ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (30)

УДК 519.21

Л.А. Нежельская

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ МОДУЛИРОВАННОГО MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ И УСЛОВИЯ РЕКУРРЕНТНОСТИ ПОТОКА

Изучается модулированный MAP-поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков событий в цифровых сетях интегрального обслуживания (ISDN). Приводятся явный вид плотности вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока, а также явный вид совместной плотности вероятностей длительности двух соседних интервалов. Рассматриваются условия рекуррентности потока.
Ключевые слова: модулированный MAP-поток событий; инфинитезимальные характеристики; плотность вероятностей; совместная плотность вероятностей; рекуррентность потока.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий во многом определило важную сферу приложений теории массового обслуживания − проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, телекоммуникационных сетей, которые называют цифровыми сетями интегрального обслуживания – Integrated Service Digital Networks (ISDN). Всё это послужило стимулом к созданию адекватных математических моделей реальных информационных потоков, функционирующих в ISDN, так называемых дважды стохастических потоков событий. В работе [1] дважды стохастический поток определяется как случайный поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков впервые введен в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в статьях [2–4]. В [2, 3] данные потоки названы MC (Markov chain)-потоками; в [4] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Последние начиная с конца 1980-х гг. носят название MAP (Markovian arrival process)-потоков событий. MAP-потоки событий наиболее характерны при описании информационных потоков в реальных телекоммуникационных сетях [5]. В зависимости от смены состояний MC-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [6–11]; 2) асинхронные и обобщённые асинхронные потоки событий [12–17]; 3) полусинхронные и обобщённые полусинхронные потоки событий [18–23]. В [24] введены в рассмотрение MAP-потоки событий первого порядка (собственно MAP-потоки, введенные в [4]) и MAP-потоки событий второго порядка (синхронизированная суперпозиция двух MAP-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [24] показано, что синхронный MC-поток является частным случаем MAP-потока первого порядка; асинхронный, обобщённый асинхронный, полусинхронный и обобщённый полусинхронный MC-потоки являются частным случаем MAP-потока второго порядка.

Режим функционирования системы массового обслуживания непосредственно зависит от параметров MC (MAP)-потока и состояний, в которых находится поток. В реальных ситуациях параметры входящих потоков событий, как правило, неизвестны, либо частично известны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого важными задачами являются задачи оценки в произвольный момент времени состояний [14, 17, 19, 23, 25] и параметров [6–12, 16, 18, 20–22] потока по наблюдениям за этим потоком.

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока необходимо знать вероятностные свойства потока [13, 15, 26]. В настоящей статье рассматривается модулированный MAP-поток событий (относится к классу MAP-потоков событий второго порядка), введённый в работах [27–29] и являющийся обобщением MAP-потока первого порядка [24, 25]. Находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный MAP-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1>\lambda_2\geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии зависит от двух случайных величин: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(1)}(t)=1-e^{-\alpha_i t}$, $i = 1,2$; в момент окончания i-го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью единица из i-го состояния в j-е, $i, j = 1,2$ ($i\neq j$); 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(2)}(t)=1-e^{-\lambda_i t}$, $i = 1,2$; в момент окончания i-го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ в j-е состояние ($i \neq j$) с наступлением события, либо с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ переходит в j-е состояние ($i \neq j$) без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i|\lambda_i)$ переходит в i-е состояние с наступлением события. При этом $P_0(\lambda_j|\lambda_i)+ P_1(\lambda_j|\lambda_i)+ P_1(\lambda_i|\lambda_i) = 1$. Случайные величины являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ примут вид

$$D_0=\begin{Vmatrix} -(\alpha_1+\lambda_1) & \alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) \\ \alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -(\alpha_2+\lambda_2) \end{Vmatrix},\ D_1=\begin{Vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком [3]. Заметим, что в приведённом определении модулированного MAP-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое). Отметим, что в реальных потоках событий, моделями которых являются модулированные MAP-потоки, событие потока (в момент окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$) наступает с полной определённостью в первом или во втором состоянии процесса $\lambda(t)$. В данной статье при получении формул для плотностей вероятностей данное обстоятельство является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j, $i,j = 1,2$, происходят мгновенно. Вариант возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1 и λ_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2,\ldots$ – моменты наступления событий потока.

Процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаемый, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \ldots$. Рассматривается стационарный режим функционирования потока. В силу предпосылок в моменты времени наступления событий $t_1, t_2,\ldots, t_k,\ldots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, т.е. модулированный MAP-поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k – момента наступления события потока, $k = 1,2,\ldots$.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1}-t_k$, $k = 1,2,\ldots,$ – значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau\geq 0$, для любого k. В силу этого момент времени t_k наступления события без ограничения общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Пусть (t_k,t_{k+1}), (t_{k+1},t_{k+2}) – два смежных интервала, длительности которых есть $\tau_k = t_{k+1}-t_k$ и $\tau_{k+1} = t_{k+2}-t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1,t_2), (t_2,t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2-t_1$ и $\tau_2 = t_3-t_2$; $\tau_1\geq 0$, $\tau_2\geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\geq 0$, $\tau_2\geq 0$.

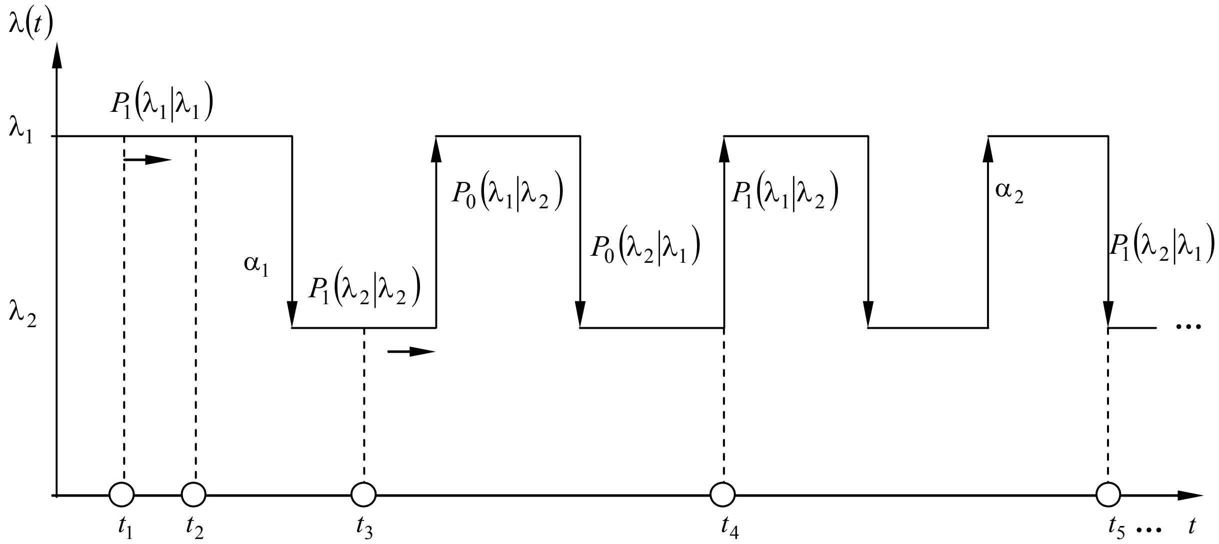

Рис. 1. Модулированный MAP-поток событий

Задача заключается в нахождении явного вида $p(\tau)$ и явного вида $p(\tau_1,\tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности модулированного MAP-потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p(\tau)$

Введём в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0,\tau)$ нет событий модулированного MAP-потока и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, $i,j = 1,2$. Тогда для указанных вероятностей справедливы следующие системы дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} p'_{11}(\tau) = -(\alpha_1+\lambda_1)p_{11}(\tau) + (\alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2))p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) = (\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1))p_{11}(\tau) - (\alpha_2+\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ p_{11}(0)=1,\ p_{12}(0)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_{22}(\tau) = -(\alpha_2+\lambda_2)p_{22}(\tau) + (\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1))p_{21}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) = (\alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2))p_{22}(\tau) - (\alpha_1+\lambda_1)p_{21}(\tau), \\ p_{22}(0)=1,\ p_{21}(0)=0. \end{cases}$$

