ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика и механика № 1(33)

УДК 539.319 DOI 10.17223/19988621/33/8

М.А. Осипенко

ЗАДАЧА ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии с возможным отставанием тяжелой гибкой нерастяжимой нити и гладкого твердого тела. Наличие твердого тела приводит к малому отклонению нити от вертикали. Задача сводится к отысканию плотности сил взаимодействия нити и тела. Сформулирована строгая постановка задачи, установлена единственность решения и построено аналитическое решение в частных случаях. Показано, что в зависимости от формы тела возможен контакт в одной точке или по некоторому участку нити.

Ключевые слова: *гибкая нерастяжимая нить*, *односторонний контакт*, *контактная задача*, *единственность решения*, *аналитическое решение.*

Гибкая нерастяжимая нить является одной из простейших механических систем с бесконечным числом степеней свободы [1]. Для такой нити, как и для близких «одномерных» систем (струна, балка), могут быть поставлены контактные задачи. В [1] рассмотрены задачи о контакте нити с абсолютно твердым телом, как гладким, так и шероховатым (задача Эйлера). При этом область контакта нити и тела предполагается обычно заранее известной (совпадающей со всей нитью), хотя формально контакт считается односторонним и нить может отставать от тела. Задачи с заранее неизвестной областью контакта менее изучены; в [1, с. 53] имеется только одна такая задача, в которой обоснование правильности найденной области контакта является несложным. Более сложные задачи такого рода могут быть исследованы с помощью подхода, предложенного в [2–5] для струн и балок.

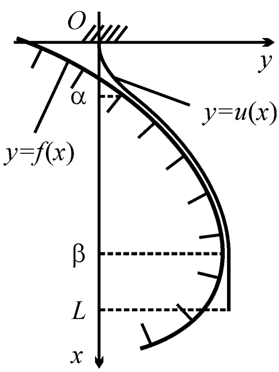

Рис. 1. Контакт нити

В настоящей работе рассмотрена плоская задача о контакте находящейся в равновесии тяжелой гибкой нерастяжимой нити с абсолютно твердым гладким телом (рис. 1). Отклонение нити от вертикали предполагается малым. Целью работы является строгая математическая постановка задачи, доказательство единственности решения и построение аналитического решения в двух частных случаях. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

Постановка контактной задачи

Форма твердого тела описывается заданной функцией $f(x)$. Нерастяжимая нить длины L закреплена в точке O и находится в поле силы тяжести. Трение между нитью и телом отсутствует. Форма нити в равновесии описывается искомой функцией $u(x)$ (рис. 1). Обозначим $r(x)=u(x)-f(x)$ (расстояние между нитью и телом). При малом отклонении нити от вертикали $0\le x\le L$, силы, с которыми тело действует на нить, направлены вдоль оси y; плотность этих сил обозначим через $q(x)$. Используя принцип возможных перемещений [6], нетрудно найти, что

$$r(x) = \int_0^x \left(\int_s^L q(t)\,dt \right) \frac{ds}{m(s)g} - f(x)\,, \tag{1}$$

где g – ускорение свободного падения, $m(s)$ – заданная масса участка нити $s \le x \le L$. Функцию $m(x)$ будем считать положительной и непрерывной при $0 \le x \le L$. Положительность $m(L)$ означает, что на конце нити имеется сосредоточенная масса. Это предположение сделано для того, чтобы избежать возможной расходимости интеграла (1) при $x = L$ (и аналогичных интегралов ниже). Отыскание $u(x)$ сводится, таким образом, к отысканию $q(x)$. Будем считать, что $q(x)$ имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i)\,, \tag{2}$$

где $p(x) \ge 0$ – кусочно-непрерывная, непрерывная слева при $0 < x \le L$ и непрерывная справа при $x = 0$; $P_i \ge 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Условие контакта нити и тела состоит, помимо неотрицательности $q(x)$, в том, что расстояние между нитью и телом неотрицательно, а в тех точках, где $q(x)$ положительна, равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $q(x)$ вида (2), такую, что при $0 \le x \le L$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (q(x) > 0), \\ \ge 0 & (q(x) = 0), \end{cases} \tag{3}$$

где $r(x)$ выражается формулой (1).

