ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (30)

УДК 369:519.2

О.В. Губина, Г.М. Кошкин

ОЦЕНИВАНИЕ АКТУАРНОЙ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОЖИЗНЕННОЙ РЕНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00744).

Рассматривается задача оценивания актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты. Синтезируется непараметрическая оценка пожизненной ренты. Находятся главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и её предельное распределение. Результаты статистического моделирования показывают, что качество оценивания улучшается с ростом объёма выборки.
Ключевые слова: непараметрические оценки; полное страхование жизни; пожизненная рента; асимптотическая нормальность; среднеквадратическая ошибка.

Суть пожизненной ренты согласно [1. С. 170] состоит в том, что начиная с момента $t=0$ человек раз в год получает определенную сумму, которую мы примем в качестве единицы измерения денежных сумм, причем выплаты производятся только в течение жизни человека.

Известно, что расчет характеристик пожизненной ренты основан на использовании характеристик соответствующего вида страхования. Так, среднее значение современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты (см.: [1. С. 184]) определяется формулой

$$\overline{a}_x(\delta)=\frac{1-\overline{A}_x}{\delta},$$

где $\overline{A}_x$ – нетто-премия (среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании в возрасте x лет); δ – интенсивность процентов.

Пусть x – возраст человека в момент $t=0$ начала платежей, X – продолжительность его жизни, T_x = X–x – остаточная продолжительность жизни. Введём случайную величину

$$z=\frac{1-e^{-\delta T_x}}{\delta}, T_x>0.$$

Тогда пожизненная рента определяется формулой (ср.: [2]):

$$\overline{a}_x(\delta)=\mathrm{M}(z)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\Phi(x,\delta)}{S(x)}\right), \tag{1}$$

где М – символ математического ожидания, $S(x)=P(X>x)$ – функция выживания,

$$\Phi(x,\delta)=-e^{\delta x}\int_x^{\infty}e^{-\delta t}dS(t).$$

В настоящей работе рассмотрена задача оценивания актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты, выполнен синтез непараметрической оценки пожизненной ренты, исследованы асимптотические свойства предложенной оценки. Приводятся результаты моделирования.

1. Оценка пожизненной ренты

Пусть имеется случайная выборка $X_1 ... X_N$ продолжительностей жизни N индивидов. Оценим отдельно числитель и знаменатель в (1). Воспользуемся вместо неизвестной функции выживания $S(x)$ её непараметрической оценкой:

$$S_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}I(X_i>x),$$

где $I(A)$ – индикатор события A.

Подставив $S_N(x)$ в формулу (1), получим следующую оценку пожизненной ренты:

$$\bar{a}_x^N(\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{e^{\delta x}}{S_N(x)\cdot N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)I(X_i>x)\right)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\Phi_N(x,\delta)}{S_N(x)}\right), \quad (2)$$

где $\Phi_N(x,\delta)=\frac{e^{\delta x}}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)I(X_i>x)$.

2. Среднеквадратическая ошибка оценки

Найдем главную часть асимптотической среднеквадратической ошибки (СКО) и порядок смещения оценки (2). Для этого нам понадобится теорема 1 из [3], которую ниже сформулируем в виде Леммы.

Введем обозначения согласно [3]: $t_N=(t_{1N},t_{2N},...,t_{sN})^T$ – s-мерная векторная статистика с компонентами $t_{jN}=t_{jN}(x)=t_{jN}(x;X_1,...,X_N),\ j=\overline{1,s},\ x\in R^{\alpha}$, R^{α} – α-мерное евклидово пространство; функция $H(t):R^s\to R^1$, где $t=t(x)=(t_1(x),...,t_s(x))^T$ – s-мерная ограниченная вектор-функция; $N_s(\mu,\sigma)$ – s-мерная нормально распределенная случайная величина с вектором средних $\mu=\mu(x)=(\mu_1,...\mu_s)^T$ и ковариационной матрицей $\sigma=\sigma(x)$;

$$\nabla H(t)=(H_1(t),...,H_s(t))^T,\quad H_j(t)=\left.\frac{\partial H(z)}{\partial z_j}\right|_{z=t},\quad j=\overline{1,s};$$

$\Rightarrow$ – знак сходимости по распределению (слабой сходимости); $\|x\|$ – евклидова норма вектора x.

