ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 1(33)

УДК 519.25 DOI 10.17223/19988621/33/3

И.Г. Устинова, Е.Г. Пахомова

СПЛАЙНОВАЯ ОЦЕНКА ТРЕНДА ВРЕМЕННОГО РЯДА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЧИСЛЕ ДАННЫХ В МОМЕНТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрена возможность выделения тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений сплайнами первого, второго и третьего порядков. Получены оценки коэффициентов сплайна в явном виде. Исследованы статистические характеристики полученных оценок.

Ключевые слова: *тренд временного ряда, сплайн первого, второго и третьего порядков, оценки параметров, статистические свойства оценок.*

Во многих задачах экономики, науки и техники приходится иметь дело с временными рядами. Наблюдаемые значения случайного процесса $y(t)$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N, \ldots$ образуют временной ряд. Одной из основных задач анализа временных рядов является задача выделения тренда [1] – систематической составляющей, так как выделенный тренд позволяет:

а) предсказывать будущее на основе знания прошлого;

б) управлять процессом, порождающим ряд;

в) описывать характерные особенности ряда [2].

Идея использовать сплайны в задаче выделения тренда временного ряда не нова. В классической теории временных рядов измерения процесса производят через равные промежутки времени, причем в каждый момент времени производится ровно одно наблюдение [2–6]. Однако возможна такая организация измерений процесса, когда число проводимых измерений случайно [7]. Особенно часто такие ситуации возникают в экономических системах, например на фондовом рынке. Это приводит к необходимости разработки теории анализа временных рядов для ситуации, когда в каждый момент времени число измерений случайно.

Заметим, что выделение тренда в виде полинома, порядок которого выше четырех, нецелесообразно, ибо при оценке коэффициентов полинома получается большая погрешность. С другой стороны, если количество наблюдений велико, полином невысокого порядка может неудовлетворительно описывать истинный тренд. Выход состоит в сплайновой оценке тренда временного ряда.

В данной работе строится теория выделения тренда временного ряда, когда число измерений в каждый момент времени случайно сплайнами первого, второго и третьего порядков. В этом состоит принципиальное отличие данного исследования от работ других авторов.

Постановка задачи

Пусть имеется временной ряд $\overline{y}(t) = \varphi(t) + \xi(t)$, являющийся суммой некоторой детерминированной функции $\varphi(t)$, которая является трендом процесса $\overline{y}(t)$, и $\xi(t)$ – случайной функции, наличие которой обусловлено ошибками измерений, внешними помехами и т.д. Предполагается, что помехи измерений $\xi_i = \xi(t_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $M[\xi_i] = 0$ и дисперсией $D[\xi_i] = \sigma^2$. Нам известна последовательность значений

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_N, \text{ где } \overline{y}_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + ... + y_{in_i}}{n_i}.$$

Здесь n_i – случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром λ.

Будем считать, что сами моменты времени t_i нам известны. Относительно тренда предполагается, что он представляет собой сплайн. В этом случае весь отрезок наблюдения $[\,0; T\,]$ разбивается на части одинаковой длины:

$$[\,0;\ T_0],\ [\,T_0;\ 2T_0\,],\ ...,[\,(k-1)T_0;\ kT_0\,].$$

На каждом таком отрезке тренд оценивается в виде полинома соответствующей степени. На границах отрезков эти полиномы сшиваются так, чтобы получилась непрерывная кривая. Такая кусочно-полиномиальная кривая носит название сплайна [8–10].

Выделение тренда в виде сплайна первого порядка

Уточним поставленную задачу для случая, когда φ_{is} – заданные функции времени. В качестве функций φ_{is}, $s = \overline{0, k-1}$, возьмем функции вида

$$\varphi_s(t_i) = \varphi_{is} = \begin{cases} a_s t_i + b_s, \text{ если } t_i \in [sT_0; (s+1)T_0], \\ 0, \qquad\quad \text{если } t_i \notin [sT_0; (s+1)T_0]. \end{cases} \tag{1}$$

Потребуем, чтобы $\varphi_s((s+1)T_0) = \varphi_{s+1}((s+1)T_0)$. Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок $\hat{a}_s, \hat{b}_s$ неизвестных параметров a_s, b_s, $s = \overline{0, k-1}$, и исследованию этих оценок.

