УДК 517.957 DOI 10.17223/19988621/33/2

И.В. Рахмелевич

О ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

Рассматривается класс двумерных нелинейных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции, при этом используется метод функционального разделения переменных. Найдены решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Проанализированы решения при регулярных и особых значениях параметров, характеризующих нелинейность.

Ключевые слова: *нелинейное гиперболическое уравнение, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.*

В современной теории уравнений в частных производных существенное место занимает анализ нелинейных гиперболических уравнений и методов их точного интегрирования [1–3]. С точки зрения общности результатов серьезный интерес представляют исследования классов нелинейных уравнений, содержащих произвольные функции [3]. Одним из наиболее эффективных методов исследования нелинейных уравнений остается метод разделения переменных. В работах [3, 4] подробно изложены основы метода и его современные варианты (обобщенное и функциональное разделение переменных). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, в работах [5, 6] методом разделения переменных исследованы некоторые многомерные уравнения, содержащие однородные и мультиоднородные функции от частных производных. В [7–9] с помощью данного метода были получены решения некоторых нелинейных эллиптических и гиперболических уравнений. В настоящей работе этот метод применяется для построения решений двумерных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным с произвольными показателями и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции.

1. Постановка задачи. Решения типа бегущей волны

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение следующего вида относительно неизвестной функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}. \qquad (1)$$

Здесь $g(u)$ – некоторая заданная функция, β_1, β_2 – вещественные параметры. В частном случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ уравнение (1) переходит в нелинейное волновое уравнение, сводящееся путем замены переменных к нелинейному уравнению Клейна – Гордона. В случае $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$, $g(u) = \text{const}$ (1) переходит в уравнение Гурса [3].

Так как уравнение (1) не содержит явно независимых переменных, то оно допускает решение типа бегущей волны:

$$u(x,y)=U(z)\,,\ z=c_1x+c_2y\,, \tag{2}$$

где c_1,c_2 – некоторые постоянные. Подставив решение (2) в уравнение (1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции $U(z)$:

$$U''(z)=c_1^{\beta_1-1}c_2^{\beta_2-1}g(U)\left(U'(z)\right)^{\beta_1+\beta_2}. \tag{3}$$

Проанализируем решения уравнения (3) в зависимости от значений параметров β_1,β_2, характеризующих нелинейность.

Случай 1. $\beta_1+\beta_2\neq 2$.

Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$\left(U'(z)\right)^{1-(\beta_1+\beta_2)}U''(z)=C_0\frac{d}{dz}G\left(U(z)\right), \tag{4}$$

где $C_0=c_1^{\beta_1-1}c_2^{\beta_2-1}$, $G(U)=\int g(U)dU.$ Уравнение (4) сводится к уравнению первого порядка:

$$\frac{[U'(z)]^{\nu}}{\nu}=C_0G(U)+A\,, \tag{5}$$

где $\nu=2-(\beta_1+\beta_2)$. Решение уравнения (5) в неявном виде запишется так:

$$z-z_0=\int\left[\nu(C_0G(U)+A)\right]^{-\frac{1}{\nu}}dU. \tag{6}$$

Здесь и далее A, z_0 – произвольные постоянные.

В частности, при $\beta_1+\beta_2=0$ получаем $\nu=2$ и решение (6) принимает вид

$$z-z_0=\int\frac{dU}{\sqrt{2(C_0G(U)+A)}}\,. \tag{6а}$$

При $\beta_1+\beta_2=1$ имеем $\nu=1$, а решение (6) приводится к следующему:

$$z-z_0=\int\frac{dU}{C_0G(U)+A}\,. \tag{6б}$$

Случай 2. $\beta_1+\beta_2=2$.

Понижая порядок уравнения (3), аналогично предыдущему случаю, нетрудно получить решение в неявном виде:

$$z-z_0=A\int\exp(-C_0G(U))\,dU\,. \tag{7}$$

Пример. Пусть $g(u)=g_0=\mathrm{const}$. Тогда для рассмотренных выше случаев 1 и 2 из формул (6), (7) находим

$$u(x,y)=(\nu C_0g_0)^{1/(\nu-1)}\left[\frac{\nu-1}{\nu}(c_1x+c_2y-z_0)\right]^{\nu/(\nu-1)}; \tag{8а}$$

$$u(x,y)=\exp\left[C_0g_0(c_1x+c_2y-z_0)\right]; \tag{8б}$$

$$u(x,y)=-\frac{1}{C_0 g_0}\ln(c_1 x+c_2 y-z_0)\,. \tag{8в}$$

Решения (8а), (8б), (8в) существуют при выполнении условий $\beta_1+\beta_2\ne 1,2$; $\beta_1+\beta_2=1$; $\beta_1+\beta_2=2$ соответственно.