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство Пусть $q(x)$ и $q^*(x)$ – два решения задачи. По формуле (1) им соответствуют функции $r(x)$ и $r^*(x)$. Обозначим

$$\varphi(x) = q(x) - q^*(x)\,. \tag{4}$$

Так как $q(x)$ и $q^*(x)$ имеют вид (2), то $\varphi(x)$ также имеет вид (2), но $p(x)$ и P_i в (2) могут быть неположительными. Обозначим

$$E = \int_0^L \left(r(x) - r^*(x) \right) \varphi(x) dx\,. \tag{5}$$

Из (3), (4) нетрудно установить, что в (5) подынтегральная функция неположительна; следовательно, $E \le 0$. С другой стороны, подставляя (1) в (5) и учитывая (4), найдем

$$E = \int_0^L \frac{J^2(x)}{m(x)g} dx\,, \tag{6}$$

где

$$J(x) = \int_x^L \varphi(s) ds\,. \tag{7}$$

Из (6) следует, что $E \ge 0$. Так как выше было доказано неравенство $E \le 0$, то $E = 0$. Далее, учитывая (7) и упомянутый выше вид $\varphi(x)$, легко установить, что из (6) и равенства $E = 0$ следует, что $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L$. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $0 \le x \le L$. Действительно, предположим, что для $\varphi(x)$ в (2) $p(x) > 0$ при некотором $x^* > 0$. Тогда, в силу непрерывности $p(x)$ слева и конечности суммы, можно найти такие

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, что отрезок $0 < x^* - \varepsilon_1 \le x \le x^* - \varepsilon_2$ не содержит ни одной точки x_i и $p(x) > 0$ на этом отрезке; это противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L$. Аналогично устанавливается невозможность неравенств $p(x) < 0$ при $x > 0$ и $p(0) \ne 0$; следовательно, $p(x) = 0$ при $0 \le x \le L$, и для $\varphi(x)$ в (2) остается только сумма δ-функций. Пусть $x_m > 0$ – максимальное из чисел x_i, соответствующих ненулевым значениям P_i. Тогда из (7) следует, что $J(x) \ne 0$ в некоторой левой полуокрестности x_m, что противоречит равенству $J(x) = 0$ при $0 \le x \le L$. Таким образом, $\varphi(x) = 0$ и $q(x) = q^*(x)$ при $0 \le x \le L$; тем самым, утверждение 1 доказано.

Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

Утверждение 2. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L$; $m(x)$ непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L$; $(m(x) f'(x))' < 0$; $f(0) < 0; f'(0) > 0; f'(L) < 0; f(\beta) > 0$, где $0 < \beta < L$ – корень уравнения $f'(\mathrm{B}) = 0$ (эти условия соответствуют рис. 1); $0 < \alpha < \beta$ – корень уравнения $\Phi(\mathrm{A}) = 0$, где

$$\Phi(\mathrm{A}) = m(A) f'(\mathrm{A}) \int_0^A \frac{ds}{m(s)} - f(\mathrm{A}) .$$

Тогда решение поставленной задачи имеет вид

$$q(x) = \begin{cases} -\left(m(x) f'(x)\right)' & (\alpha \le x < \beta), \\ 0 & (x < \alpha,\ x \ge \beta). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Так как $f'(\mathrm{B})$ непрерывна при $0 \le \mathrm{B} \le L$; $f'(0) > 0$; $f'(L) < 0$, то корень β существует. Так как $\Phi(\mathrm{A})$ непрерывна при $0 \le \mathrm{A} \le \beta$; $\Phi(0) = -f(0) > 0$; $\Phi(\beta) = -f(\beta) < 0$, то корень $0 < \alpha < \beta$ существует. Далее, $q(x)$, очевидно, имеет вид (2). Остается доказать справедливость (3). Неравенство $q(x) > 0$ выполнено только при $\alpha \le x < \beta$; для этих x из (1), (8) (с учетом упомянутых в формулировке утверждения 2 свойств функции $f(x)$) нетрудно найти, что $r(x) = 0$; тем самым, первое соотношение в (3) выполнено. При $x < \alpha$ из (1), (8) и равенств $f'(\beta) = 0$, $\Phi(\alpha) = 0$ можно получить следующее представление для $r(x)$:

$$r(x) = -\int_x^{\alpha} \left(\int_s^{\alpha} \left(m(t) f'(t)\right)' dt \right) \frac{ds}{m(s)} ,$$