Решая записанные системы, находим вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1,2$, в виде

$$p_{11}(\tau) = \frac{1}{z_2-z_1}\left[(\lambda_2+\alpha_2-z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2+\alpha_2-z_2)e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)}{z_2-z_1}\left[e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{22}(\tau) = \frac{1}{z_2-z_1}\left[(\lambda_1+\alpha_1-z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_1+\alpha_1-z_2)e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)}{z_2-z_1}\left[e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}\right],$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4(\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2))}\right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2\right)+\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\left(\alpha_1+\lambda_1 P_0\left(\lambda_2\,|\,\lambda_1\right)\right)\left(\alpha_2+\lambda_2 P_0\left(\lambda_1\,|\,\lambda_2\right)\right)}\right], \qquad (1)$$

$$0 < z_1 < z_2 .$$

С учётом определения модулированного MAP-потока введём $p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий потока на интервале $(0,\tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ перешёл на этом интервале из первого состояния в первое, на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ произошло окончание первого состояния процесса $\lambda(\tau)$ и процесс $\lambda(\tau)$ на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ перешёл из первого состояния в первое с наступлением события потока. Аналогичные совместные вероятности примут вид

$$p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau), \quad p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau),$$
$$p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau), \quad p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau),$$
$$p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau), \quad p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau),$$
$$p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau).$$

Тогда соответствующие плотности вероятностей запишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau), \quad \tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{12}^{(1)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau), \quad \tilde{p}_{12}^{(2)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau), \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{22}^{(1)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau), \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau).$$

Очевидно, что плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0,\tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдёт на этом интервале из состояния i в состояние j $(i, j = 1,2)$, запишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau)+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{12}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau)+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{21}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau)+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau),$$
$$\tilde{p}_{22}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau)+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau). \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем выражения для плотностей вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в явном виде.

Поскольку τ – произвольный момент времени, то p_{ij} – вероятности перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния i в состояние j $(i, j = 1, 2)$ за время, которое пройдёт от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определятся в виде

$$p_{11}=\int_0^\infty \tilde{p}_{11}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau,$$
$$p_{12}=\int_0^\infty \tilde{p}_{12}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau,$$
$$p_{21}=\int_0^\infty \tilde{p}_{21}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau,$$
$$p_{22}=\int_0^\infty \tilde{p}_{22}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

Подставляя (1) в (3), находим

$$p_{11}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\left(\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)\right)\right],$$
$$p_{12}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\left(\alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)\right)\right],$$
$$p_{21}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\left(\alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)\right)\right],$$

$$p_{22}=\left(z_1z_2\right)^{-1}\left[\lambda_2P_1\left(\lambda_2|\lambda_2\right)\left(\lambda_1+\alpha_1\right)+\lambda_1P_1\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\left(\alpha_2+\lambda_2P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right)\right],$$

$$z_1z_2=\left(\lambda_1+\alpha_1\right)\left(\lambda_2+\alpha_2\right)-\left(\alpha_1+\lambda_1P_0\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right)\left(\alpha_2+\lambda_2P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right). \quad (4)$$

Введём в рассмотрение $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1,2$ ($\pi_1(0)+\pi_2(0)=1$). Тогда, так как $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0)$ справедливы следующие уравнения:

$$\pi_1(0)=p_{11}\pi_1(0)+p_{21}\pi_2(0),\quad \pi_2(0)=p_{12}\pi_1(0)+p_{22}\pi_2(0), \quad (5)$$

где переходные вероятности p_{ij} ($i, j = 1, 2$) определены формулами (4).
Подставляя (4) в (5), получаем