Оценки параметров тренда

Найдем оценки $\hat{a}_s, \hat{b}_s$ неизвестных параметров a_s, b_s, $s = \overline{0, k-1}$, методом наименьших квадратов, исходя из условия

$$Q = \sum_{s=0}^{k} \sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0} n_i \left[\overline{y}_i - \left(\hat{a}_s t_i + \hat{b}_s \right) \right]^2 \Rightarrow \min_{\hat{a}_s, \hat{b}_s}. \tag{2}$$

Продифференцировав (2) по $\hat{a}_s, \hat{b}_s$, $s = \overline{0, k-1}$, и приравняв частные производные к нулю, получаем систему $2k$ уравнений с $2k$ неизвестными, которая с введением матричных обозначений: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, ..., \hat{a}_{k-1}, \hat{b}_{k-1}]^T$ – матрица-столбец оценок неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta} = [a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_{k-1}, b_{k-1}]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i^2 n_i & \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i n_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i n_i & \sum\limits_{i=0}^{T_0} n_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i^2 n_i & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i n_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i n_i & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} n_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i^2 n_i & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i n_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i n_i & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum\limits_{i=0}^{T_0} n_i \bar{y}_i \\ \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} n_i \bar{y}_i \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i t_i \\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \bar{y}_i \end{bmatrix},$$

будет иметь вид

$$A\hat{\boldsymbol{\theta}} = Y\,, \tag{3}$$

откуда получаем решение системы

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(A^{\mathrm{T}} A\right)^{-1} A^T Y\,. \tag{4}$$

Оценки (4) трудно исследовать и трудно считать, так как n_i – случайные величины и, следовательно, матрица A – матрица со случайными элементами, соответственно и матрица A^{-1} становится случайной. Поэтому вместо матрицы A в уравнении (3) возьмем $M[A] = \lambda A_0$, где

$$A_0 = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{T_0} t_i & \sum\limits_{i=0}^{T_0} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i^2 & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} t_i & \sum\limits_{i=T_0}^{2T_0} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i^2 & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} t_i & \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислив отдельно суммы, входящие в матрицу A_0, с учетом того, что $t_i = i$, получим

$$\frac{T_0}{6}\begin{bmatrix} 2T_0^2+3T_0+1 & 3(T_0+1) & \dots & 0 & 0 \\ 3(T_0+1) & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{matrix} 2T_0^2(3k^2-3k+1)+ \\ +3T_0(2k-1)+1 \end{matrix} & 3(2k-1)(T_0+1) \\ 0 & 0 & \dots & 3(2k-1)(T_0+1) & 6 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению $\lambda \boldsymbol{A}_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{Y}$, в котором $\boldsymbol{A}_0$ представлена (5). Заметим, что матрица $\boldsymbol{A}_0$ является квазидиагональной. Обозначим ($\mathbf{0}$ – нулевая матрица)

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{T_0}{6}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{A}_{kk} \end{bmatrix} = \frac{T_0}{6}\left[\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \dots, \boldsymbol{A}_{kk}\right].$$

Тогда для обратной матрицы имеет место равенство

$$\boldsymbol{A}_0^{-1} = \frac{6}{T_0}\left[\boldsymbol{A}_{11}^{-1}, \boldsymbol{A}_{22}^{-1}, \dots, \boldsymbol{A}_{kk}^{-1}\right].$$

Убедившись, что матрица $\boldsymbol{A}_0$ является невырожденной, находим обратную матрицу $\boldsymbol{A}_0^{-1}$, которая так же, как и исходная матрица, является квазидиагональной, с элементами, стоящими на главной диагонали вида

$$\frac{6}{T_0}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{2}{T_0^2 - 12s(2s+1)T_0 - (12s^2+12s+1)},$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{(2s+1)(T_0+1)}{T_0^2 - 12s(2s+1)T_0 - (12s^2+12s+1)},$$

$$a_{22} = \frac{2(3s_2+3s+1)T_0^2 + 3(2s+1)T_0 + 1}{3\left(T_0^2 - 12s(2s+1)T_0 - (12s^2+12s+1)\right)}, \quad s = \overline{0, k-1}.$$

Знание обратной матрицы позволяет в явном виде записать оценки неизвестных параметров тренда в виде

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{A}_0^T \boldsymbol{A}_0\right)^{-1} \boldsymbol{A}_0^T \boldsymbol{Y}. \tag{6}$$