Случай 3. $\beta_1=1$, $\beta_2\ne 1$.

Покажем, что в этом случае имеется решение в виде обобщенной бегущей волны:

$$u(x,y)=U(z)\,,\ z=X(x)+c_2 y\,. \tag{9}$$

Подставляя решение (9) в уравнение (1), находим, что функция $X(x)$ может быть произвольной, а $U(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$U''(z)=c_2^{\beta_2-1}g(U)\left(U'(z)\right)^{1+\beta_2}\,. \tag{10}$$

Уравнение (10) является частным случаем (3), если положить в последнем $\beta_1=1$. В случае $\beta_1\ne 1$, $\beta_2=1$ имеется решение аналогичное (9), но в этом случае $z=c_1 x+Y(y)$.

Случай 4. $\beta_1=1$, $\beta_2=1$.

В этом случае, как нетрудно проверить, решение зависит от двух произвольных функций $X(x),Y(y)$:

$$u(x,y)=U(z)\,,\ z=X(x)+Y(y)\,,$$

причем функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$U''(z)=g(U)\left(U'(z)\right)^2\,.$$

Его решение определяется выражением (7), в котором необходимо положить $C_0=1$.

2. Автомодельные решения

Для нахождения других (в частности, автомодельных) решений удобно использовать функциональное разделение переменных [3, 4, 9] мультипликативного типа. Тогда решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(x,y)=U(z)\,; \tag{11}$$

$$z=X(x)Y(y)\,, \tag{11а}$$

где $U(z),X(x),Y(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем. Подставляя (11), (11а) в уравнение (1), после несложных преобразований получаем следующее:

$$\Phi(z)=(X'(x))^{\beta_1-1}(X(x))^{\beta_2}(Y'(y))^{\beta_2-1}(Y(y))^{\beta_1}\,, \tag{12}$$

где

$$\Phi(z)\equiv\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{\beta_1+\beta_2}}\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)\,. \tag{12а}$$

Правая часть уравнения (12) представляет собой произведение функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y. Поэтому, прологарифмировав уравнение (12) и затем дважды продифференцировав по x и по y, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \Phi(z) = 0 . \tag{13}$$

Выполнив дифференцирование в левой части (13) с учетом (11а), преобразуем это уравнение к виду

$$X'(x)Y'(y)(\Psi(z) + z\Psi'(z)) = 0 , \tag{14}$$

где $\Psi(z) \equiv \Phi'(z)/\Phi(z)$. Предполагаем, что искомое решение (11) существенно зависит от обеих переменных x, y, т.е. $X(x) \neq \text{const}$, $Y(y) \neq \text{const}$. Тогда (14) сводится к уравнению

$$\Psi(z) + z\Psi'(z) = 0 . \tag{15}$$

Решая уравнение (15) и возвращаясь к функции $\Phi(z)$, находим

$$\Phi(z) = C_0 z^{\lambda} , \tag{16}$$

где C_0, λ – произвольные постоянные. Из (16) и (12а) следует, что функция $U(z)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{\beta_1+\beta_2}} \frac{d}{dz}\big(zU'(z)\big) = C_0 z^{\lambda} . \tag{17}$$

Далее, поскольку левая часть (12) является функцией z, то и правая часть может зависеть только от z. Отсюда, с учетом (16), следует

$$(X'(x))^{\beta_1-1}(X(x))^{\beta_2} = C_1 (X(x))^{\lambda} ; \tag{18}$$

$$(Y'(y))^{\beta_2-1}(Y(y))^{\beta_1} = C_2 (Y(y))^{\lambda} . \tag{19}$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, согласно (12) и (16), должны удовлетворять условию $C_1 C_2 = C_0$.

В результате решения уравнений (18) и (19) находим функции $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X(x) = \left(\frac{C_1^{1/(\beta_1-1)}}{\mu_1}(x + a_1) \right)^{\mu_1} , \; Y(y) = \left(\frac{C_2^{1/(\beta_2-1)}}{\mu_2}(y + a_2) \right)^{\mu_2} , \tag{20}$$

где a_1, a_2 – произвольные постоянные, а показатели μ_1, μ_2 определяются формулами

$$\mu_1 = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1)}, \quad \mu_2 = \frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1)} . \tag{21}$$

При $a_1 = a_2 = 0$ формулы (20) соответствуют автомодельному решению.

Таким образом, уравнение (1) имеет решение в виде (11), (11а), где функции $X(x), Y(y)$ определяются выражениями (20), (21), а функция $U(z)$ находится в результате решения уравнения (17). Из (20) и (21) следует, что указанное решение не существует, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\beta_1 = 1 , \;\; \beta_2 = 1 , \; \beta_1 + \beta_2 - (\lambda + 1) = 0 . \tag{22}$$

Особые случаи, для которых выполняется одно из условий (22), будут проанализированы в п.3.

