

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2015

№ 2 (31)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.



EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics.
Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof. of the Applied Mathematics Department.
Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Science, Associate Prof. of the Operation Research Department. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Science, Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department

Gennady Koshkin – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Cybernetics Department

Yury Kostyuk – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Informatics Department

Anjela Matrosova – Doctor of Science, Prof., Head of the Programming Department

Anatoly Nazarov – Doctor of Science, Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department

Sergey Sushchenko – Doctor of Science, Prof., Head of the Applied of Information Department, Dean of the Faculty of Informatics

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Science, Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Science, Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Nina Yevtushenko
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. каф. исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ.
Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. каф. прикладной математики ТГУ.
Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – отв. секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. каф. исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и математического моделирования ТГУ

Косшкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. каф. программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.
Университет VII
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р техн. наук, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии,
гл. науч. сотр. фирмы
«Синописис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031).

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России». Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» включен в Перечень изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций, а также входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте:
<http://journals.tsu.ru/informatics/>

СОДЕРЖАНИЕ

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающем мертвом времени и условия его рекуррентности	4
Глазкова А.В. Оценка степени близости категорий текстов при решении задач классификации электронных документов	18
Задиранова Л.А., Моисеева С.П. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе ММРР $ M _{\infty}$ с повторным обслуживанием	26
Келлер Ю.А. Применение метода главных компонент для подбора участков-кандидатов под выравнивание профиля приёмистости	35
Семёнова М.А., Чимитова Е.В. Критерии проверки гипотез о параметрах обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей при неизвестном распределении времен жизни	41
Сиротина М.Н. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке при непродлевающем мертвом времени и условия рекуррентности потока	53
Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Грамотина О.В. Синергетические эффекты в многоканальных системах обслуживания с групповым поступлением заявок	68

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М. Перспективы проектирования БД, открывающиеся с применением современных семантических моделей данных	73
---	----

ОБЗОР

Змеев О.А., Иванова Л.С. Поиск артефактов проектирования. Обзор подходов	81
Сведения об авторах	91

CONTENTS

DATA PROCESSING

Bakholdina M.A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time and flow recurrence conditions	4
Glazkova A.V. The evaluation of the proximity of text categories for solving electronic documents classification tasks	18
Zadiranova L.A., Moiseeva S.P. Asymptotic analysis of the flow of repeated requests in system MMPP $ M _{\infty}$ with repeated requests	26
Keller Y.A. Using the method of principal components for selecting candidate wells for improving water injection profile	35
Semenova M.A., Chimitova E.V. Testing hypothesis of parameters of generalized proportional hazards models under unknown lifetime distribution	41
Sirotina M.N. Joint probability density function of the interval duration between an adjacent events of the modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time and recurrence conditions of the flow	53
Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Gramotina O.V. Synergetic effects in multichannel queuing systems with group arrivals of customers	68

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M. Database design prospects opening with application of modern semantic data models	73
---	----

REVIEW

Zmeev O.A., Ivanova L.S. Design artifacts detection. Review of the approaches	81
Brief information about the authors	91

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI 10.17223/19988605/31/1

М.А. Бахолдина

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ И УСЛОВИЯ ЕГО РЕКУРРЕНТНОСТИ

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид плотности вероятностей и совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока. Формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; мертвое время; плотность вероятностей длительности интервала; совместная плотность вероятностей длительностей интервалов; условия рекуррентности потока событий.

Математические модели теории массового обслуживания находят широкое применение при описании реальных физических, технических и других объектов и систем. Стоит отметить, что условия функционирования реальных систем таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, и часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Данные потоки можно охарактеризовать двумя случайностями: первая случайность – это число событий на любом рассматриваемом интервале функционирования потока; вторая случайность – это случайный процесс $\lambda(t)$, называемый интенсивностью потока [1–5].

Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два основных класса: к первому относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [2]; ко второму относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Потоки второго класса наиболее характерны для реальных телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетей связи. Впервые и независимо они были введены в рассмотрение в работах [6, 7]. В современной литературе данные потоки событий наиболее часто называют либо дважды стохастическими потоками, либо MAP-потоками, либо MC-потоками событий [8–13].

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, MC-потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий [14–16]; 2) асинхронные потоки – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [17–19]; 3) полусинхронные потоки – потоки, у которых для одного

множества состояний справедливо определение первого типа, а для остальных состояний справедливо определение второго типа [20–22]. Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки возможно представить в виде моделей МАР-потоков событий с определенными ограничениями на параметры последних [23].

Стоит отметить, что интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, Р2Р-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [24–29]. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [30–33]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [34–37].

Отдельно стоит отметить, что одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживающий прибор, порождает период так называемого мертвого времени [38], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В данной работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [20] и обобщенного полусинхронного потока [39] и относящийся к классу МАР-потоков событий. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [31–33], находятся явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и явный вид совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями 1, 2: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в первом (втором) состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β (α). Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в первом (втором) состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt (здесь и далее) – достаточно малая величина, с вероятностью $\beta\Delta t + o(\Delta t)$ (с вероятностью $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$) пребывание процесса $\lambda(t)$ в первом (во втором) состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ перейдет из первого (второго) состояния во второе (первое). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе воз-

можен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии (т.е. сначала наступает событие потока, затем происходит либо не происходит переход процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе). Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\beta = 0$, то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [39].