Выделение тренда в виде сплайна второго порядка

Теперь в условиях предыдущей задачи в качестве функций φ_{is}, $s=\overline{0,k-1}$, возьмем функции вида

$$\varphi_{is}=\begin{cases}a_s t_i^2+b_s t_i+c_s, & \text{если } t_i\in[sT_0;(s+1)T_0],\\ 0, & \text{если } t_i\notin[sT_0;(s+1)T_0].\end{cases}$$

Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок $\hat{a}_s,\hat{b}_s$, $\hat{c}_s$ неизвестных параметров a_s,b_s, c_s, $s=\overline{0,k-1}$, и исследованию этих оценок. Так же как и в предыдущем пункте, воспользовавшись методом наименьших квадратов исходя из условия

$$Q=\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0}n_i\left[\overline{y}_i-\left(\hat{a}_s t_i^2+\hat{b}_s t_i+\hat{c}_s\right)\right]^2\Rightarrow\min_{\hat{a}_s,\hat{b}_s},$$

найдем оценки неизвестных параметров. После дифференцирования предыдущего выражения по $\hat{a}_s,\hat{b}_s,\hat{c}_s$, $s=\overline{0,k-1}$, получим систему уравнений (3), в которой $\hat{\boldsymbol{\theta}}=[\hat{a}_0,\hat{b}_0,\hat{c}_0,\hat{a}_1,\hat{b}_1,\hat{c}_1,...,\hat{a}_{k-1},\hat{b}_{k-1},\hat{c}_{k-1}]^T$, $\boldsymbol{A}$ – квазидиагональная матрица с диагональными элементами вида

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^4n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^3n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^2n_i\\ \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^3n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^2n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_in_i\\ \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_i^2n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}t_in_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0}n_i\end{bmatrix},\quad s=\overline{1,k},\quad \text{и}\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=0}^{T_0}n_i\,\overline{y}_i\,t_i^2\\ \sum\limits_{i=0}^{T_0}n_i\,\overline{y}_i\,t_i\\ \sum\limits_{i=0}^{T_0}n_i\,\overline{y}_i\\ \cdots\\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0}n_i\,\overline{y}_i\,t_i^2\\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0}n_i\,\overline{y}_i\,t_i\\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0}n_i\,\overline{y}_i\end{bmatrix}.$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению $\lambda\boldsymbol{A}_0\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{Y}$, в котором $\boldsymbol{A}_0$ есть квазидиагональная матрица, в которой диагональные элементы имеют вид

$$\frac{T_0+1}{60}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = 2T_0\left[6T_0^3(1+10s^2-5s+5s^4-10s^3)+3T_0^2(10s^2-10s+3)+T_0-1\right],$$

$$a_{33}=60\,,\ a_{12}=a_{21}=15T_0^2(2s-1)\left((2s^2-2s+1)T_0+1\right),$$

$$a_{13}=a_{22}=a_{31}=10T_0\left(2(3s^2-3s+1)T_0+1\right),\ a_{23}=a_{32}=30(2s-1)T_0\,,\ s=\overline{0,k-1}\,.$$

Тогда обратная матрица к матрице A_0 будет также квазидиагональной матрицей с диагональными элементами вида

$$\frac{60}{T_0+1}\begin{bmatrix} a^0{}_{11} & a^0{}_{12} & a^0{}_{13} \\ a^0{}_{21} & a^0{}_{22} & a^0{}_{23} \\ a^0{}_{31} & a^0{}_{32} & a^0{}_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$a^0{}_{11}=\frac{3}{T_0(T_0^3+4T_0^2+T_0-6)}\,,\ a^0{}_{12}=a^0{}_{21}=\frac{-3(2s-1)}{(T_0^3+4T_0^2+T_0-6)}\,,$$

$$a^0{}_{13}=a^0{}_{22}=a^0{}_{31}=\frac{(6s^2-6s+1)T_0-1}{2(T_0^3+4T_0^2+T_0-6)}\,,$$

$$a^0{}_{23}=a^0{}_{32}=\frac{-3\left(T_0^2(20s^3-30s^2+14s-2)-(2k-1)T_0-(2s-1)\right)}{10(T_0^3+4T_0^2+T_0-6)}\,,$$

$$a^0{}_{33}=\frac{T_0^3(60s^4-120s^3+84s^2-24s+3)-\left(12T_0^2s(s-1)+T_0(12s^2-12s+1)+2\right)}{20(T_0^3+4T_0^2+T_0-6)}\,,$$

$$s=\overline{0,k-1}\,.$$

Оценки неизвестных параметров тренда задаются выражением (6).