откуда следует, что $r(x) \ge 0$. При $x \ge \beta$ из (1), (8) и равенств $f'(\beta) = 0$, $\Phi(\alpha) = 0$ можно получить следующее представление для $r(x)$:

$$r(x) = -\int_{\beta}^{x} \left(\int_{\beta}^{s} \left(m(t) f'(t)\right)' dt \right) \frac{ds}{m(s)} ,$$

откуда следует, что $r(x) \ge 0$; тем самым, второе соотношение в (3) выполнено и утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L$; $m(x)$ непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L$; $(m(x) f'(x))' > 0$; $f(0) < 0; f(L) > 0$. Тогда решение поставленной задачи имеет вид (рис. 2)

$$q(x) = F\delta(x - L) , \tag{9}$$

где

$$F = f(L) g \Big/ \int_0^L \frac{dx}{m(x)} . \tag{10}$$

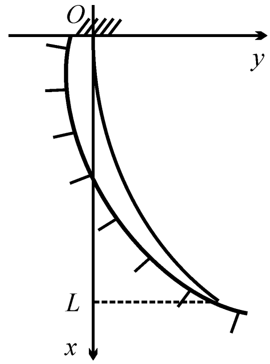

Рис. 2. Одноточечный контакт нити и тела

Доказательство. Функция (9), очевидно, имеет вид (2). Остается доказать справедливость (3). Неравенство $q(x) > 0$ выполнено только при $x = L$; из (1), (9), (10) нетрудно найти, что $r(L) = 0$; тем самым, первое соотношение в (3) выполнено. При $0 \le x \le L$ из (1), (9), (10) можно получить следующее представление для $r(x)$:

$$r(x) = -\frac{f(0)F}{f(L)g}\int_x^L \frac{ds}{m(s)} + \int_0^x \frac{\psi(s)ds}{m(s)}, \qquad (11)$$

где
$$\psi(x) = \frac{F}{f(L)g}\int_0^L \left(\int_0^s (m(t)f'(t))'\,dt\right)\frac{ds}{m(s)} - \int_0^x (m(t)f'(t))'\,dt\,.$$

Так как $(m(x)f'(x))' > 0$, то $\psi(0) > 0$ и $\psi(x)$ убывает при $0 \le x \le L$. Если $\psi(L) \ge 0$, то $\psi(x) > 0$ при $0 \le x < L$; тогда из (11) следует неверное неравенство $r(L) > 0$; следовательно, $\psi(L) < 0$. Тогда существует $0 < x^* < L$, такое, что $\psi(x) > 0$ при $0 \le x < x^*$ и $\psi(x) < 0$ при $x^* < x \le L$; следовательно, второе слагаемое в (11), обращаясь в нуль при $x = L$ (так как $r(L) = 0$), возрастает при $0 \le x < x^*$ и убывает при $x^* < x \le L$. Поэтому данное слагаемое неотрицательно при $0 \le x \le L$. Первое слагаемое в (11) неотрицательно вследствие условия $f(0) < 0$. Таким образом, $r(x) \ge 0$; тем самым, второе соотношение в (3) выполнено и утверждение 3 доказано.

Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Можно показать, что утверждения 2 и 3 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функций $f(x)$ и $m(x)$. Функцию $f(x)$ можно считать лишь непрерывно дифференцируемой и дважды кусочно-непрерывно дифференцируемой, доопределяя $f''(x)$ в точках излома $f'(x)$ по непрерывности слева. Функцию $m(x)$ можно считать лишь кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой, доопределяя $m'(x)$ в точках излома $m(x)$ по непрерывности слева и добавляя к $m'(x)$ в точках разрыва $m(x)$ (первого рода) соответствующие δ-функции.