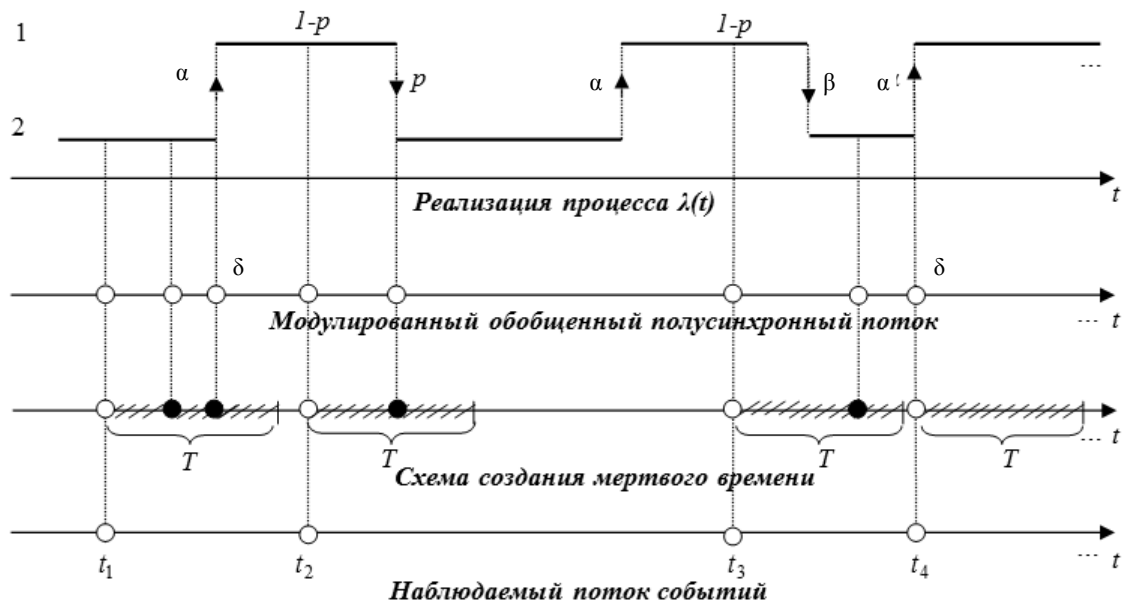


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1 , λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквой δ ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые $t_1, t_2, \dots$ – белыми.

Заметим, что в определении модулированного обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает дополнительное событие по-

тока при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем выводе плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможны два варианта, связанных с наступлением события и переходом процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса $\lambda(t)$, затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. В силу этого при получении численных результатов путем имитационного моделирования наблюдаемого потока событий необходимо учитывать реальную ситуацию.

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots$. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события $t_k, k=1,2,\dots$. Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k=1,2,\dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau), \tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. Пусть теперь $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$ – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$. Их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно рассмотреть соседние интервалы $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$ с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2; \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau), \tau \geq 0$ и явного вида совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$, а также в установлении условий рекуррентности наблюдаемого потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени $(0, \tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Значение длительности данного интервала есть $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t \geq 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ есть условная вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda(0) = \lambda_j, j, k = 1, 2$. Соответствующую этой вероятности плотность вероятностей обозначим через $\tilde{p}_{jk}(t), j, k = 1, 2$. Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau = 0$) в состояние j (момент времени $\tau = T$), $i, j = 1, 2$, и вероятность $\pi_i(0|T)$ – условная (финальная) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i = 1, 2$) при условии, что в этот момент времени наступило со-

бытие наблюдаемого потока, розыгрыш состояний произошел и наступил период мертвого времени длительности T . Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau-T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем явные выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$, $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0|T)$, $i, j, k = 1, 2$.

Для вероятностей $p_{jk}(t)$ справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} p'_{11}(t) &= -(\lambda_1 + \beta)p_{11}(t) + \alpha(1 - \delta)p_{12}(t), & p'_{12}(t) &= -(\lambda_2 + \alpha)p_{12}(t) + \beta p_{11}(t); \\ p'_{22}(t) &= -(\lambda_2 + \alpha)p_{22}(t) + \beta p_{21}(t), & p'_{21}(t) &= -(\lambda_1 + \beta)p_{21}(t) + \alpha(1 - \delta)p_{22}(t), \end{aligned}$$

с начальными условиями $p_{11}(0) = 1$, $p_{12}(0) = 0$; $p_{22}(0) = 1$, $p_{21}(0) = 0$, решая которые, находим

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} [(\lambda_2 + \alpha - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha - z_2)e^{-z_2 t}], & p_{12}(t) &= \frac{\beta}{z_2 - z_1} (e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}), \\ p_{21}(t) &= \frac{\alpha(1 - \delta)}{z_2 - z_1} (e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}), & p_{22}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} [(\lambda_1 + \beta - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \beta - z_2)e^{-z_2 t}], \\ z_1 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right), \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right), & 0 < z_1 < z_2. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с определением модулированного обобщенного полусинхронного потока событий введем вероятность $p_{11}(t)e^{-\beta\Delta t}(1 - e^{-\lambda_1\Delta t})(1 - p) = p_{11}(t)\lambda_1(1 - p)\Delta t + o(\Delta t)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий потока процесс $\lambda(t)$ перешел на интервале $(0, t)$ из первого состояния в первое ($\lambda(0) = \lambda_1, \lambda(t) = \lambda_1$) и на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 , при этом процесс $\lambda(t)$ остался в первом состоянии. Аналогичные совместные вероятности для различных j и k ($j, k = 1, 2$) примут вид

