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0. \tag{15}$$

Здесь и далее учитываются только реализуемые варианты ограничений, определенные в лемме 1.

1. Пусть $[\lambda_1(1-p)-\alpha\delta][\lambda_1(1-p)-\alpha]^{-1} > 0$. Тогда $\Psi < 0$. Отсюда следует, что уравнение (15) решения не имеет, и вследствие этого, с учетом лемм 1, 2, получаем $p_T^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \le T \le \tau_m$, $0 \le \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha) > 0$, $[\lambda_1(1-p)-\alpha\delta] > 0$, $[\lambda_1(1-p)-\alpha] < 0$. Тогда $\Psi > 1$. Отсюда следует вывод, аналогичный выводу пункта 1.

3. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha) < 0$, $[\lambda_1(1-p)-\alpha\delta] > 0$, $[\lambda_1(1-p)-\alpha] < 0$. Тогда $0 < \Psi < 1$. Отсюда следует вывод, аналогичный выводу пункта 1.

4. Пусть $[\lambda_1(1-p)-\alpha\delta] = 0$. Тогда $\Psi = 0$ и уравнение (15) решения не имеет, что влечет за собой вывод пункта 1.

Преобразуем уравнение (15) к виду $\exp\{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)\} = \Psi^{-1}$, $0 \le T \le \tau_m$. Тогда имеет место следующий пункт.

5. Пусть $[\lambda_1(1-p)-\alpha] = 0$. Тогда $\Psi^{-1} = 0$ и преобразованное уравнение решения не имеет, что влечет за собой вывод пункта 1.

Объединение результатов пунктов 1–5 доказывает лемму 3.

В рамках ограничения $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] = 0$ возможен еще один вариант: $p = 1$, $\delta = 0$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 4. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] = 0$ и $p = 1$, $\delta = 0$, то производная $p_T^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \le \tau_m < \infty$.

Доказательство. В ограничениях леммы 4 уравнение (15) примет вид

$$e^{-(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)} = (\lambda_1-\lambda_2)(\alpha+\lambda_2)/\lambda_1\alpha\,,\ 0 \le T \le \tau_m,\ (\lambda_1-\lambda_2-\alpha) \ne 0. \qquad (16)$$

Так как $(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha+\lambda_2) - \lambda_1\alpha = \lambda_2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)$, то уравнение (16) решения не имеет, что, с учетом лемм 1, 2, доказывает лемму 4.

Рассмотрим теперь случай, когда $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) = 0$ либо $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] = 0$.

Лемма 5. Если $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) = 0$ либо $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] = 0$, то производная $p_T^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \le \tau_m < \infty$.

Доказательство. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) = 0$. Тогда из (13) имеем $\Psi(T) = \Psi$ ($\Psi = 0$). Уравнение (13) при этом примет вид $\exp\{-(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)\} = 0$, $0 \le T \le \tau_m$, которое решения не имеет. Преобразуем уравнение (13) к виду $\exp\{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)(\tau_m-T)\} = \Psi^{-1}(T)$, $0 \le T \le \tau_m$. Пусть $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] = 0$. Тогда имеем $\Psi^{-1}(T) = \Psi^{-1}$ ($\Psi^{-1} = 0$). В силу этого преобразованное уравнение решения не имеет. Лемма 5 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] \ne 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) \ne 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] \ne 0$. Рассмотрим разность $\Delta F(T) = F_1(T) - F_2(T)$ функций $F_1(T)$, $F_2(T)$ из (13). Имеем

$$\Delta F(T) = (\lambda_1-\lambda_2-\alpha)[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)](\alpha+p\lambda_1)\,e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}\,[1-e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]. \qquad (17)$$

Лемма 6. Если $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] \ne 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) \ne 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] \ne 0$, то производная $p_T^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \le \tau_m < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим варианты:

1. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha) > 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] < 0$. Из (17) следует $\Delta F(T) < 0$, что влечет за собой $[F_2(T)/F_1(T)] > 1$. Так как соотношение (7) дает $B > 1$, то из (13) находим $\Psi(T) > 1$. Последнее означает, что уравнение (13) решения не имеет. Учитывая результаты лемм 1, 2, получаем $p_T^{/}(\tau_m) > 0$, $0 \le \tau_m < \infty$.

2. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha) < 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] < 0$. Тогда $\Delta F(T) > 0$, что влечет за собой $[F_2(T)/F_1(T)] < 1$. Соотношение (7) дает $B < 1$. Тогда из (13) вытекает $\Psi(T) < 1$, что приводит к выводу пункта 1.

3. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha) > 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta) > 0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)] < 0$, $[\lambda_2 - p(\lambda_2+\alpha\delta)] > 0$. Тогда $\Delta F(T) > 0$, что влечет за собой $[F_2(T)/F_1(T)] < 1$. Соотношение (7) дает $B > 1$. Вследствие этого из (13) вытекает, что либо $\Psi(T) > 1$, либо $\Psi(T) < 1$. Покажем, что $\Psi(T) > 1$ для любых $T \ge 0$. Учитывая (13), находим

$$1-\Psi(T) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)CF_2(T) + \lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]\Delta F(T)}{\lambda_1\alpha[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]F_1(T)} = \frac{\Psi_1(T)}{\Psi_2(T)},\ T \ge 0. \qquad (18)$$

Числитель $\Psi_1(T)$ в (18) преобразовывается к виду

$$\Psi_1(T)=(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\{CF_2(T)+\lambda_1\alpha(\alpha+p\lambda_1)[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)][\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}\times$$
$$\times[1-e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]\},\ T\geq 0. \qquad (19)$$

Непосредственной подстановкой функции $F_2(T)$ из (13) в (19) показывается, что $\Psi_1(T)>0$ для всех $T\geq 0$. Тогда, так как в (18) знаменатель $\Psi_2(T)<0$, получаем $1-\Psi(T)<0$. Отсюда следует $\Psi(T)>1$ для $T\geq 0$, что приводит к выводу пункта 1.

4. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)<0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)>0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0$, $[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]>0$. Тогда $\Delta F(T)<0$, что влечет за собой $[F_2(T)/F_1(T)]>1$. Соотношение (7) дает $B<1$. Тогда из (13) вытекает, что либо $\Psi(T)>1$, либо $\Psi(T)<1$. Покажем, что $\Psi(T)<1$ для любых $T\geq 0$. Непосредственной подстановкой функции $F_2(T)$ из (13) в (19) показывается, что $\Psi_1(T)<0$ для всех $T\geq 0$. Тогда, так как в (18) знаменатель $\Psi_2(T)<0$, то из (18) следует $1-\Psi(T)>0$. Отсюда вытекает $\Psi(T)<1$ для $T\geq 0$, что приводит к выводу пункта 1.

5. Пусть $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\neq 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)>0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]>0$ либо $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\neq 0$, $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)<0$, $[\lambda_1(1-p+p\delta)-(\alpha+\lambda_2)]<0$. Тогда из (13) следует $\Psi(T)<0$ для любых $T\geq 0$, что влечет за собой вывод пункта 1.

Отметим, что $\Psi(T)$, определенная в (13), представляет собой одноэкстремальную функцию. Экстремум достигается в точке

$$T^*=-\frac{1}{\alpha+p\lambda_1}\ln\left[\frac{(\alpha+\lambda_2)\sqrt{\lambda_1}}{(\alpha+\lambda_2)\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{(\alpha+p\lambda_1)C}}\right]>0,$$

являющейся решением уравнения

$$Z(T)=0,\ Z(T)=\lambda_1(\alpha+\lambda_2)^2[1-e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]^2-C(\alpha+p\lambda_1)e^{-2(\alpha+p\lambda_1)T},$$

вытекающего из уравнения $\Psi^{/}(T)=0$, где $\Psi^{/}(T)$ определена в (14), C – в (4). В точке Ψ^*, в зависимости от знака величин, входящих в $\Psi^{/}(T)$, и знака функции $Z(T)$ на промежутках $[0, T^*)$, (T^*,∞), достигается либо минимум, либо максимум функции $\Psi(T)$.

Объединение результатов пунктов 1–5 доказывает лемму 6.

Теорема 1. При любых значениях параметров $\lambda_1>0$, $\lambda_2\geq 0$ $(\lambda_1>\lambda_2)$, $\alpha>0$, $0<p\leq 1$, $0\leq\delta\leq 1$ и ограничении $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\neq 0$ производная $p_T^{/}(\tau_m)$ – положительная функция переменной T ($p_T^{/}(\tau_m)>0$), $0\leq T\leq\tau_m$, $0\leq\tau_m<\infty$.