Лемма. Пусть:

1) функция $H(t)$ – дважды дифференцируема, причем $\nabla H(t)\neq 0$;

2) $\mathrm{M}\|t_N-t\|^i=\mathrm{O}(d_N^{-i/2}),\ i=1,2,...$.

Тогда $\forall k=1,2,...$:

$$\left|\mathrm{M}\left[H(t_N)-H(t)\right]^k-\mathrm{M}\left[\nabla H(t)\cdot(t_N-t)\right]^k\right|=\mathrm{o}(d_N^{-(k+1)/2}). \quad (3)$$

Заметим, что, полагая в формуле (3) $k=1$, получаем главную часть смещения оценки $H(t_n)$, а при $k=2$ – главную часть её СКО.

Теорема 1. Если $S(x)>0$, $S(t)$ непрерывна в точке x, то:

1) для смещения оценки ренты выполняется соотношение

$$\left|b(\bar{a}_x^N(\delta))\right|=\mathrm{o}(N^{-1});$$

2) СКО оценки определяется выражением

$$u^2(\bar{a}_x^N(\delta))=\mathrm{M}(\bar{a}_x^N(\delta)-\bar{a}_x(\delta))^2=\frac{\sigma(\bar{a}_x(\delta))}{N}+\mathrm{o}(N^{-3/2}),$$

где $\sigma(\bar{a}_x(\delta))$ задается формулой (4).

Доказательство. Для оценки $\bar{a}_x^N(\delta)$, задаваемой формулой (2), в обозначениях приведенной выше леммы имеем

$$t_N=(\Phi_N(x,\delta),S_N(x))^T;\ d_N=N;\ t=(\Phi(x,\delta),S(x))^T;$$

$$H(t)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\Phi(x,\delta)}{S(x)}\right)=\bar{a}_x;\ H(t_N)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\Phi_N(x,\delta)}{S_N(x)}\right)=\bar{a}_x^N;$$

$$\nabla H(t)=\left(H_1(t),H_2(t)\right)^T=\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{S(x)},-\frac{1}{\delta}\frac{\Phi(x,\delta)}{S^2(x)}\right)^T\neq 0.$$

Известно, что $S_N(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $S(x)$. Покажем, что $\Phi_N(x,\delta)$ является несмещенной оценкой функционала $\Phi(x,\delta)$:

$$\mathrm{M}\Phi_N(x,\delta)=\frac{e^{\delta x}}{N}\mathrm{M}\left\{\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)I(X_i>x)\right\}=\Phi(x,\delta).$$

Теперь для оценки $\Phi_N(x,\delta)$ вычислим дисперсию:

$$D\Phi_N(x,\delta)=D\left\{\frac{e^{\delta x}}{N}\sum_{i=1}^{N}I(X_i>x)e^{-\delta X_i}\right\}=\frac{e^{2\delta x}}{N^2}\sum_{i=1}^{N}D\left\{I(X_i>x)e^{-\delta X_i}\right\}=\frac{1}{N}\left(\Phi(x,2\delta)-\Phi^2(x,\delta)\right).$$

Отношение двух несмещенных оценок может иметь смещение. Нахождение смещения отношения, как правило, является сложной задачей и требует использования результатов работы [3]. Найдем порядок смещения оценки. Так как $\mathrm{M}(t_N - t) = 0$, то

$$\left|\mathrm{M}(\overline{a}_x^N(\delta) - \overline{a}_x(\delta)) - \mathrm{M}\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]\right| = \left|\mathrm{M}(\overline{a}_x^N(\delta) - \overline{a}_x(\delta))\right| = \left|b(\overline{a}_x^N(\delta))\right| = o(N^{-1}).$$

Теперь найдем компоненты ковариационной матрицы статистики t_N:

$$\sigma_{11} = ND\{\Phi_N(x,\delta)\} = \Phi(x,2\delta) - \Phi^2(x,\delta);$$
$$\sigma_{22} = ND\{S_N(x)\} = S(X)(1 - S(x));$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = N\operatorname{cov}(S_N(x), \Phi_N(x,\delta)) = N(\mathrm{M}\{S_N(x)\Phi_N(x,\delta)\}) - \mathrm{M}\{S_N(x)\}\mathrm{M}\{\Phi_N(x,\delta)\} =$$
$$= (1 - S(x))\Phi(x,\delta).$$