$$\begin{aligned}\pi_1(0)&=\left\{\lambda_2P_1\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\left(\lambda_1+\alpha_1\right)+\lambda_1P_1\left(\lambda_1|\lambda_1\right)\left(\alpha_2+\lambda_2P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right)\right\}\left\{\lambda_1P_1\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\left(\lambda_2+\alpha_2\right)+\right.\\&\left.+\lambda_2P_1\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\left(\lambda_1+\alpha_1\right)+\lambda_1P_1\left(\lambda_1|\lambda_1\right)\left(\alpha_2+\lambda_2P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right)+\lambda_2P_1\left(\lambda_2|\lambda_2\right)\left(\alpha_1+\lambda_1P_0\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right)\right\}^{-1},\\\pi_2(0)&=\left\{\lambda_1P_1\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\left(\lambda_2+\alpha_2\right)+\lambda_2P_1\left(\lambda_2|\lambda_2\right)\left(\alpha_1+\lambda_1P_0\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right)\right\}\left\{\lambda_1P_1\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\left(\lambda_2+\alpha_2\right)+\right.\\&\left.+\lambda_2P_1\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\left(\lambda_1+\alpha_1\right)+\lambda_1P_1\left(\lambda_1|\lambda_1\right)\left(\alpha_2+\lambda_2P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right)+\lambda_2P_1\left(\lambda_2|\lambda_2\right)\left(\alpha_1+\lambda_1P_0\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right)\right\}^{-1}.\end{aligned} \quad (6)$$

Плотность вероятностей $p(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями в модулированном MAP-потоке примет вид

$$p(\tau)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tilde{p}_{ij}(\tau),\quad \tau\geq 0. \quad (7)$$

Подставляя в (7) сначала (2), затем (1) и (6) и проделывая достаточно трудоёмкие преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau)=\gamma z_1e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau},\quad \tau\geq 0,$$

$$\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\left\{z_2-\lambda_1\pi_1(0)\left[1-P_0\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right]-\lambda_2\pi_2(0)\left[1-P_0\left(\lambda_1|\lambda_2\right)\right]\right\}, \quad (8)$$

где z_1 и z_2 определены в (1), $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ определены в (6). Положив в z_1 и z_2 параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получаем плотность вероятностей $p(\tau)$ для MAP-потока [26].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p\ (\tau_1,\tau_2)$

В моменты времени наступления событий $t_1, t_2,\dots, t_k,\dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, поэтому совместная плотность вероятностей значений длительности двух соседних интервалов $p\ (\tau_1,\tau_2)$ примет вид

$$p(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tilde{p}_{ij}(\tau_1)\sum_{k=1}^{2}\tilde{p}_{jk}(\tau_2), \quad (9)$$

где $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$ – плотности вероятностей, соответствующие переходным вероятностям $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{jk}(\tau_2)$ и вычисленные по формулам (2) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. Подставляя в (9) сначала $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$, затем $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{jk}(\tau_2)$, определённые формулами (1) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ и, наконец, $\pi_i(0)$, $i = 1,2$, определенные в (6), и проделывая необходимые достаточно трудоёмкие преобразования, находим

$$\begin{aligned}p(\tau_1,\tau_2)&=p(\tau_1)p(\tau_2)+\gamma(1-\gamma)\frac{\lambda_1\lambda_2}{z_1z_2}\left[P_1\left(\lambda_1|\lambda_1\right)P_1\left(\lambda_2|\lambda_2\right)-P_1\left(\lambda_1|\lambda_2\right)P_1\left(\lambda_2|\lambda_1\right)\right]\times\\&\times\left(z_1e^{-z_1\tau_1}-z_2e^{-z_2\tau_1}\right)\left(z_1e^{-z_1\tau_2}-z_2e^{-z_2\tau_2}\right),\quad \tau_1\geq 0,\tau_2\geq 0,\end{aligned} \quad (10)$$

где $p(\tau_1)$, $p(\tau_2)$, γ определены в (8) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$; z_1 и z_2 определены в (1).

Полагая в (10) параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим совместную плотность вероятностей $p\ (\tau_1,\tau_2)$ для MAP-потока событий [26].

4. Условия рекуррентности модулированного MAP-потока событий

Рассмотрим случаи, при которых модулированный MAP-поток событий становится рекуррентным. С учётом выражения (8) для γ и выражений (6) для $\pi_i(0)$, $i = 1,2$, находим

$$\gamma(1-\gamma)=\frac{z_1 z_2}{(z_2-z_1)^2}\Big(\lambda_1\big[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)\big]-\lambda_2\big[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)\big]\Big)\times$$
$$\times\Big\{\pi_1(0)\Big(\lambda_1\big[1-P_1(\lambda_1|\lambda_1)\big]+\alpha_1\Big)-\pi_2(0)\Big(\lambda_2\big[1-P_1(\lambda_2|\lambda_2)\big]+\alpha_2\Big)\Big\}\times \tag{11}$$
$$\times\Big\{\lambda_1\big[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)\big]\Big(\lambda_2\big[1-P_1(\lambda_2|\lambda_2)\big]+\alpha_2\Big)+\lambda_2\big[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)\big]\Big(\lambda_1\big[1-P_1(\lambda_1|\lambda_1)\big]+\alpha_1\Big)\Big\}^{-1}.$$