Доказывается последовательным применением лемм 1–6.

Теорема 2. При любых значениях параметров $\lambda_1>0$, $\lambda_2\geq 0$ $(\lambda_1>\lambda_2)$, $\alpha>0$, $0<p\leq 1$, $0\leq\delta\leq 1$ и ограничении $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)\neq 0$ функция $p_T(\tau_m)$ переменной T $(0\leq T\leq\tau_m)$ достигает своего максимального значения в точке $T=\tau_m$, $0\leq\tau_m<\infty$.

Доказательство вытекает из результата теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j=\overline{2,k}$, являются возрастающими функциями переменной T $(0\leq T\leq\tau_m)$.

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает, что функция правдоподобия $L(T\mid\tau^{(1)},\dots,\tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T}=\tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T}=\tau_m$.

4. Решение оптимизационной задачи (2)

Плотность вероятностей $p_T(\tau)$ для особого случая $(\lambda_1-\lambda_2-\alpha=0)$ примет вид [4]:

$$p_T(\tau)=0, 0\leq\tau<T;\ p_T(\tau)=\{\lambda_1+x(T)[1-\lambda_1(\tau-T)]\}e^{-\lambda_1(\tau-T)},$$
$$x(T)=-\alpha(1-\delta)x_1(T),\ x_1(T)=\frac{p\lambda_1}{\alpha+p\lambda_1}-\left[\frac{p\lambda_1}{\alpha+p\lambda_1}-x_2(T)\right]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T},$$
$$x_2(T)=\frac{p\lambda_1}{\alpha+p\lambda_1}\left\{1+\frac{p\alpha(1-\delta)}{\lambda_1-[(\lambda_1-\alpha)(1-p)-p\alpha\delta]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}\right\},\quad 0\leq T\leq\tau,\ \tau\geq 0. \qquad (20)$$

В обозначениях раздела 3 функция правдоподобия, с учетом (20), запишется в виде

$$L\ (T \mid \tau^{(1)},..., \tau^{(k)}) = 0,\ 0 \le \tau_m < T;$$

$$L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} \left\{ \lambda_1 + x(T)[1-\lambda_1(\tau^{(j)} - T)] \right\} e^{-\lambda_1(\tau^{(j)} - T)},\ 0 \le T \le \tau_m,\ \tau_m > 0. \qquad (21)$$

где $x(T)$ определена в (20).

Лемма 7. Плотность вероятностей $p_T(\tau_m)$, определенная формулой (20), где $\tau = \tau_m$, является возрастающей функцией переменной T ($0 \le T \le \tau_m$, $0 \le \tau_m < \infty$) при любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \ge 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\alpha > 0$, $0 < p \le 1$, $0 \le \delta \le 1$.

Доказательство. Рассмотрим $x(T)$ из (20) как функцию переменной T ($T \ge 0$). Производная функции $x(T)$ выпишется в виде

$$x^{/}(T) = \left\{ p\lambda_1\alpha(1-\delta) / (\lambda_1 - [(\lambda_1-\alpha)(1-p) - p\alpha\delta]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}) \right\}^2 > 0,$$

$$\lambda_1 - [(\lambda_1-\alpha)(1-p) - p\alpha\delta]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} > 0,\ T \ge 0.$$

Отсюда следует, что функция $x(T)$ есть возрастающая функция. Возрастает от $x(0) = -\alpha(1-\delta)p\lambda_1/[\alpha(1-p) + p(\lambda_1 + \alpha\delta)] < 0$ до $\lim x(T) = -\alpha(1-\delta)p\lambda_1/(\alpha + p\lambda_1) < 0$ при $T \to \infty$. Тогда, так как функции $[1 - \lambda_1(\tau_m - T)]$, $e^{-\lambda_1(\tau_m - T)}$, входящие в выражение (20) для $p_T(\tau_m)$, есть возрастающие функции переменной T, то плотность вероятностей $p_T(\tau_m)$ есть также возрастающая функция переменной T, $0 \le T \le \tau_m$, $0 \le \tau_m < \infty$. Лемма 7 доказана.