Используя предыдущий результат о смещении и найденную ковариационную матрицу, получаем СКО оценки:

$$u^2(\overline{a}_x^N(\delta)) = \mathrm{M}\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]^2 + \mathrm{O}(N^{-3/2}) = \frac{\sigma(\overline{a}_x)}{N} + \mathrm{O}(N^{-3/2}),$$

где

$$\sigma(\overline{a}_x(\delta)) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} H_j(t)\sigma_{jp}H_p(t) = H_1^2(t)\sigma_{11} + H_2^2(t)\sigma_{22} + 2H_1(t)H_2(t)\sigma_{12} =$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\Phi(2\delta)}{S^2(x)} - \frac{3\Phi^2(x,\delta)}{S^3(x)} + \frac{2\Phi^2(x,\delta)}{S^2(x)}\right). \tag{4}$$

Теорема доказана.

3. Асимптотическая нормальность оценки

Для нахождения предельного распределения оценки (2) нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 2 (центральная предельная теорема в многомерном случае) [4. С 178–202]. Если $t_1, t_2, ..., t_N, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных s-мерных векторов

$$\mathrm{M}\{t_s\} = 0, \sigma(x) = \mathrm{M}\{t_s{}^T t_s\},$$
$$S_N = \sum_{s=1}^{N} t_s,$$

то при $N \to \infty$

$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} \Rightarrow \mathrm{N}_s(0, \sigma(x)).$$

Теорема 3 (об асимптотической нормальности $H(t_N)$) [5]. Пусть:

1) $\sqrt{N}\cdot t_N \Rightarrow \mathrm{N}_s\{\mu, \sigma(x)\}$;

2) функция $H(z)$ дифференцируема в точке μ, $\nabla H(\mu) \neq 0$.

Тогда $\sqrt{N}(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow N_1\left\{\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\mu_j, \sum_{p=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\sigma_{jp}H_p(\mu)\right\}$.

Теорема 4 (о предельном распределении оценки (2)). В условиях теоремы 1

$$\sqrt{N}(\overline{a}_x^N(\delta) - \overline{a}_x(\delta)) \Rightarrow N_1(0, \sigma(\overline{a}_x(\delta))). \tag{5}$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 2 имеем $s = 2, \sigma(x) = \sigma(\overline{a}_x(\delta))$. Таким образом,

$$\sqrt{N}\{(\Phi_N(x,\delta), S_N(x)) - (\Phi(x,\delta), S(x))\} \Rightarrow N_2\left(0, \sigma\left(\overline{a}_x(\delta)\right)\right),$$

где

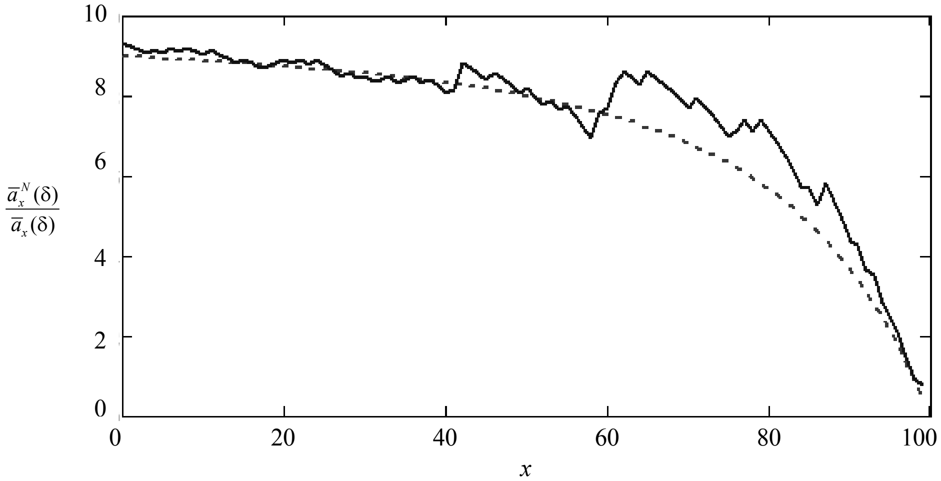
$$\sigma(\overline{a}_x(\delta)) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12} \\ \sigma_{21}\sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Функция $H(z)$ дифференцируема в точке $t = (\Phi(x,\delta), S(x))$ и $\nabla H(t) \neq 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 3 и утверждение (5) справедливо. Теорема доказана.