Выделение тренда в виде сплайна третьего порядка

Теперь, в качестве функций φ_{is}, $s=\overline{0,k-1}$, рассмотрим функции вида

$$\varphi_{is}=\begin{cases} a_st_i^3+b_st_i^2+c_st_i+d_s, & \text{если } t_i\in[sT_0;(s+1)T_0],\\ 0, & \text{если } t_i\notin[sT_0;(s+1)T_0]. \end{cases}$$

Задача выделения тренда сводится к нахождению оценок $\hat{a}_s,\hat{b}_s$, $\hat{c}_s,\hat{d}_s$ неизвестных параметров a_s,b_s, c_s,d_s, $s=\overline{0,k-1}$, и исследованию этих оценок. Так же как и ранее, воспользовавшись методом наименьших квадратов исходя из условия

$$Q=\sum_{i=1}^{N}n_i\left[\overline{y}_i-\sum_{s=0}^{k}\left(\hat{a}_st_i^3+\hat{b}_st_i^2+\hat{c}_st_i+d_s\right)\right]^2\Rightarrow\min_{\hat{a}_s,\hat{b}_s,\hat{c}_s,\hat{d}_s}\,,$$

найдем оценки неизвестных параметров. После дифференцирования предыдущего выражения по $\hat{a}_s, \hat{b}_s, \hat{c}_s, \hat{d}_s$, $s=\overline{0,k-1}$, получим систему уравнений (3), в которой $\hat{\boldsymbol{\theta}}=[\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{c}_0, \hat{d}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, ..., \hat{a}_{k-1}, \hat{b}_{k-1}, \hat{c}_{k-1}, \hat{d}_{k-1}]^T$, A – квазидиагональная матрица с диагональными элементами вида

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^6 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^5 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i \\ \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^5 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i \\ \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^4 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i \\ \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^3 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i^2 n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} t_i n_i & \sum\limits_{i=(s-1)T_0}^{sT_0} n_i \end{bmatrix}, \quad s=\overline{1,k}, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{T_0} n_i \overline{y}_i\, t_i^3 \\ \sum\limits_{i=0}^{T_0} n_i \overline{y}_i\, t_i^2 \\ \cdots \\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \overline{y}_i\, t_i \\ \sum\limits_{i=(k-1)T_0}^{kT_0} n_i \overline{y}_i \end{bmatrix}.$$

От матричного уравнения (3) перейдем к уравнению $\lambda \boldsymbol{A}_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{Y}$, в котором $\boldsymbol{A}_0$ есть квазидиагональная матрица, в которой диагональные элементы имеют вид

$$\frac{T_0+1}{420}\begin{bmatrix} a^0{}_{11} & a^0{}_{12} & a^0{}_{13} & a^0{}_{14} \\ a^0{}_{21} & a^0{}_{22} & a^0{}_{23} & a^0{}_{24} \\ a^0{}_{31} & a^0{}_{32} & a^0{}_{33} & a^0{}_{34} \\ a^0{}_{41} & a^0{}_{42} & a^0{}_{43} & a^0{}_{44} \end{bmatrix},$$

где

$$a^0{}_{11} = 10T_0[6T_0^5(7s^6+21s^5+35s^4+35s^3+21s^2+7s+1)+$$
$$+3T_0^4(35s^4+70s^3+63s^2+28s+5)+3T_0^3(7s^2+7s+2)-3T_0^2(7s^2+7s+2)-T_0+1],$$

$$a^0{}_{12} = a^0{}_{21} = 35T_0^2(2s+1)[2T_0^3(3s^4+6s^3+7s^2+4s+1)+2T_0^2(5s^2+5s+2)+T_0-1],$$

$$a^0{}_{13} = a^0{}_{22} = a^0{}_{31} = 14T_0[6T_0^3(5s^4+10s^3+10s^2+5s+1)+3T_0^2(10s^2+10s+3)+T_0-1],$$

$$a^0{}_{14} = a^0{}_{23} = a^0{}_{32} = a^0{}_{41} = 105T_0^2(2s+1)\left(T_0(2s^2+2s+1)+1\right),$$

$$a^0{}_{24} = a^0{}_{33} = a^0{}_{42} = 70T_0\left(2T_0(3s^2+3s+1)+1\right),$$

$$a^0{}_{34} = a^0{}_{43} = 210(2s+1)T_0, \quad a^0{}_{44} = 420\,, \ s=\overline{0,k-1}.$$

Вычисление обратной матрицы к матрице $\boldsymbol{A}_0$ приведено в приложении. Оценки неизвестных параметров тренда задаются выражением (6).