Рассмотрим решение задачи для простейшего случая $g(u) = g_0 = \text{const}$, предполагая, что ни одно из равенств (22) не выполнено.

Тогда уравнение (17) можно переписать так:

$$\frac{1}{(zU'(z))^{\beta_1+\beta_2}}\frac{d}{dz}\big(zU'(z)\big) = g_0 C_0 z^{\lambda-(\beta_1+\beta_2)}. \tag{23}$$

В свою очередь, при решении уравнения (23) необходимо разделять следующие случаи:

а) $\beta_1 + \beta_2 \neq 1$. Тогда решение уравнения (23) имеет вид

$$U(z) = \nu^{1/\nu}\int\Big(\tilde{A}_0 z^{\lambda} + A_0 z^{-\nu}\Big)^{1/\nu} dz\,, \tag{24}$$

где $\nu = 1-(\beta_1+\beta_2)$, $\tilde{A}_0 = \dfrac{g_0 C_0}{(\lambda+1)-(\beta_1+\beta_2)}$.

б) $\beta_1 + \beta_2 = 1,\ \lambda \neq 0$. Тогда $U(z)$ определяется формулой

$$U(z) = \int \frac{A_0}{z}\exp\left(\frac{g_0 C_0}{\lambda} z^{\lambda}\right) dz\,. \tag{25}$$

В формулах (24) – (25) A_0, z_0 – произвольные постоянные.

3. Анализ особых случаев

Рассмотрим отдельно особые случаи, соответствующие выполнению одного из условий (22).

Случай 1. $\beta_1 = 1$, $\beta_2 \neq 1$.

Тогда уравнение (12) можно записать в виде

$$\Phi(z) = (X(x))^{\beta_2}(Y'(y))^{\beta_2-1}Y(y)\,. \tag{26}$$

Поскольку правая часть уравнения (26) должна зависеть только от z, то это уравнение может быть удовлетворено только в том случае, если $Y(y)$ является решением уравнения

$$(Y'(y))^{\beta_2-1}Y(y) = C_0 (Y(y))^{\beta_2}\,, \tag{27}$$

откуда следует, что $\lambda = \beta_2$. Решая уравнение (27), находим

$$Y(y) = a\exp(\mu y)\,, \tag{28}$$

где a, C_0 – произвольные постоянные, $\mu = C_0^{1/(\beta_2-1)}$. Из (12а), (26) и (27) следует уравнение для $U(z)$:

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^{1+\beta_2}}\frac{d}{dz}\big(zU'(z)\big) = C_0 z^{\beta_2}. \tag{29}$$

Уравнение (29) можно преобразовать к виду

$$\frac{d/dz\big(zU'(z)\big)}{\big(zU'(z)\big)^{\beta_2}} = C_0\, dG(U(z))/dz\,, \tag{30}$$

где
$$G(U)=\int g(U)\,dU\,. \tag{30a}$$

С помощью несложных преобразований уравнение (30) приводим к ОДУ 1-го порядка относительно $U(z)$:

$$\frac{1}{1-\beta_2}\left(zU'(z)\right)^{1-\beta_2}-C_0G(U(z))=A\,. \tag{31}$$

Далее, (31) сводится к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого в неявном виде запишется следующим образом:

$$z=z_0\exp\left\{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)^{\frac{1}{1-\beta_2}}\int\frac{dU}{(C_0G(U)+A)^{\frac{1}{1-\beta_2}}}\right\}. \tag{32}$$

Таким образом, в рассмотренном случае функции $U(z)$, $Y(y)$ определяются формулами (32) и (28) соответственно, а функция $X(x)$ является произвольной. Аналогично, в случае $\beta_1\neq 1$, $\beta_2=1$ функция $Y(y)$ является произвольной, $X(x)=a\exp(\mu x)$, а $U(z)$ определяется формулой (32) с заменой $\beta_2\to\beta_1$.

Случай 2. $\beta_1=1$, $\beta_2=1$.

В этом случае из (12) и (12a) получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{g(U(z))(U'(z))^2}\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=X(x)Y(y)\,. \tag{33}$$

Учитывая (11a) и (30a), преобразуем (33) к виду

$$\frac{1}{dG(U(z))/dz}\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=zU'(z)\,. \tag{34}$$

Из уравнения (34) получаем решение в неявном виде для функции $U(z)$:

$$z=z_0\exp\left\{A\int\exp(-G(U))dU\right\}. \tag{35}$$

Здесь z_0, A – произвольные постоянные. В данном случае обе функции $X(x), Y(y)$ являются произвольными.

Случай 3. $\beta_1+\beta_2-(\lambda+1)=0$.