Использованный подход к постановке и решению контактной задачи для нити и твердого тела может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда $(m(x)f'(x))'$ меняет знак), так и для решения близких контактных задач для нитей, струн и балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. *Осипенко М.А.* Об одной контактной задаче для системы струн // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. 2005. № 1. С. 82–86.
3. *Осипенко М.А.*, *Няшин Ю.И.* Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1. С. 77–84.
4. *Осипенко М.А.* Контактная задача для двух струн с переменными натяжениями // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2014. Т. 6. № 3. С. 66–71.
5. *Осипенко М.А.* Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
6. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1998. 416 с.

Статья поступила 01.10.2014 г.

Osipenko M.A. THE PROBLEM OF UNILATERAL CONTACT OF FLEXIBLE NON-STRETCHABLE ROPE AND RIGID SOLID. DOI 10.17223/19988621/33/8

The flexible nonstretchable rope is one of simplest mechanical systems with the infinite number of degrees of freedom. Contact problems can be posed for such ropes, as well as for the related one-dimensional systems (strings and beams). The unbounded contact problem for heavy flexible nonstretchable rope and smooth rigid solid of a given shape is considered. The rope has one end fixed and the other end free. The rope density may be variable. The presence of a rigid solid slightly deflects the rope from the vertical line. The problem is to find the rope shape and can be reduced to finding the density of the interacting forces between the rope and the solid. This density is the sum of the piecewise-continuous part and concentrated forces. These forces are described by Dirac's delta-function. The contact conditions are as follows. The density should be non-negative, the distance between the rope and the body should be non-negative, and this distance should be equal to zero at points where the density is positive. There are two approaches to such problems. The first one is variational. Here, the rope shape is in question. The rigorous problem statements and (rather complicated) proofs of uniqueness and existence of solutions are possible in this approach. However, the analytical solutions usually are not considered here. Even if the hypothetical analytical solution is obtained, it is not easy to establish whether it is really the solution (i.e., whether it minimizes some functional or satisfies some variational inequality). The second approach is based on the theory of strength of materials. It is convenient here to consider the density of the interacting forces as the function to be found. It is often possible to construct and to verify the hypothetical analytical solution. However, this approach lacks for the rigorous problem statement. Even the formulation of the theorem of the uniqueness of the solution is impossible without this rigorous statement. The present article uses the second approach with some improvements and refinements. Then, as in the first approach, the rigorous problem statement can be formulated. Further, it is easy to prove the uniqueness of the solution and to substantiate the constructed analytical solution. This construction also proves the existence of the solution. The substantiation of the solution includes proving the non-negativity of the contact forces and contact distances and proves the existence of a root of transcendental equation that yields the length of the contact segment. It is shown that different contact patterns are possible: a contact at the point and a contact along a rope segment. The pattern kind depends on the shape of the rigid solid.

Keywords: flexible nonstretchable rope, unilateral contact, contact problem, uniqueness of solution, analytical solution.

Osipenko Michael Anatol'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof.,
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation)

E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

REFERENCES

1. Merkin D.R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti*. Moskow, Nauka Publ., 1980, 240 p. (in Russian)
2. Osipenko M.A. Ob odnoy kontaktnoy zadache dlya sistemy strun. *Vestnik PGTU. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2005, no. 1, pp. 82–86. (in Russian)
3. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Ob odnom podkhode k resheniyu nekotorykh odnomernykh kontaktnykh zadach. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya*, 2011, vol. 11. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, no. 1, pp. 77–84. (in Russian)
4. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha dlya dvukh strun s peremennymi natyazheniyami. *Vestnik YuUrGU. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 66–71. (in Russian)
5. Osipenko M.A. Kontaktnaya zadacha ob izgibe dvukhlistovoy ressory s listami peremennoy tolshchiny. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 1(27), pp. 90–94. (in Russian)
6. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki*. Moskow, Vysshaya shkola Publ., 1998, 416 p. (in Russian)