Исследование статистических характеристик полученных оценок

Из условия

$$M[\hat{\theta}] = M\left[\frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\boldsymbol{A}_0^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}+\xi)\right] = \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\boldsymbol{A}_0^T\lambda\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

заключаем, что полученные оценки являются несмещенными. Здесь $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_{2k}]^T$. Найдем вариационную матрицу оценок. Имеем

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} = \left(\frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_{2k}\right)\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{\xi},$$

$\boldsymbol{E}_{2k}$ – единичная матрица размерности $2k \times 2k$. Тогда матрица вариаций оценок $\boldsymbol{\theta}$ имеет вид

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = M[(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})^T] = \frac{1}{\lambda^2}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\boldsymbol{A}_0^T M[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T]\boldsymbol{A}_0\left(\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}\right)^T,$$

где учтено, что $M[\boldsymbol{\xi}] = \boldsymbol{0}$. Так как $M[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T] = \sigma^2\boldsymbol{E}_{2k}$, то

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}\left(\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{A}_0\right)^{-1}. \tag{7}$$

Это выражение позволяет находить матрицу вариаций оценок неизвестных параметров тренда временного ряда, когда в каждый момент времени производится случайное число измерений.

Обычно σ^2 заранее неизвестна, однако ее оценку можно построить, исходя из минимума выражения

$$\bar{Q}_{\min 1} = \lambda\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0}\left[(a_s-\hat{a}_s)t_i + (b_s-\hat{b}_s) + \xi_i\right]^2$$

для сплайна первого порядка,

$$\bar{Q}_{\min 2} = \lambda\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0}\left[(a_s-\hat{a}_s)t_i^2 + (b_s-\hat{b}_s)t_i + (c_s-\hat{c}_s) + \xi_i\right]^2$$

для сплайна второго порядка и

$$\bar{Q}_{\min 3} = \lambda\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=sT_0}^{(s+1)T_0}\left[(a_s-\hat{a}_s)t_i^3 + (b_s-\hat{b}_s)t_i^2 + (c_s-\hat{c}_s)t_i + (d_s-\hat{d}_s) + \xi_i\right]^2$$

для сплайна третьего порядка. Вычислив математическое ожидание

$$M\left[\bar{Q}_{\min 1}\right] = \lambda\sigma^2 k(T_0-1),\ M\left[\bar{Q}_{\min 2}\right] = \lambda\sigma^2 k(T_0-2),\ M\left[\bar{Q}_{\min 3}\right] = \lambda\sigma^2 k(T_0-3),$$

возьмем в качестве оценки s^2 дисперсии σ^2 величину

$$s^2 = \frac{M\left[\bar{Q}_{\min 1}\right]}{\lambda k(T_0-1)},\ s^2 = \frac{M\left[\bar{Q}_{\min 2}\right]}{\lambda k(T_0-2)},\ s^2 = \frac{M\left[\bar{Q}_{\min 3}\right]}{\lambda k(T_0-3)}$$

для сплайнов первого, второго и третьего порядков соответственно. Подставив в (7) соответствующую оценку σ^2 получим в явном виде оценку матрицы вариаций оценок неизвестных параметров тренда временного ряда, когда в каждый момент времени производится случайное число измерений.

Выводы

Выделен тренд временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений в виде сплайна первого, второго и третьего порядков. Показана несмещенность оценок тренда. Найдена вариационная матрица оценок, а также оценка дисперсии, входящей в $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$. Получена оценка вариационной матрицы оценок параметров тренда, которая позволяет обычным образом вычислять доверительные интервалы параметров $\boldsymbol{\theta}$.

Приложение

Пусть $\boldsymbol{A}$ – матрица порядка $4n$ вида

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{A_n} \end{pmatrix},$$

где
$$\boldsymbol{A_m} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^6 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^5 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \\ \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^5 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 \\ \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i \\ \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 & \sum\limits_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} i & 1+T_0 \end{pmatrix}, \quad m = 1,2,\dots, n.$$

Требуется найти ее обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Известно, что если $\boldsymbol{A}$ – блочно-диагональная матрица, то ее обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ (если она существует) тоже является блочно-диагональной, причем

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{B_n} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{B_m}$ – обратная для $\boldsymbol{A_m}$.