Анализируя выражение для $\gamma(1-\gamma)$, замечаем:

1) если $\lambda_1[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)]-\lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)]=0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$; подставляя указанные условия в выражение (1) для z_1, находим $z_1=\lambda_1[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$ либо $z_1=\lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$; при этом из (8) следует, что $\gamma = 1$ и $p(\tau_i)=z_1 e^{-z_1\tau_i}$, $\tau_i\geq 0$, $i = 1,2$, или $p(\tau)=z_1 e^{-z_1\tau}$, $\tau\geq 0$;

2) если $\pi_1(0)(\lambda_1[1-P_1(\lambda_1|\lambda_1)]+\alpha_1)-\pi_2(0)(\lambda_2[1-P_1(\lambda_2|\lambda_2)]+\alpha_2)=0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. При этом из (1) следует, что

$$z_1=\frac{\lambda_1\lambda_2[P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)]+\lambda_1\alpha_2P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)+\lambda_2\alpha_1P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_2)}{\lambda_2[1-P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)]+\alpha_2}$$

либо

$$z_1=\frac{\lambda_1\lambda_2[P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)]+\lambda_1\alpha_2P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+\lambda_2\alpha_1P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)}{\lambda_1[1-P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)]+\alpha_1}, \tag{12}$$

и из (8) находим $\gamma = 1$ и $p(\tau_i)=z_1e^{-z_1\tau_i}$, $\tau_i\geq 0$, $i = 1,2$, т.е. $p(\tau)=z_1e^{-z_1\tau}$, $\tau\geq 0$.

Из выражения (10) для совместной плотности вероятностей $p(\tau_1,\tau_2)$ следует третье условие её факторизации: $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2)-P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)=0$. Тогда из (6) в результате необходимых преобразований находим

$$\pi_1(0)=\frac{P_1(\lambda_1|\lambda_1)}{P_1(\lambda_1|\lambda_1)+P_1(\lambda_2|\lambda_1)}\quad \text{либо}\quad \pi_1(0)=\frac{P_1(\lambda_1|\lambda_2)}{P_1(\lambda_1|\lambda_2)+P_1(\lambda_2|\lambda_2)},$$
$$\pi_2(0)=\frac{P_1(\lambda_2|\lambda_1)}{P_1(\lambda_1|\lambda_1)+P_1(\lambda_2|\lambda_1)}\quad \text{либо}\quad \pi_1(0)=\frac{P_1(\lambda_2|\lambda_2)}{P_1(\lambda_1|\lambda_2)+P_1(\lambda_2|\lambda_2)}.$$

Тогда из (8) следует

$$\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\{z_2-\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)-\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)\},$$
$$1-\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\{-z_1+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)\}$$

и $p(\tau_i)=\gamma z_1e^{-z_1\tau_i}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau_i}$, $\tau_i\geq 0$, $i = 1,2$, т.е. $p(\tau)=\gamma z_1e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau}$, $\tau\geq 0$.

Если выполняется одно из перечисленных условий, то тогда модулированный MAP-поток событий будет рекуррентным потоком. Действительно, пусть $p(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей значений длительностей интервалов $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k+1}$, где $\tau_k = t_{k+1}-t_k$, $k = 1,2, \ldots$. Для $k = 1$ имеет место $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)\, p(\tau_2)$. Докажем факторизацию плотности $p(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)$ методом математической индукции. Пусть $p(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k) = p(\tau_1) \ldots p(\tau_k)$. Так как в моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \ldots, t_k$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, $k = 1,2, \ldots$, образует вложенную цепь Маркова, то дальнейшее после момента t_k поведение потока не зависит от предыстории. Тогда $p(\tau_1,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1}) = p(\tau_{k+1}|\tau_1,\ldots,\tau_k)p(\tau_1,\ldots,\tau_k) = p(\tau_{k+1}|\tau_k)p(\tau_1,\ldots,\tau_k)$. Здесь $p(\tau_{k+1}|\tau_k) = p(\tau_k,\tau_{k+1})|p(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов (t_k,t_{k+1}),