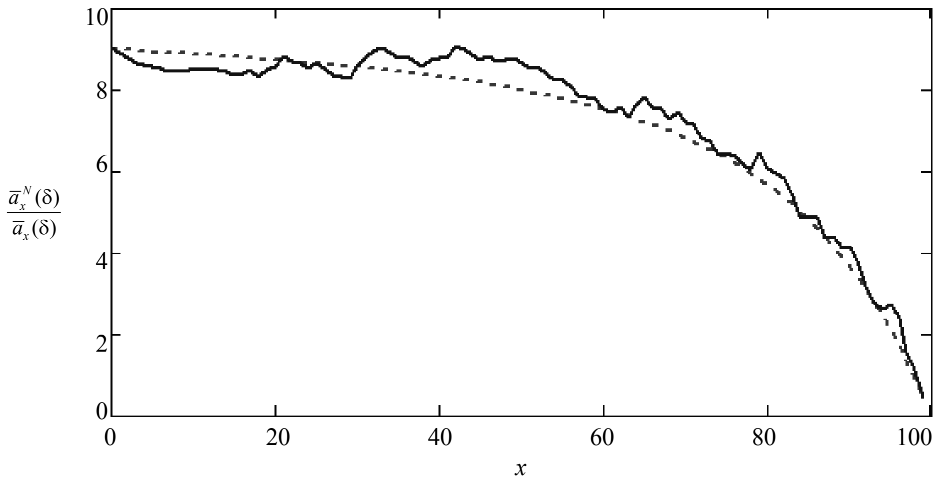
4. Статистическое моделирование

Рассмотрим модель де Муавра, для которой продолжительность жизни X индивида распределена равномерно в интервале (0, ω), где ω – предельный возраст, а пожизненная рента, согласно (1), принимает вид

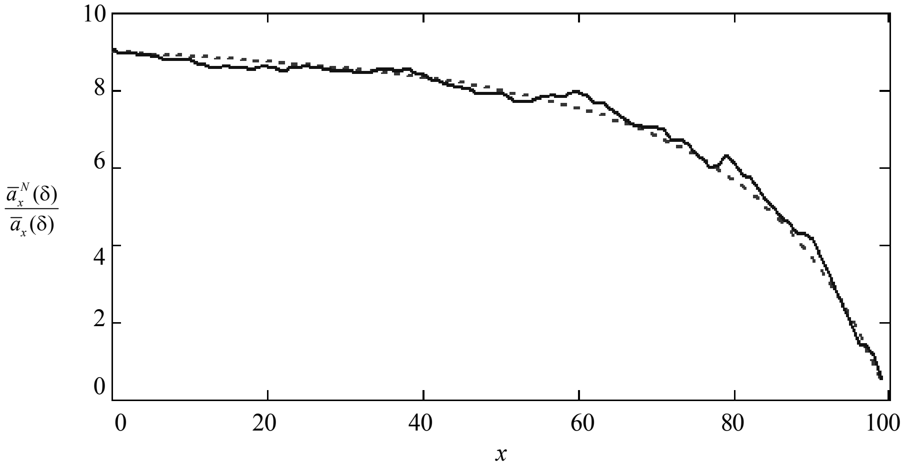
$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)}.$$



а



б



в

Рис.1. Зависимость пожизненной ренты $\bar{a}_x(\delta)$ и её оценки $\bar{a}_x^N(\delta)$ от возраста x при объёмах выборок N: *а* – 50; *б* – 100; *в* – 500

На рис. 1 представлены пожизненные ренты и их оценки, построенные по выборкам объема N = 50, 100, 500 независимых случайных величин $X_1,...,X_N$, равномерно распределенных на интервале (0, 100) при интенсивности процентов δ = 0,09531(9,531%). Заметим, что при такой интенсивности процентов эффективная годовая процентная ставка $i = e^{\delta} - 1 = 0{,}1(10\%)$.

Будем характеризовать качество оценок, представленных на рис.1, следующими эмпирическими среднеквадратическими ошибками:

$$G(N,\delta) = \frac{\sum_{x=0}^{99}(\overline{a}_x(\delta) - \overline{a}_x^N(\delta))^2}{N}, \quad N = 50,100,500.$$

В результате вычислений получаем

G(50, 0,09531) = 0,75935, G(100, 0,09531) = 0,16183, G(500, 0,09531) = 0,00522,

т.е. качество оценивания улучшается с ростом объёма выборки.