Для нахождения $\boldsymbol{B_m}$ воспользуемся формулой $\boldsymbol{B_m} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A_m}|} \cdot \boldsymbol{S}^T$, где $\boldsymbol{S}$ – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы $\boldsymbol{A_m}$. Поскольку $\boldsymbol{A_m}$ – симметрическая, то $\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S}$ и, следовательно, $\boldsymbol{B_m}$ тоже симметрическая. Найдем $|\boldsymbol{A_m}|$ и все элементы матрицы $\boldsymbol{S}$. При этом нам понадобятся следующие семь определителей третьего порядка:

1) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & k^2 \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^2-k^2 & j^2-k^2 & k^2 \\ i-k & j-k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^2-k^2 & j^2-k^2 \\ i-k & j-k \end{vmatrix} =$$

$$= (i-k)(j-k)\begin{vmatrix} i+k & j+k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (i-k)(j-k)(i-j)\,;$$

2) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3-k^3 & j^3-k^3 & k^3 \\ i-k & j-k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3-k^3 & j^3-k^3 \\ i-k & j-k \end{vmatrix} =$$

$$= (i-k)(j-k)\begin{vmatrix} i^2+ik+k^2 & j^2+jk+k^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (i-k)(j-k)(i^2+ik-j^2-jk) =$$

$$= (i-k)(j-k)(i-j)(i+j+k)\,;$$

3) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3-k^3 & j^3-k^3 & k^3 \\ i^2-k^2 & j^2-k^2 & k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^3-k^3 & j^3-k^3 \\ i^2-k^2 & j^2-k^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (i-k)(j-k)\begin{vmatrix} i^2+ik+k^2 & j^2+jk+k^2 \\ i+k & j+k \end{vmatrix} = (i-k)(j-k)(i-j)(ij+ik+jk)\,;$$

4) $$\Delta_4 = \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = ijk \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & k^2 \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ijk \cdot \Delta_1 = ijk(i-k)(j-k)(i-j)\,;$$

5) $$\Delta_5 = \begin{vmatrix} i^2 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i & j & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2\right) \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k\right) \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1+T_0) \cdot \begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ i & j \end{vmatrix} =$$

$$=\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2\right)\cdot(i-j)-\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k\right)\cdot(i^2-j^2)+(1+T_0)\cdot(i^2j-ij^2)=$$

$$=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}[k^2-k(i+j)+ij]\right)=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}(i-k)(j-k)\right);$$

6) $$\Delta_6=\begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i & j & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3\right)\cdot\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 1\end{vmatrix}-\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k\right)\cdot\begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ 1 & 1\end{vmatrix}+(1+T_0)\cdot\begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ i & j\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3\right)\cdot(i-j)-\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k\right)\cdot(i^3-j^3)+(1+T_0)\cdot(i^3j-ij^3)=$$

$$=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}[k^3-k(i^2+ij+j^2)+ij(i+j)]\right)=$$

$$=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}(i-k)(j-k)(k+i+j)\right);$$

7) $$\Delta_7=\begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^2 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3\right)\cdot\begin{vmatrix} i^2 & j^2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}-\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2\right)\cdot\begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ 1 & 1\end{vmatrix}+(1+T_0)\cdot\begin{vmatrix} i^3 & j^3 \\ i^2 & j^2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3\right)\cdot(i^2-j^2)-\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2\right)(i^3-j^3)+(1+T_0)(i^3j^2-i^2j^3)=$$

$$=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}[k^3(i+j)-k^2(i^2+ij+j^2)+i^2j^2]\right)=$$

$$=(i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}(i-k)(j-k)(ij+ik+jk)\right).$$

Найдем $|\boldsymbol{A_m}|$. Имеем

$$|\boldsymbol{A_m}| = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \\ i^5 & j^4 & k^3 & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \\ i^4 & j^3 & k^2 & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \\ i^3 & j^2 & k & 1+T_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & k^3 & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \\ i^2 & j^2 & k^2 & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \\ i & j & k & \sum\limits_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \\ 1 & 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \times$$

$$\times \left(-\left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 \right) \cdot \Delta_1 + \left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \right) \cdot \Delta_2 - \left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \right) \cdot \Delta_3 + (1+T_0) \cdot \Delta_4 \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \times$$

$$\times \left(-\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^3 + \left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t^2 \right) \cdot (i+j+k) - \left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} t \right) \cdot (ij+ik+jk) + (1+T_0) \cdot ijk \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \times$$

$$\times \left(-\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} [t^3 - t^2 (i+j+k) + t \cdot (ij+ik+jk) - ijk] \right) =$$

$$= -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k) \left(\sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} (t-i)(t-j)(t-k) \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{t=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot (i-j)(i-k)(j-k)(i-t)(j-t)(k-t) . \quad (8)$$