(t_{k+1},t_{k+2}), $k = 1,2,\ldots$, расположенных на временной оси произвольно, справедливо $p(\tau_k,\tau_{k+1}) = p(\tau_k)p(\tau_{k+1})$, то $p(\tau_{k+1}|\tau_k) = p(\tau_{k+1})$. Таким образом, $p(\tau_1,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1}) = p(\tau_{k+1})p(\tau_1,\ldots\tau_k)$ или $p(\tau_1,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1}) = p(\tau_1)p(\tau_2)\ldots p(\tau_{k+1})$.

При обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, приведённых в [28, 29].

Для первого условия факторизации $\lambda_1[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)] = \lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k+0) = \frac{[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)]w(\lambda_1 \mid t_k - 0) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{\lambda_2[1-P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]}.$$

Таким образом, апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ (несмотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau) = z_1 e^{-z_1\tau}$) зависит от предыстории, т.е. от значений апостериорной вероятности $w(\lambda_1|t)$ в моменты наступления событий t_1, t_2, …, t_k. Если ввести дополнительное условие $\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) = \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)$, то

$$w(\lambda_1 \mid t_k+0) = \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{1-P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

т.е. апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ не будет зависеть от предыстории, а будет определяться лишь её значением в момент наступления события потока. Это значение апостериорной вероятности одинаково для всех моментов времени t_k наступления событий потока, $k = 1,2,\ldots$. Итак, при дополнительном ограничении имеется некоторая близость модулированного MAP-потока событий к простейшему потоку.

Для второго условия факторизации $\pi_1(0)\left(\lambda_1\left[1-P_1(\lambda_1|\lambda_1)\right]+\alpha_1\right)-\pi_2(0)\left(\lambda_2\left[1-P_1(\lambda_2|\lambda_2)\right]+\alpha_2\right)=0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k также будет зависеть от предыстории, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность экспоненциальная: $p(\tau) = z_1 e^{-z_1\tau}$, $\tau \geq 0$.

Для третьего условия факторизации $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k+0) = \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)} = \pi_1(0), \quad k = 1,2,\ldots .$$

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1|t)$ не зависит от предыстории, а определяется лишь её (апостериорной вероятности) значением в момент наступления события потока. Итак, в данной ситуации имеется некоторая близость модулированного MAP-потока событий к простейшему потоку в том смысле, что апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий потока принимает постоянное значение.

Заключение

Полученные результаты можно использовать для решения задачи оценивания неизвестных параметров модулированного MAP-потока событий, таких как интенсивности λ_1, λ_2 и вероятности $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = 1, 2$. При этом, например, для нахождения оценок, после построения соответствующей функции правдоподобия, можно воспользоваться методом максимального правдоподобия либо применить метод моментов, решив соответствующие системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingman J.F.C.* On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923−930.
2. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 6. С. 92–99.
3. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.

6. *Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
7. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
8. *Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9 (II). С. 129–138.
9. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
10. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 24–29.
11. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika. 1995. V. 40, No. 7–8. P. 6–10.
12. *Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
13. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
14. *Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
15. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
16. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание параметров асинхронного потока с инициированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
17. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko, T.I.* Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
18. *Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оценка длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
19. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщённого полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
20. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мёртвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
21. *Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A.* Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
22. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1 (I). С. 18–23.
23. *Нежельская Л.А.* Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С.95–98.
24. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
25. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A.* Optimal state estimation in map event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
26. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов МАР-потока событий и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 32–41.
27. *Нежельская Л.А.* Апостериорные вероятности состояний модулированного МАР-потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 95–96.
28. *Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний модулированного МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мёртвого времени // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014) : материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 193–198.
29. *Nezhel'skaya L.A.* Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unexendable Dead Time // Communications in Computer and Information Sciences : proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov «Information Technologies and Mathematical Modeling» (November 20-22, 2014). Cham Heidelberg ; New York ; Dordrecht ; London : Springer, 2014. P. 342–350.