$$\begin{aligned} p_{11}(t)\lambda_1(1 - p)\Delta t + o(\Delta t), & p_{12}(t)\alpha\delta\Delta t + o(\Delta t), & p_{11}(t)\lambda_1 p\Delta t + o(\Delta t), & p_{12}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t); \\ p_{21}(t)\lambda_1(1 - p)\Delta t + o(\Delta t), & p_{22}(t)\alpha\delta\Delta t + o(\Delta t), & p_{21}(t)\lambda_1 p\Delta t + o(\Delta t), & p_{22}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Соответствующие плотности вероятностей выпишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}^{(1)}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1(1 - p), & \tilde{p}_{11}^{(2)}(t) &= p_{12}(t)\alpha\delta, & \tilde{p}_{11}^{(1)}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1 p, & \tilde{p}_{12}^{(2)}(t) &= p_{12}(t)\lambda_2; \\ \tilde{p}_{21}^{(1)}(t) &= p_{21}(t)\lambda_1(1 - p), & \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) &= p_{22}(t)\alpha\delta, & \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) &= p_{21}(t)\lambda_1 p, & \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) &= p_{22}(t)\lambda_2. \end{aligned}$$

Тогда плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале $(0, t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент времени t процесс $\lambda(t)$ перейдет на этом интервале из состояния j в состояние k , запишутся для различных j и k ($j, k = 1, 2$) как

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1(1 - p) + p_{12}(t)\alpha\delta, & \tilde{p}_{12}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1 p + p_{12}(t)\lambda_2; \\ \tilde{p}_{21}(t) &= p_{21}(t)\lambda_1(1 - p) + p_{22}(t)\alpha\delta, & \tilde{p}_{22}(t) &= p_{21}(t)\lambda_1 p + p_{22}(t)\lambda_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$.

Для вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} q'_{11}(\tau) &= -(p\lambda_1 + \beta)q_{11}(\tau) + \alpha q_{12}(\tau), & q'_{12}(\tau) &= (p\lambda_1 + \beta)q_{11}(\tau) - \alpha q_{12}(\tau); \\ q'_{21}(\tau) &= -(p\lambda_1 + \beta)q_{21}(\tau) + \alpha q_{22}(\tau), & q'_{22}(\tau) &= (p\lambda_1 + \beta)q_{21}(\tau) - \alpha q_{22}(\tau) \end{aligned}$$

с начальными условиями $q_{11}(0) = 1$, $q_{12}(0) = 0$; $q_{22}(0) = 1$, $q_{21}(0) = 0$, решая которые, находим для $\tau = T$

$$\begin{aligned}
q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, \\
q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, \\
\pi_1 &= \frac{\alpha}{p\lambda_1 + \beta + \alpha}, & \pi_2 &= \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Перейдем к нахождению вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$. Обозначим через π_{ij} переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $\tau=0$ до момента наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации последующего розыгрыша состояний потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i, j=1,2$). Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложенную цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0|T)$ справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}, & \pi_2(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\
\pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Введем в рассмотрение вероятность p_{ij} – переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $t=0$ (момента окончания мертвого времени) до момента наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i, j=1,2$). При этом вероятности p_{ij} определяются в виде

$$p_{ij} = \int_0^\infty \tilde{p}_{ij}(t) dt, \tag{6}$$

где $\tilde{p}_{ij}(t)$ определены в (3), $p_{ij}(t)$ – в (2) ($i, j=1,2$). Вычисляя интегралы (6) для различных i и j ($i, j=1,2$):

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(t) dt = \lambda_1(1-p) \int_0^\infty p_{11}(t) dt + \alpha\delta \int_0^\infty p_{12}(t) dt, \\
p_{12} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(t) dt = \lambda_1 p \int_0^\infty p_{11}(t) dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{12}(t) dt, \\
p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(t) dt = \lambda_1(1-p) \int_0^\infty p_{21}(t) dt + \alpha\delta \int_0^\infty p_{22}(t) dt, \\
p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(t) dt = \lambda_1 p \int_0^\infty p_{21}(t) dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{22}(t) dt,
\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2} [\lambda_1(1-p)(\lambda_2 + \alpha) + \alpha\delta\beta], & p_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} [p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2\beta]; \\
p_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} [\lambda_1\alpha(1-p + p\delta) + \alpha\delta\beta], & p_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2} [\lambda_2(\lambda_1 + \beta) + p\lambda_1\alpha(1-\delta)],
\end{aligned} \tag{7}$$

где $z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha \delta \beta$.

Так как процесс $\lambda(t)$ является марковским, то полученные переходные вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{ij} , $i, j=1,2$, позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij} , $i, j=1,2$:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, & \pi_{12} &= q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}; \\
\pi_{21} &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, & \pi_{22} &= q_{22}(T)p_{22} + q_{21}(T)p_{12}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left\{ \lambda_1 (1-p)(\lambda_2 + \alpha) + \alpha \delta \beta - \lambda_1 \pi_2 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}] \right\}, \\
\pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left\{ p\lambda_1 (\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2 \beta + \lambda_1 \pi_2 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}] \right\}, \\
\pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left\{ \alpha [\lambda_1 (1-p + p\delta) + \delta \beta] + \lambda_1 \pi_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}] \right\}, \\
\pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left\{ \lambda_2 (\lambda_1 + \beta) + p\lambda_1 \alpha (1-\delta) - \lambda_1 \pi_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}] \right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Далее, подставляя (9) в (5), находим выражения для $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$:

$$\begin{aligned}
\pi_1(0|T) &= \frac{\alpha [\lambda_1 (1-p + p\delta) + \delta \beta] + \lambda_1 \pi_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha \delta) + \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}, \\
\pi_2(0|T) &= \frac{p\lambda_1 (\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2 \beta + \lambda_1 \pi_2 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha \delta) + \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha \delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]},
\end{aligned} \tag{10}$$

где π_1 , π_2 определены в (4).