Найдем алгебраические дополнения $A_{ij} = A_{ji}$ элементов матрицы $\boldsymbol{A_m}$:

$$1)\quad A_{11} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^4 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^3 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^2 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j \cdot \Delta_5 =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j \cdot (i-j) \cdot \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^2 j(i-j)(i-k)(j-k)\,; \tag{9}$$

$$2)\quad A_{22} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^4 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^4 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot \Delta_6 =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot (i-j) \cdot \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(k+i+j) \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j(i-j)(i-k)(j-k)(k+i+j)\,; \tag{10}$$

$$3)\quad A_{33} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \begin{vmatrix} i^3 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^2 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ 1 & 1 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \Delta_6 =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot (i-j) \cdot \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k)(ij+ik+jk) \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k)(ij+ik+jk)\,; \tag{11}$$

$$4)\qquad A_{44} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^5 & j^4 & k^3 \\ i^4 & j^3 & k^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=j_{m-1}}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 \cdot j^3 \cdot k^2 \cdot \Delta_1 =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^4 \cdot j^3 \cdot k^2 \cdot (i-j)(i-k)(j-k)\,; \qquad (12)$$

5) $$A_{12} = A_{21} = -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^4 & j^2 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j & 1+T_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot \Delta_5 = -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j \cdot (i-j) \cdot \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) =$$

$$= -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j (i-j)(i-k)(j-k)\,; \qquad (13)$$

6) $$A_{13} = A_{31} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^4 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^2 \\ i^4 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j^2 & 1+T_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot \Delta_5 =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \cdot (i-j) \cdot \left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} (i-k)(j-k) \right) =$$

$$= \sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k)\,; \qquad (14)$$

7) $$A_{14} = A_{41} = -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} \begin{vmatrix} i^5 & j^4 & k^3 \\ i^4 & j^3 & k^2 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k \cdot \Delta_1 =$$

$$= -\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} \sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 \cdot j^2 \cdot k \cdot (i-j)(i-k)(j-k)\,; \qquad (15)$$

8) $$A_{23}=A_{32}=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\begin{vmatrix} i^6 & j^5 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k^3 \\ i^4 & j^3 & \sum\limits_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} k \\ i^3 & j^2 & 1+T_0 \end{vmatrix}=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 \Delta_6 =$$

$$=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)\cdot\left(\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}(i-k)(j-k)(k+i+j)\right)=$$

$$=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 (i-j)(i-k)(j-k)(k+i+j)\,; \qquad (16)$$

9) $$A_{24}=A_{42}=\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}\begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^4 & j^3 & k^2 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3 j^2 k\cdot\Delta_2 =$$

$$=\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3\cdot j^2\cdot k\cdot(i-j)(i-k)(j-k)(i+j+k)\,; \qquad (17)$$

10) $$A_{34}=A_{43}=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0}\begin{vmatrix} i^6 & j^5 & k^4 \\ i^5 & j^4 & k^3 \\ i^3 & j^2 & k \end{vmatrix}=$$

$$=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3\cdot j^2\cdot k\cdot\Delta_3 =$$

$$=-\sum_{i=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{j=(m-1)T_0}^{mT_0}\sum_{k=(m-1)T_0}^{mT_0} i^3\cdot j^2\cdot k\cdot(i-j)(i-k)(j-k)(ij+ik+jk)\,. \qquad (18)$$

Итак, формулы (8) – (18) позволяют вычислить все элементы матрицы

$$\boldsymbol{B_m}=\frac{1}{|\boldsymbol{A_m}|}\cdot\boldsymbol{S}\,,\ m=1,2,\ \dots,\ n,$$