Таким образом, в рамках нашей модели современная стоимость полной непрерывной пожизненной ренты для человека в возрасте x = 45 лет при $\delta = 0{,}09531$ и ежемесячной выплате в размере 1000 руб. равна

$$12\,000 \cdot \overline{a}_{45}(0{,}09531) = 12\,000 \cdot 8{,}501 = 102\,012 \text{ руб.}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача оценивания современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты. Доказаны асимптотические свойства оценки: несмещенность, состоятельность и нормальность. Находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки предложенной оценки. Статистическое моделирование в рамках модели де Муавра показывает, что качество оценивания по эмпирическому критерию $G(N,\delta)$ улучшается с ростом объёма выборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М. : Анкил, 2002. 262 с.
2. *Кошкин Г.М., Лопухин Я.Н.* Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 2. С. 315–329.
3. *Кошкин Г.М.* Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 604–618.
4. *Кошкин Г.М.* Введение в математику страхования жизни. Томск : ТГУ, 2004. 112 с.
5. *Кошкин Г.М., Ланкина Н.В.* Непараметрическое оценивание нетто-премий для смешанного страхования жизни // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314, № 5. С. 236–240.

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, проф. E-mail: kgm@mail.tsu.ru
Губина Оксана Викторовна. E-mail: gov7@mail.ru
Томский государственный университет

Gubina OksanaV., Koshkin Gennady M. (Tomsk State University. Russian Federation).

Estimation of actuarial present value of the whole continuous life annuity.

Keywords: non-parametric estimation; whole life insurance; life annuity; asymptotic normality; mean square error.

Consider the estimation problem of the present value for the whole continuous life annuity

$$\overline{a}_x(\delta) = \frac{1 - \overline{A}_x}{\delta},$$

where $\overline{A}_x$ is a net premium (mathematical expectation of the present value of an insured unitary sum for the whole life insurance at age x), δ is a force of interest.

As an estimate $\overline{a}_x(\delta)$ from a random lifetime sample $X_1...X_N$, we take the statistics

$$\bar{a}_x^N(\delta) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{e^{\delta x}\sum_{i=1}^{N} e^{-\delta X_i} I(X_i > x)}{\sum_{i=1}^{N} I(X_i > x)}\right),$$

where $I(A)$ is an indicator of a set A.

The main part of the asymptotic mean square error of the estimate $\bar{a}_x^N(\delta)$ is found, and the asymptotic normality of $\bar{a}_x^N(\delta)$ is proved. The simulations were carried out for the de Moivre model with the limiting age 100 years. In this case,

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{\delta(\omega - x) - 1 + e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta^2(\omega - x)},$$

the present value of the whole continuous life annuity for a person at the age x = 45 years, by $\delta = 0.09531$ and monthly payments in the size of 1000 rubles, is equal to

$$12000 \cdot \bar{a}_{45}(0.09531) = 12000 \cdot 8{,}501 = 102012 \text{ rub.}$$

The simulations show that the empirical mean square errors of life annuity estimates decrease when the sample size N increases.

REFERENCES

1. Falin G.I. *Matematicheskie osnovy teorii strakhovaniya zhizni i pensionnykh skhem* [Mathematical Foundations of the Theory of Life Insurance and Pension Schemes]. Moscow: Ankil Publ., 2002. 262 p.
2. Koshkin G.M, Lopukhin Ya.N. Otsenivanie netto-premiy v modelyakh dolgosrochnogo strakhovaniya zhizni [Estimation of net premiums in the models of long-term life insurance]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2003, vol. 10, issue 2, pp. 315-329.
3. Koshkin G.M. Momenty otkloneniy otsenki podstanovki i ee kusochno-gladkikh approksimatsiy [Moments of deviations of substitution estimate and its piecewise-smoothed approximations]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 604-618.
4. Koshkin G.M. *Vvedenie v matematiku strakhovaniya zhizni* [Introduction to Mathematics of Life Insurance]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2004. 112 p.
5. Koshkin G.M., Lankina N.V. Neparametricheskoe otsenivanie netto-premiy dlya smeshannogo strakhovaniya zhizni [Nonparametric estimation of net premiums for the mixed life insurance]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2009, vol. 314, no. 5, pp. 236-240.