Нежельская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук. E-mail: ludne@mail.ru
Томский государственный университет
Поступила в редакцию 15 ноября 2014 г.

Nezhelskaya Luydmila A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Joint probability density of the intervals duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions.

Keywords: modulated MAP event flows; infinitesimal characteristics; probability density; joint probability density; flow recurrence conditions.

Consider a modulated MAP flow of events with the intensity represented by a piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: $\lambda(t)=\lambda_1$ or $\lambda(t)=\lambda_2$ ($\lambda_1>\lambda_2\geq 0$). The time when the process $\lambda(t)$ remains at the i th, i = 1,2, state depends on two random values: 1) the first random value has the exponential distribution function $F_i^{(1)}(t)=1-e^{-\alpha_i t}$, i = 1,2; when the i th state ends, process $\lambda(t)$ transits with the probability equal one from the i th state to the j th, i = 1,2, $(i\neq j)$; 2) the second random value has the exponential distribution function $F_i^{(2)}(t)=1-e^{-\lambda_i t}$, i = 1,2; when the i th state ends, process $\lambda(t)$ transits with probability $P_1(\lambda_j\mid\lambda_i)$ from the i th state to the j th $(i\neq j)$ and a flow event occurs or process $\lambda(t)$ transits with probability $P_0(\lambda_j\mid\lambda_i)$ from the i th state to the j th $(i\neq j)$, but the flow event does not occur, or process $\lambda(t)$ transits from the i th state to the i th with probability $P_1(\lambda_i\mid\lambda_i)$ and a flow event occurs. Here, $P_1(\lambda_j\mid\lambda_i)+P_0(\lambda_j\mid\lambda_i)+P_1(\lambda_i\mid\lambda_i)=1$; i = 1,2, $i\neq j$.

The first and the second random values are independent from each other. Under these assumptions, $\lambda(t)$ is a Markov process. The infinitesimal characteristics matrices for the process $\lambda(t)$ are as follows:

$$\mathbf{D}_0=\begin{Vmatrix}-(\alpha_1+\lambda_1) & \alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2\mid\lambda_1)\\ \alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2) & -(\alpha_2+\lambda_2)\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1=\begin{Vmatrix}\lambda_1P_1(\lambda_1\mid\lambda_1) & \lambda_1P_1(\lambda_2\mid\lambda_1)\\ \lambda_2P_1(\lambda_1\mid\lambda_2) & \lambda_2P_1(\lambda_2\mid\lambda_2)\end{Vmatrix}.$$

We consider the stationary operation mode for the flow. Denote by $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, k = 1,2,… the value of interval k duration between the neighboring flow events. We may take that the probability density of the interval k duration is $p(\tau_k)=p(\tau)$, $\tau\geq 0$, for any k. Then, we can let $t_k=0$ without loss of generality, i.e., the moment of the event occurrence is $\tau=0$. Now, let (t_k,t_{k+1}), (t_{k+1},t_{k+2}) be the neighboring intervals with the corresponding duration values $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $\tau_{k+1}=t_{k+2}-t_{k+1}$. Due to the stationary of the flow, the arrangement of the intervals on a time axis is arbitrarily. That is way, we may consider the neighboring intervals (t_1,t_2), (t_2,t_3) with the corresponding duration values $\tau_1=t_2-t_1$, $\tau_2=t_3-t_2$; $\tau_1\geq 0$, $\tau_2\geq 0$. Here $\tau_1=0$ corresponds to the moment t_1 and $\tau_2=0$ corresponds to the time moment t_2 when the next event in the flow occurs. The respective joint probability density is defined as $p(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\geq 0$, $\tau_2\geq 0$.