Тогда из (17) с учетом (30a), получаем уравнение

$$\frac{1}{dG(U(z))/dz}\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=C_0\left(zU'(z)\right)^{\beta_1+\beta_2-1}. \tag{36}$$

а) $\beta_1+\beta_2\neq 2$.

Тогда, аналогично предыдущим случаям, решение уравнения (36) можно записать в неявном виде:

$$z=z_0\exp\left\{\left(\frac{1}{2-\beta_1-\beta_2}\right)^{\frac{1}{2-\beta_1-\beta_2}}\int\frac{dU}{(C_0G(U)+A)^{\frac{1}{2-\beta_1-\beta_2}}}\right\}. \tag{37}$$

б) $\beta_1+\beta_2=2, \lambda=1$.

В этом случае, аналогично (35), решение уравнения (36) запишется в виде

$$z=z_0\exp\left\{A\int\exp(-C_0G(U))dU\right\}. \tag{38}$$

Решая уравнения (18) и (19) с учетом третьего из условий (22), находим

$$X(x)=a\exp(C_1x), \quad Y(y)=b\exp(C_2y). \tag{39}$$

Итак, в данном случае функция $U(z)$ в неявном виде задается формулами (37) или (38), а функции $X(x), Y(y)$ – формулой (39).

Заключение

Таким образом, в данной работе исследован класс двумерных гиперболических уравнений, содержащих степенные нелинейности по производным с произвольными показателями и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции. С помощью метода функционального разделения переменных получены решения типа классической и обобщенной бегущей волны. Кроме того, при мультипликативном разделении переменных получены решения, зависящие от степенных и экспоненциальных функций от x, y, в том числе автомодельные решения, а также решения, содержащие произвольные функции этих переменных. Отдельно проанализированы решения при особых значениях параметров уравнения. Результаты могут быть обобщены на многомерные гиперболические уравнения со степенными нелинейностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жибер А.В.*, *Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // Успехи математических наук. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
2. *Кузнецова М.Н.* О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна – Гордона // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 3. С. 86–103.
3. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
4. *Полянин А.Д.*, *Журов А.И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике// Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С.606–611.
5. *Рахмелевич И.В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
6. *Рахмелевич И.В.* Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 42–50.
7. *Miller J. (Jr.)*, *Rubel L.A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // Journal of Physics A. 1993. V.26. P.1901–1913.
8. *Zhdanov R.Z.* Separation of variables in the non-linear wave equation // Journal of Physics A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
9. *Grundland A.M.*, *Infeld E.* A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33. No. 7. P. 2498–2503.

Статья поступила 10.12.2014 г.

Rakhmelevich I.V. ON TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH POWER-LAW NON-LINEARITY IN THE DERIVATIVES. DOI 10.17223/19988621/33/2

In recent years, extensive studies of nonlinear hyperbolic equations are carried out. Special attention is focused on equations of the Liouville type. However, of special interest is the study of nonlinear hyperbolic equations of a more general form, including those containing power-law nonlinearities in the derivatives. They are considered in this work.

To study two-dimensional nonlinear hyperbolic equations containing power-law nonlinearities in the derivatives and a nonlinearity of an arbitrary type of an unknown function, the method of functional separation of variables is applied.

For this class of equations, solutions of the traveling wave type and solutions depending on power and exponential functions of independent variables (in particular, self-similar solutions) were obtained, as well as solutions containing arbitrary functions of these variables. Solutions for regular and special values of parameters characterizing the nonlinearity have been obtained.

The obtained solutions are valid for a wide class of two-dimensional hyperbolic equations with a power-law nonlinearity in derivative. The results can be generalized for multidimensional nonlinear hyperbolic equations with power-law nonlinearities.

Keywords: nonlinear hyperbolic equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

REFERENCES

1. Zhiber A.V., Sokolov V.V. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 2001, vol. 56, no. 1, pp. 63–106. (in Russian)
2. Kuznetsova M.N. O nelineynykh giperbolicheskikh uravneniyakh, svyazannykh differentsial'nymi podstanovkami s uravneniem Kleyna – Gordona. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 86–103. (in Russian)
3. Polyanin A.D., Zaytsev V.F *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya*. Moskow, Fizmatlit Publ., 2002, 432 p. (in Russian)
4. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Obobshchennoe i funktsional'noe razdelenie peremennykh v matematicheskoy fizike i mekhanike. *Doklady RAN*, 2002, vol. 382, no. 5, pp. 606–611. (in Russian)
5. Rakhmelevich I.V. O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 3(23), pp. 37–44. (in Russian)
6. Rakhmelevich I.V. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, soderzhashchikh mul'tiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1(27), pp. 42–50. (in Russian)
7. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*, 1993. vol. 26, pp. 1901–1913.
8. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
9. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 1992, vol. 33, no. 7, pp. 2498–2503.