Подставляя в (1) сначала (3), затем (2), (4) и (10), выполняя при этом достаточно трудоемкие преобразования и учитывая, что $t = \tau - T$, получаем

$$\begin{aligned}
p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\
\gamma(T) &= \frac{1}{z_2 - z_1} [z_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \delta) \pi_2(T)],
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\pi_1(T) &= \pi_1 + [\pi_2 - \pi_2(0|T)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, \\
\pi_2(T) &= \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T},
\end{aligned} \tag{12}$$

где z_i определены в (2); π_i – в (4); $\pi_i(0|T)$ – в (10), $i=1,2$.

В частности, положив в (12), (11) $T = 0$, получаем формулу для $p(\tau)$, приведенную в [40–42].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока, при этом $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого события, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго события. В силу того что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, то в обозначениях раздела 2 совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ принимает вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \end{cases} \tag{13}$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$ определены в (3), при этом в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(t)$, $i, j=1,2$, необходимо произвести замену t на $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$. Тогда, подставляя в (13) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (3), затем $p_{jk}(t^{(1)})$, $p_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (2) для $t = t^{(1)}$ и $t = t^{(2)}$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, определенные в (4), и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, определенные в (10), и выполняя достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$\begin{aligned}
p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\
p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]}{z_1 z_2} \times \\
&\times \left[z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)} \right] \left[z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha \delta \beta$ и $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (11) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Из (14) следует, что модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях неполной наблюдаемости (наличия мертвого времени), в общем случае является коррелированным потоком. Положив в (14) $T = 0$, получаем формулу для совместной плотности вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$, приведенную в [40, 41].

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями потока, дисперсию и ковариацию:

$$\begin{aligned}
M\tau &= T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}, \quad D\tau = 2 \left[\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2^2} \right] - \left[\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2} \right]^2, \\
\text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \lambda_1 \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{(\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)) (z_2 - z_1)^2}{(z_1 z_2)^3}.
\end{aligned}$$

Отдельно стоит отметить, что в рассматриваемом потоке присутствуют события трех типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; 3) дополнительные события. Типы событий являются неразличимыми. Введем в рассмотрение вероятности $q_1^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 (событие первого типа) и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из первого состояния в i -е ($i = 1, 2$); $q_2(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 (событие второго типа); $q_3(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть дополнительное событие (событие третьего типа). Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для введенных вероятностей:

$$\begin{aligned}
q_1^{(1)}(T) &= \lambda_1 (1 - p) \frac{\alpha + [(\lambda_2 + \alpha\delta)\pi_1 - \alpha\delta] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}}, \\
q_1^{(2)}(T) &= p \lambda_1 \frac{\alpha + [(\lambda_2 + \alpha\delta)\pi_1 - \alpha\delta] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}}, \\
q_2(T) &= \lambda_2 \frac{p\lambda_1 + \beta + \lambda_1 (1 - p - \pi_1) [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}}, \\
q_3(T) &= \alpha\delta \frac{p\lambda_1 + \beta + \lambda_1 (1 - p - \pi_1) [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}}.
\end{aligned}$$

Тогда стационарная вероятность $q_1(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 , запишется в виде

$$q_1(T) = q_1^{(1)}(T) + q_1^{(2)}(T) = \lambda_1 \frac{\alpha + [(\lambda_2 + \alpha\delta)\pi_1 - \alpha\delta] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}}.$$

Отметим, что $\pi_1(0|T) = q_1^{(1)}(T) + q_3(T)$, $\pi_2(0|T) = q_1^{(2)}(T) + q_2(T)$.

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражения (11), (12) для $\gamma(T)$, $\pi_1(T)$, $\pi_2(T)$ и выражение (10) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, можно показать, что

$$\gamma(T)[1-\gamma(T)] = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \alpha\delta\beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)][(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0)]z_1z_2}{(z_2 - z_1)^2 (p\lambda_1 + \beta + \alpha)^2 [z_1z_2 - \lambda_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]^2} \times$$

$$\times \{ z_1z_2 - [2z_1z_2 - (p\lambda_1 + \beta + \alpha)(z_1 + z_2)]e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} + [z_1z_2 - (p\lambda_1 + \beta + \alpha)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2)]e^{-2(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \},$$

где $\pi_i(0)$ есть условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i = 1, 2$) при условии, что в этот момент времени событие потока наступило ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$), и определяется следующими выражениями:

$$\pi_1(0) = \alpha \frac{\lambda_1(1-p+p\delta) + \delta\beta}{\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \alpha\delta\beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)}, \quad \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2\beta}{\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \alpha\delta\beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)}.$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (15) (обозначим его $f(T)$), после преобразования примет вид

$$f(T) = z_1z_2 \left[1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \right]^2 + (p\lambda_1 + \beta + \alpha)e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \times [z_1 + z_2 - (\lambda_1(1-p) + \lambda_2)e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}] =$$

$$= f_1(T) + f_2(T) = f_1(T) + \phi_1(T)\phi_2(T).$$

Нетрудно показать, что для любых $T \geq 0$ имеем $f_1(T) \geq 0$, $\phi_1(T) > 0$ и $\phi_2(T) > 0$ и, следовательно, $f_2(T) > 0$. Таким образом, для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) > 0$. Из (15) вытекает, что:

1) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$, то совместная плотность (14) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (2) следует, что $z_1 = \lambda_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha + \beta$; из (11) следует, что $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.

2) если $(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0) = 0$, то совместная плотность (14) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (2) следует, что $z_1 = \lambda_1(1-p+p\delta) + \beta\delta$; из (11) следует, что $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = z_1 e^{-z_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.