The aim of this article is to obtain the explicit form of the probability density $p(\tau)$ and the joint probability $p(\tau_1,\tau_2)$ and then to formulate the conditions of the flow recurrence. These formulas are obtained and are as follows:

$$p(\tau)=\gamma z_1e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau},\quad \tau\geq 0,$$

$$\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\left\{z_2-\lambda_1\pi_1(0)\left[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)\right]-\lambda_2\pi_2(0)\left[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)\right]\right\},$$

$$z_1=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2\mid\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2))}\right],$$

$$z_2=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)+\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2\mid\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2))}\right],\ 0<z_1<z_2,$$

$$\pi_1(0)=\{\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))\}\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+$$
$$+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}^{-1},$$

$$\pi_2(0)=\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+$$
$$+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}^{-1}.$$

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)p(\tau_2)+\gamma(1-\gamma)\frac{\lambda_1\lambda_2}{z_1z_2}\left[P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2)-P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)\right]\times$$
$$\times\left(z_1e^{-z_1\tau_1}-z_2e^{-z_2\tau_1}\right)\left(z_1e^{-z_1\tau_2}-z_2e^{-z_2\tau_2}\right),\qquad \tau_1\geq 0,\tau_2\geq 0.$$

REFERENCES

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of Cambridge Phylosophical Society*, 1964, vol. 60, no. 4, pp. 923-930.
2. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1980, no. 6, pp. 92-99.

3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1980, no. 1, pp. 55-61.
4. Neuts M.F. A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
5. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU Publ., 2000. 175 p.
6. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 9, pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
7. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika*, 2004, no. 10, pp. 8-16.
8. Vasilevskaya T.P., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of the synchronous alternative flow with displaying or no displaying of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2004, no. 9 (II), pp. 129-138. (In Russian).
9. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vre¬meni i parametrov sinkhronnogo al'terni¬ruyushchego potoka sobytiy [Estimation of the dead-time period and parameters of the synchronous alternative flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2003, no. 6, pp. 232-239.
10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events by the moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2002, no. 1(I), pp. 24-29.
11. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika*, 1995, vol. 40, no. 7-8, pp. 6-10.
12. Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. Maximum-likelihood estimation of the dead time in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2013, no. 2 (23), pp. 54-63. (In Russian).
13. Gortsev A.M., Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. Joint probability density of the intervals duration for generalized asynchronous flow of events with unextendable dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal,* 2012, no. 4 (21), pp. 14-25. (In Russian).
14. Leonova M.A., Nezhel'skaya L.A. The probability of wrong decision in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal,* 2012, no. 2 (19), pp. 88-101. (In Russian).
15. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
16. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsiirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the asynchronous flow with initiation of superfluous events by moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2006, no. 18, pp. 267-273.
17. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A., Shevchenko, T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*, 1993, vol. 36, no. 12, pp. 1153-1167.
18. Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. [Estimation of the dead time duration in a generalized semi-synchronous flow of events]. *Materialy konferentsii "Novye informatsionnye teknologii v issledovanii slozhnykh struktur"* [Proceedings of the 10th Russian conference with international participation "Novel information technologies for studying complex structures"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pp. 96-97. (In Russian).
19. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation for a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaya tekhnika I informatika − Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2 (11), pp. 66-81. (In Russian).
20. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 31-41. (In Russian).
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
22. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the semi-synchronous double stochastic flow of events by moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaya tekhnika I informatika − Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2002, no. 1 (I), pp. 18-23.
23. Nezhel'skaya L.A. Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of the semi-synchronous flow of events under incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*, 2000, no. 269, pp.95-98.
24. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaya tekhnika I informatika − Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1 (14), pp. 13-21. (In Russian).
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in map event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
26. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. The join density of probability intervals MAP of the flow of events and condition of its recurrence. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaya tekhnika I informatika − Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 3 (20), pp. 32-41. (In Russian).

27. Nezhel'skaya L.A. [Optimal state estimation for a modulated MAP events flow with unextendable dead time]. *Materialy XIII mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Informatsionnye teknologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM)"* [Proceedings of the 13th International scientific conference named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pt. 2, pp. 193-198. (In Russian).
28. Nezhel'skaya L.A. [Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unexendable Dead Time]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014): materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Proceedings of the 13th International scientific conference named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2014, pt. 2, pp. 193-198. (In Russian).
29. Nezhel'skaya, L.A. [Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unexendable Dead Time]. *Communications in Computer and Information Sciences: Proceedings of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F. Terpugov "Information Technologies and Mathematical Modeling"*. Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer, 2014, pp. 342-350.