и, следовательно, искомая матрица $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{B_n} \end{pmatrix}$ найдена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тривоженко Б.Е.* Выделение трендов временных рядов и потоков событий. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 284 с.
2. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
3. *Кендалл М.Д.*, *Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
4. *Шумилов Б.М.*, *Эшаров Э.А.*, *Аркабаев Н.К.* Построение и оптимизация прогнозов на основе рекуррентных сплайнов первой степени // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13. № 2. С. 227–241.
5. *Шумилов Б.М.*, *Эшаров Э.А.* Метод рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 1. URL: http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9440/index.html (дата обращения 16.11.2014).
6. *Шумилов Б.М.*, *Эшаров Э.А.* Метод рекуррентной сплайн-прогнозирования степени 3 глубины 1. URL: http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9354/index.html (дата обращения 16.11.2014).
7. *Идрисов Ф.Ф.*, *Константинова И.Г.* Выделение трендов временных рядов при случайном числе измерений // Изв. вузов. Физика. 1999. Т. 42. № 4. С. 14–18.
8. *Завьялов Ю.С.*, *Леус В.А.*, *Скороспелов В.А.* Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
9. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. *Лифшиц К.И.* Сглаживание экспериментальных данных сплайнами. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 180 с.

Статья поступила 05.10.2014 г.

Ustinova I.G., *Pakhomova E.G.* SPLINE ESTIMATE OF THE TIME SERIES TREND FOR A RANDOM NUMBER OF DATA AT MEASUREMENT INSTANTS. DOI 10.17223/19988621/33/3

In many problems of economy, science, and technology one deals with time series. The observed values of a random process $y(t)$ at instants t_1, t_2, ..., t_N, ... form a time series. One of the main goals of time series analysis is the problem of separating the trend. It is a systematic component because a selected trend allows one:

(a) to predict the future based on the knowledge of the past;

(b) to manage the process generating the series;

(c) to describe characteristic features of the series.

In the classical theory of time series, the process is measured at regular intervals, exactly one observation at each time instant. However, there exists an organization of the measurement process when the number of measurements is random. Such situations arise especially often in economic systems, for example, in the stock market. This leads to the necessity of developing the theory of time series analysis for a situation where the number of measurements at each time instant is random.

Note that selecting a trend polynomial whose order exceeds four is inexpedient in view of a large error in the evaluation of polynomial coefficients. At the same time, if the number of observations is large, a low order polynomial can be inadequate to describe the true trend. The solution is in a spline estimate of the time series trend.

In this work, we construct a theory of selecting a time series trend by splines of the first, second, and third orders when the number of measurements in each time is random. The estimates for the spline coefficients are obtained in an explicit form. We have investigated statistical characteristics of the obtained estimates.

Keywords: time series trend, spline of the first, second and third orders, parameter estimation, statistical properties of estimates.

USTINOVA Irina Georgievna (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof.,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: igu@sibmail.com

PAKHOMOVA Elena Grigoryevna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: peg@tpu.ru

REFERENCES

1. Trivozhenko B.E. *Vydelenie trendov vremennykh ryadov i potokov sobytiy*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 1989, 284 p. (in Russian)
2. Anderson T. *Statisticheskiy analiz vremennykh ryadov*. Moskow, Mir Publ., 1976, 755 p. (in Russian)
3. Kendall M.D., St'yuart A. *Mnogomernyy statisticheskiy analiz i vremennye ryady*. Moskow, Nauka Publ., 1976, 736 p. (in Russian)
4. Shumilov B.M., Esharov E.A., Arkabaev N.K. Postroenie i optimizatsiya prognozov na osnove rekurrentnykh splaynov pervoy stepeni. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 227–241. (in Russian)
5. Shumilov B.M., Esharov E.A. *Metod rekurrentnoy splayn-approksimatsii stepeni 3 glubiny 1*. Available at: http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9440/index.html (accessed 16.11.2014). (in Russian)
6. Shumilov B.M., Esharov E.A. *Metod rekurrentnoy splayn-prognozirovaniya stepeni 3 glubiny 1*. Available at: http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2005/9354/index.html (accessed 16.11.2014). (in Russian)
7. Idrisov F.F., Konstantinova I.G. Vydelenie trendov vremennykh ryadov pri sluchaynom chisle izmereniy. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 1999, vol. 42, no. 4, pp. 14–18. (in Russian)
8. Zav'yalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. *Splayny v inzhenernoy geometrii*. Moskow, Mashinostroenie Publ., 1985, 224 p. (in Russian)
9. Korneychuk N.P. *Splayny v teorii priblizheniya*. Moskow, Nauka Publ., 1984, 352 p. (in Russian)
10. Lifshits K.I. *Sglazhivanie eksperimental'nykh dannykh splaynami*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 1991, 180 p. (in Russian)