Из (14) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$: $\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta) = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = p; \quad \pi_2(T) = \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha} + \left[p - \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha} \right] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}; \quad p \neq 1.$$

Для $p = 1$ из третьего условия факторизации вытекает, что $\delta = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = 1; \quad \pi_2(T) = \frac{1}{\lambda_1 + \beta + \alpha} [\lambda_1 + \beta + \alpha e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}].$$

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ есть вложенная цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации либо их комбинаций можно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k)$ для любого k . Последнее означает, что для данных ситуаций наблюдаемый поток событий является рекуррентным потоком.

Действительно, пусть $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей $\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$. Для $k = 2$ имеет место $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$. Сделаем предположение математической индукции: $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1) \dots p_T(\tau_k)$. Так как моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$,

t_k, t_{k+1} порождают вложенную цепь Маркова, то поток событий обладает марковским свойством в моменты наступления событий. Тогда $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) p_T(\tau_{k+1} | \tau_1, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1, \dots, \tau_k) p_T(\tau_{k+1} | \tau_k)$, где $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) / p_T(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}), k = 1, 2, \dots$, местоположение которых на временной оси произвольно, справедливо $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_k) p_T(\tau_{k+1})$, то получаем $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_{k+1})$, что доказывает факторизацию совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1})$.

Отметим, что условия факторизации для случая $T = 0$ [40, 41] и $T \neq 0$ идентичны.

Ниже обсуждаются условия рекуррентности, при которых необходимо учитывать результаты, приведенные в [31–33].

Для первого условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность $p_T(\tau)$ экспоненциальная, зависит от предыстории, т.е. от моментов наступления событий $t_1, \dots, t_k$ наблюдаемого потока. Таким образом, имеется некоторая близость наблюдаемого потока к простейшему. Если к ограничению $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ добавить дополнительное ограничение $\lambda_1(1-p) - \alpha\delta = 0$, то вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не будет зависеть от предыстории, а только от ее значения в момент наступления события наблюдаемого потока t_k , т.е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0) = \alpha\delta / (\lambda_2 + \alpha\delta)$, $k = 1, 2, \dots$, так что здесь имеет место наибольшая близость наблюдаемого потока к простейшему.

Для второго условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность $p_T(\tau)$ экспоненциальная, также зависит от предыстории, т.е. от моментов наступления событий $t_1, \dots, t_k$ наблюдаемого потока. Таким образом, имеется некоторая близость наблюдаемого потока к простейшему. Для третьего условия факторизации плотность $p_T(\tau)$ определяется формулой (11) и не является экспоненциальной, в связи с этим близости наблюдаемого потока к простейшему не наблюдается.

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценивания неизвестных параметров, задающих модулированный обобщенный полусинхронный поток событий в условиях непродлевающего мертвого времени. Для оценки неизвестных параметров потока можно использовать метод моментов и метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
3. Cox D.R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
4. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1981.
5. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. New York : Springer-Verlag, 1995.
6. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
7. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
8. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
10. Breuer L. An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure // Annals of Operations Research. 2002. V. 112. P. 123–138.
11. Telek M., Horvath G. A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 1153–1168.

12. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. P. 1326–1339.
13. Horvath A., Horvath G., Telek M. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues // Performance Evaluation. 2010. V. 67. P. 759–788.
14. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
15. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 24–29.
17. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, Issue 3. P. 283–290.
18. Горцев А.М., Нуссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
20. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
22. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
23. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
24. Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A. Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
25. Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N. Modelling the mean of a doubly stochastic poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
26. Centanni S., Minozzo M. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.
27. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004. 2004. P. 116–119.
28. Hossain M.M., Lawson A.B. Approximate methods in Bayesian point process spatial models // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
29. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 91–101.
30. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovov A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
31. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
32. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.
33. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
35. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
36. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
37. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
38. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, 2007.
39. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.

40. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
41. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и условия его рекуррентности // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 137–143.
42. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Междунар. науч. конф., посв. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева. Минск, 23–26 фев. 2015 г. / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. Минск : РИВШ, 2015. С. 17–22.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 февраля 2014 г.

Bakholdina Maria A. (Tomsk state university, Russian Federation).

Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time and flow recurrence conditions.

Keywords: modulated semi-synchronous integrated flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); constant dead time; probability density; joint probability density; flow recurrence conditions.

DOI 10.17223/19988605/31/1

In this paper, we consider the modulated semi-synchronous integrated flow of events, which is one of the mathematical models for an incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the state 1 $\lambda(t) = \lambda_1$ and in the state 2 $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). The duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first (second) state is distributed according to the exponential law with parameter β (α). During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, a Poisson flow of events with intensity λ_i , $i = 1, 2$, arrives. Also, at any moment of an event occurrence in state 1 of the process $\lambda(t)$, the process can change its state to state 2 with the probability p ($0 \leq p \leq 1$) or continue to stay in state 1 with the complementary probability $1 - p$. I.e., after an event occurrence the process $\lambda(t)$ can change or not change its state from state 1 to state 2. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 2 to state 1 at the moment of an event occurring in the second state is impossible. At the moment when the state changes from the second to the first state, an additional event is assumed to be initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The registration of the flow events is considered in condition of a constant dead time (of incomplete observability). The dead time period of a constant duration T begins after every registered at the moment t_k , $k \geq 1$, event. During this period, no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of dead time of duration T and so on.