Таким образом, для особого случая справедливы теоремы 1, 2 и их следствия из раздела 3.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала $(0, t)$) потока событий вычисляются величины τ_k, $k = \overline{1,n}$, после чего находится $\tau_m = \min \tau_k$ ($k = \overline{1,n}$) и полагается $\hat{T} = \tau_m$. Подчеркнем, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенная ($\tau_m > T$); её несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. *Горцев А.М., Калягин А.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. *Горцев А.М., Калягин А.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 80–87.
4. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
5. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
7. *Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
8. *Горцев А.М., Нежельская Л.А., Соловьев А.А.* Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
9. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A.* Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
10. *Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.

11. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.,* Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
12. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
13. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
14. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, проф. E-mail: amgt@fpmk.tsu.ru
Калягин Алексей Андреевич. E-mail: redall@inbox.ru
Нежельская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 сентября 2014 г.

Gortsev Alexander M., Kalyagin Aleksey A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Russian Federation). **Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semysynchronous flow of events.**

Keywords: generalized semisynchronous flow of events; unprolonging dead time; likelihood function; maximum likelihood estimation; dead time value.

The generalized semisynchronous flow of events, which intensity is a piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two intensities λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$), is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, the Poisson flow of events has the intensity λ_i, $i = 1,2$. The transition from the first state of the process $\lambda(t)$ into the second state is possible only at the moment of occurring event, thus, the transition carries out with probability p ($0 < p \le 1$); with probability $1 - p$ process $\lambda(t)$ remains in the first condition. In this case, the duration of process stay in the first state is a random variable with exponential distribution function $F_1(\tau) = 1 - \mathrm{e}^{-p\lambda_1\tau}$. The transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, the duration of process stay in the second state is distributed according exponential law: $F_2(\tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau}$. By the transition from the second state into the first one an additional event in the first state is initiated with probability δ ($0 \le \delta \le 1$).

The flow is considered in the condition of constant dead time. The dead time period of the fixed duration T begins after every registered event at moment t_i. During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next T–interval of dead time and so on (unprolonging dead time).

Process $\lambda(t)$ and the types of events (event from Poisson flows and additional events) are fundamentally unobservable and observable are only temporary moments of the events t_1, t_2,…. We consider the steady (stationary) mode of operation of the observed flow of events, so transients are neglected on the observation interval (t_0, t), where t_0 and t are the start and end of observations. It is necessary at the end of observations (at time t) to implement maximum likelihood estimate $\hat{T}$ of the dead time T.

Let $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$,... , $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ be the sequence of the measured (by observing the flow during the observation interval (0, t)) values of the length of intervals between adjacent flow events . We order quantities τ_1,... , τ_k ascending: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} <...< \tau^{(k)}$.

The objective is to estimate $\hat{T}$ the duration of the construction of the dead time (assuming that the other flow parameters λ_i , p, α, δ are known), by solving the optimization problem:

$$L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^{k} \{[1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau^{(j)}-T)} +$$

$$+ f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau^{(j)}-T)}\} \Rightarrow \max_T, \ 0 \le T \le \tau_{\min}, \ \tau_{\min} > 0,$$

$$f(T) = \frac{p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)\mathrm{e}^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}.$$

The value of T, at which $L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ reaches its global maximum, is the estimate $\hat{T}$ of the duration of the dead time. It is proved that the global maximum occurs at $\hat{T} = \tau_{\min}$.

REFERENCES

1. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal states estimation of integrated semisyncronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 66-81. (In Russian).
2. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4(13), pp. 50-60. (In Russian).
3. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science,* 2012, no. 2(19), pp. 80-87. (In Russian).

4. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science,* 2014, no. 2(27), pp. 19-29. (In Russian).
5. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU Publ., 2000. 175 p.
6. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science,* 2011, no. 1(14), pp. 13-21. (In Russian).
7. Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queueing systems]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1978. 208 p.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal'naya otsenka sostoyaniy MAR-potoka sobytiy v usloviyakh neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni [Optimal states estimation of MAP flows of events in the condition of constant dead time]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no. 8, pp. 49-63.
9. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
10. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenka parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Parameters estimation of synchronous double stochastic flow of events]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2008, no. 9, pp. 76-93.
11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radioengineering*, 2004, no. 10, pp. 8-16. (In Russian).
12. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavskiy A.F. *Staticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe Publ., 1988. 254 p.
13. Shulenin V.P. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics].Tomsk: NTL Publ., 2012. 540 p.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015