Then, we obtain explicitly the expressions for the probability density $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, and joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, of the intervals length between neighboring flow events:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} [z_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)\pi_2(T)], \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T},$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2\beta + \lambda_1\pi_2[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)][1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{\lambda_1\alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \lambda_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)][1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}, \quad \pi_2 = \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha},$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1-\delta)} \right), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \gamma(T)[1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]}{z_1 z_2} [z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)}] \times$$

$$\times [z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T.$$

The recurrence conditions of the observable flow of events are found.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B.* 17. pp. 129-164.
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society.* 60 (4). pp. 923-930.
3. Cox, D.R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
4. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
5. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
6. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication net-works for digital computer. *Engineering cybernetics.* 17(6). pp. 66-73.
7. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability.* 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
10. Breuer, L. (2002) An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure. *Annals of Operations Research.* 112. pp. 123-138. DOI: 10.1023/A:1020981005544
11. Telek, M. & Horvath, G. (2007) A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method. *Performance Evaluation.* 64. pp. 1153-1168. DOI: 10.1016/j.peva.2007.06.001
12. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking.* 17. pp. 1326-1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
13. Horvath, A., Horvath, G. & Telek, M. (2010) A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues. *Performance Evaluation.* 67. pp. 759–788. DOI: 10.1109/QEST.2008.26
14. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control.* 69 (9). pp. 1517–1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a synchronous alternating flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 6. Appendix. pp. 232-239.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 1. Appendix. pp. 24-29.
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications.* 21 (3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
18. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal.* 10. pp. 35–49. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y
19. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) States estimation of the MC flow of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal.* 12. pp. 67-85.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques.* 46 (6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
21. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous doubly stochastic flow of events in condition of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies.* 13 (1). pp. 31-41. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 1. pp. 18-23. (In Russian).
23. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) On relationship of MC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(14). pp. 13-21.
24. Adamu, A., Gaidamaka Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science.* Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. St. Petersburg, Russia. 23rd to 25th August. pp. 428-439.
25. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis.* 50(10). pp. 2655-2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
26. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association.* 101. pp. 1582-1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
27. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes. *Proceedings of the International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004.* pp. 116-119.
28. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis.* 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1016/j.csda.2008.05.017

29. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2012) Distribution of the conditional time to ruin of an insurance company under double stochastic insurance premium and insurance payment flows. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 91-101. (In Russian).
30. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73 (8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
31. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
32. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13–24.
33. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9 (29). pp. 1433-1451.
34. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti «mertvogo vremeni» i intensivnostey sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Estimation of the dead time period and intensity of synchronous doubly stochastic flow of events]. *Radiotekhnika*. 10. pp. 8-16.
35. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 3. pp 179-184. DOI: 10.1023/A:1014718921138
36. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Estimation of the parameters of a partially observed alternating flow of events]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10 (3). pp. 273–280.
37. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radio-tekhnika*. 12. pp. 3-7.
38. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes*. London: Springer-Verlag.
39. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2010) Optimal states estimation of integrated semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
40. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
41. Bakholdina, M.A. & Gortsev A.M. (2014) [Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014)* [Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2014)]. Proc. of the 13th International Scientific and Practical Conference. Tomsk. 20th to 22nd November. Tomsk: Tomsk State University. pp. 137-143. (In Russian).
42. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density of the interval length between neighboring events of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of the International Scientific Conference. Minsk. 23rd to 26th February. Minsk: RIVSh. pp. 17-22. (In Russian).

А.В. Глазкова

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ БЛИЗОСТИ КАТЕГОРИЙ ТЕКСТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ДОКУМЕНТОВ

Предлагается подход к оценке близости категорий текстов при решении задач классификации электронных документов на примере их отнесения к определенной возрастной аудитории. Введены понятия эквивалентности на множестве текстов и меры сходства категорий текстов. Приведен пример решения задачи классификации для взрослой и детской аудиторий.

Ключевые слова: извлечение информации; классификация текстов; математическое моделирование; обработка естественного языка.

Работа посвящена вопросам автоматической классификации документов на естественном языке. Задача классификации неструктурированной текстовой информации актуальна в первую очередь для решения проблем оптимизации информационного поиска в сети Интернет и хранилищах электронных документов. Быстрое увеличение количества информационных ресурсов порождает необходимость усовершенствования механизмов классификации текстов и обуславливает потребность в разработке новых методов и алгоритмов для решения данного рода задач.

При наличии обучающей выборки в существующих классификаторах, применяемых в различных информационных системах, используются методы машинного обучения, преимущественно основанные на байесовской модели и модели векторного пространства. В целях увеличения точности классификации текстов на естественном языке применяется оценка семантической близости текстов [1]. Одной из важных задач, решаемых при построении классификатора, является выбор классификационных признаков. При этом диапазон значений признаков может состоять как из двух значений, так и из конечного упорядоченного или неупорядоченного множества значений или бесконечного множества количественных значений [2–3].

Другой актуальной задачей, которой посвящено наше исследование, является не только отнесение данного текста к определенной категории, но и установление взаимосвязей между категориями.

Также рассматривается задача классификации текстов на примере их отнесения к той или иной возрастной категории адресатов. Возможность классифицировать тексты по возрастным группам их адресатов позволяет, в первую очередь, улучшать релевантность информационного поиска, а также усовершенствовать механизмы исключения из результатов поиска нежелательных запросов, например, сайтов, контент которых рассчитан на пользователя иной возрастной категории. Задача относится к числу слабоформализуемых за счет сложности естественного языка и многообразия его коммуникативных форм, поиск путей ее решения требует построения адекватных математических моделей процесса классификации.

Обсуждается подход к оценке степени близости категорий текстов, позволяющий оценить расстояние между рассматриваемыми категориями.

В контексте решаемой задачи тексты, адресованные одной возрастной группе читателей, должны быть отнесены в процессе классификации к одной категории. Однако на практике задача не решается столь однозначно, и тексты для одной возрастной категории адресатов могут также считаться адресованными другим возрастным аудиториям в том случае, когда они условно соответствуют уровням их коммуникативного развития. Например, тексты, предназначенные «соседним» возрастным группам, часто имеют незначительные отличия, что позволяет говорить о сходстве между ними, а также дает повод с определенной долей уверенности отнести текст, принадлежащий первой категории, ко второй. Также можно говорить о том, что текст, адресованный младшей возрастной категории, понятен и более

старшим читателям. Однако нельзя утверждать, что данный текст является в одинаковой степени интересным и информативным для представителей разных возрастных аудиторий, т.е. что он соответствует уровням коммуникативного развития обеих возрастных групп. Тогда в процессе классификации встает вопрос о величине различий между категориями текстов.

Под возрастной категорией понимается та возрастная группа, для которой данный текст, во-первых, является понятным с точки зрения различных разделов языкознания (лексики, синтаксиса и т.д.), во-вторых, соответствует уровню ее коммуникативного развития, является информативными и представляет интерес для аудитории.

Исходя из специфики поставленной задачи, особый интерес для исследования представляют работы, авторы которых извлекают из текста данные о его авторе или адресате. В ряде статей неоднократно рассматривались вопросы определения характеристик автора текста – его возраста, пола, типа личности и национальной принадлежности [4–6]. В [7] предлагается подход к применению методов распознавания адресанта текста для поиска записей террористической тематики в Интернете. В работах [8–10] рассматривается задача создания диалоговых систем, в контексте которой анализируются признаки, характеризующие текст с точки зрения его ориентации на различных адресатов. В [11] проведена классификация текстов по их автору с использованием потоковых методов классификации.

Подход к классификации поисковых запросов на основании оценки близости терминов предлагается в статье [12]. В [13] вводится метрика для оценивания синтаксического сходства между сверхкороткими текстами.

1. Постановка задачи

В [3] авторами был сформулирован подход к математическому моделированию задачи классификации. Отличие данного подхода от представленных ранее состоит в том, что он позволяет причислить текст к ряду пересекающихся категорий, однако дает возможность учесть то, что различия в уровнях коммуникативного развития представителей различных возрастных категорий не позволяют однозначно отнести текст из категории K_i в категорию K_j , где $i \leq j \leq n$.

Пусть дан текст T и множество категорий $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Необходимо найти подмножество K_I – категории, которым может принадлежать текст:

$$T \sim K_I, K_I = \{K_i : T \sim K_i\},$$

где $i = j_1, j_2, \dots, j_m$, $1 \leq j \leq n$, и $T \sim K_I$ означает принадлежность текста T к категории K_I .

Тогда категорию K_i можно представить в виде

$$K_i = \{q_j^K, w_j^K\}, j = \overline{1, L},$$

где q_j^K – классификационный признак, w_j^K – весовой коэффициент классификационного признака, L – общее число классификационных признаков. Таким образом, категория определяется набором поставленных в соответствие классификационным признакам критических значений, а текст, в свою очередь, характеризуется своим признаковым описанием – набором значений классификационных признаков.

Под весовым коэффициентом классификационного признака подразумевается некоторая числовая оценка значимости признака q_j^K в разделении объектов на классы в сравнении с другими признаками, которая может быть определена экспериментально или на основе существующих методик оценивания весовых коэффициентов значимости критериев (например, [14, 15]). Значения весовых коэффициентов признака могут различаться в зависимости от особенностей множества рассматриваемых текстов (тематики, стиля и т.д.). Введение весовых коэффициентов позволяет выполнить масштабирование значений различных классификационных признаков [16], что дает возможность проводить вычисления попарных ковариаций наборов признаков, характеризующих категории, с целью определения степени их близости.

2. Введение отношения эквивалентности на множестве текстов

В контексте данной задачи можно говорить о некотором пороговом значении в различии между признаковыми описаниями двух текстов, которое позволит считать данные признаковые описания до-

статочны близкими и условно совпадающими. Будем называть такие тексты принадлежащими к одному таксономическому виду [17], тогда

$$T_i \cong T_j. \quad (1)$$

Отношение (1) является отношением эквивалентности, поскольку для него выполнены условия рефлексивности, симметричности и транзитивности. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве текстов T , где

$$T_i \in T.$$

Тогда множество текстов можно разбить на непересекающиеся классы эквивалентности

$$T'_i | R = \{T'_i \in T | T'_i R T_i\}$$

и построить фактор-множество T/R по отношению к эквивалентности R .

В рамках рассматриваемой задачи классы эквивалентности включают в себя тексты с совпадающими признаковыми описаниями, при этом фактор-множеством T/R является множество всех классов эквивалентности, из чего следует [18]:

- 1) $T_i \in T'_i | R$ для любого $T_i \in T$;
- 2) $T_i | R = T_j | R \Leftrightarrow T_i R T_j$ для любых T_i, T_j из T ;
- 3) $T_i | R \neq T_j | R \Leftrightarrow T_i | R \cap T_j | R = \emptyset$;
- 4) $T = \bigcup_{t \in T} t | R$.

3. Введение меры близости текстов

Тексты, попавшие в один класс эквивалентности, являются носителями одного признакового описания, которое и позволяет считать их эквивалентными. При этом число текстов, входящих в рассматриваемую выборку и принадлежащих одному классу эквивалентности, служит выражением абсолютного веса данного класса. Поскольку фактор-множество является набором всех возможных классов эквивалентности при заданном отношении эквивалентности, оно включает в себя все возможные классы текстов, подлежащих классификации.

В контексте решаемой задачи преобразование исходного множества текстов в фактор-множество является по своей сути процессом формирования содержимого классов текстов, адресованных определенной возрастной аудитории. Фактически же, как говорилось выше, тексты, адресованные одной возрастной группе читателей, можно в некотором смысле считать адресованными и другим возрастным аудиториям. Кроме того, одна возрастная категория на практике может включать в себя тексты, относящиеся к нескольким классам эквивалентности, которые будут в контексте поставленной задачи иметь незначительные отличия.

В таком случае можно говорить о некой количественной величине различий между категориями текстов, имеющих не совпадающие признаковые описания и относящихся к разным классам эквивалентности. Для описания этой ситуации необходимо задать функцию расстояния (метрику) на множестве текстов [19–21], тем самым сконструировав метрическое пространство. Если значение функции расстояния будет меньше некоторого порогового значения, категории будут считаться достаточно близкими друг другу, признаковые описания входящих в них текстов окажутся схожими. Таким образом, значение функции расстояния $\rho(K_i, K_j)$ является показателем сходства между категориями K_i и K_j , причем чем меньше значение этой функции, тем более схожи классы и, следовательно,

$$\rho(K_i, K_j) = 0 \Leftrightarrow K_i \cong K_j.$$

Тогда для произвольной категории K_i справедливо неравенство

$$\rho(K_i, K_{1j}) \leq \rho(K_i, K_{2j}) \leq \dots \leq \rho(K_i, K_{nj}),$$

при этом K_{nj} представляет собой тексты остальных категорий, включенные в некую обучающую выборку текстов из категории K_i размером $n+1$. Для каждой категории K_i нумерация остальных категорий бу-

дет индивидуальной. Те категории, значения функций расстояния для которых будут невелики, содержат тексты со схожими признаковыми описаниями, которые в некоторых условиях могут рассматриваться как тексты, адресованные одной возрастной аудитории. Пороговое значение, определяющее схожесть категорий и показывающее величину различий между ними, может быть задано двумя способами: на основании экспертной оценки или исходя из экспериментальных данных.

В качестве меры близости категорий может быть принято расстояние Махаланобиса, поскольку признаки объектов, между которыми устанавливается мера сходства, являются статистически зависимыми, а числовая оценка их значимости определяется весовыми коэффициентами. Тогда расстояние между категориями K_i и K_j , представленными в виде векторов, характеризующих их классификационные признаки

$$K_i = (q_{i1}^K, q_{i2}^K, \dots, q_{iL}^K), \\ K_j = (q_{j1}^K, q_{j2}^K, \dots, q_{jL}^K),$$

определяется следующим образом:

$$\rho(K_i, K_j) = \sqrt{(K_i - K_j)^T \Lambda_{\text{cat}}^T C_{\text{cat}}^{-1} (K_i - K_j)},$$

где Λ_{cat} – матрица весовых коэффициентов; C_{cat} – матрица ковариации, т.е. матрица, составленная из попарных ковариаций элементов векторов K_i и K_j .

Попарными ковариациями значений признаков, составляющих вектора K_i и K_j , при этом являются

$$\text{cov}(q_{in}^K, q_{jn}^K) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{in_t}^K - \bar{q}_i^K)(q_{jn_t}^K - \bar{q}_j^K),$$

где $\bar{q}_i^K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{in_t}^K)$, $\bar{q}_j^K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{jn_t}^K)$ – средние значения выборок, $n = 1, \dots, L$.

4. Пример применения предложенного подхода

Предложенный подход реализован в рамках разработки прототипа программного комплекса для проведения автоматической классификации текстов на русском языке на основании возрастных категорий их адресатов.

В ходе разработки и тестирования использовались тексты, включенные в «Базу данных метатекстовой разметки Национального корпуса русского языка (коллекция детской литературы)» [22]. База состоит из заведомо качественных и максимально разнообразных текстов на русском языке с известным жанром.

Во время проведения эксперимента выделялись две категории: тексты, адресованные взрослым, и тексты, адресованные детям. Это обусловлено соответствующим делением текстов в выборке, используемой для эксперимента. В дальнейшем планируется увеличить число классификационных категорий.

В ходе работы был экспериментально выделен ряд информативных признаков, характеризующих различия между категориями. В данном примере использованы три количественных классификационных признака: средняя длина предложений в тексте, средняя длина слова в тексте, процент многосложных слов (содержащий более трех слогов). Выбор этих признаков основан на работах в области удобочитаемости текстов и обсуждается в [23].

Каждому тексту из выборки (объем выборки – 500 детских и 500 взрослых текстов) было сопоставлено признаковое описание – набор значений признаков и их весовых коэффициентов. Во время эксперимента всем признакам были назначены равные веса. Поскольку в данном случае в выборке представлены тексты только двух категорий, в категории детских текстов были выделены тексты, напечатанные в журналах, целевой аудиторией которых являются дети среднего школьного возраста (выборка 1) и тексты авторов, пишущих для дошкольного и младшего школьного возраста (выборка 2). Обозначив K_{adult} категорию текстов для взрослых, K_{V1} – категорию текстов выборки 1 и K_{V2} – категорию текстов выборки 2, было предположено, что

$$\rho(K_{\text{adult}}, K_{V1}) \leq \rho(K_{\text{adult}}, K_{V2}).$$

На графике (рис. 1) визуализированы значения признаков для текстов каждой категории, в целях удобства представления в каждой категории отображены по 30 текстов.

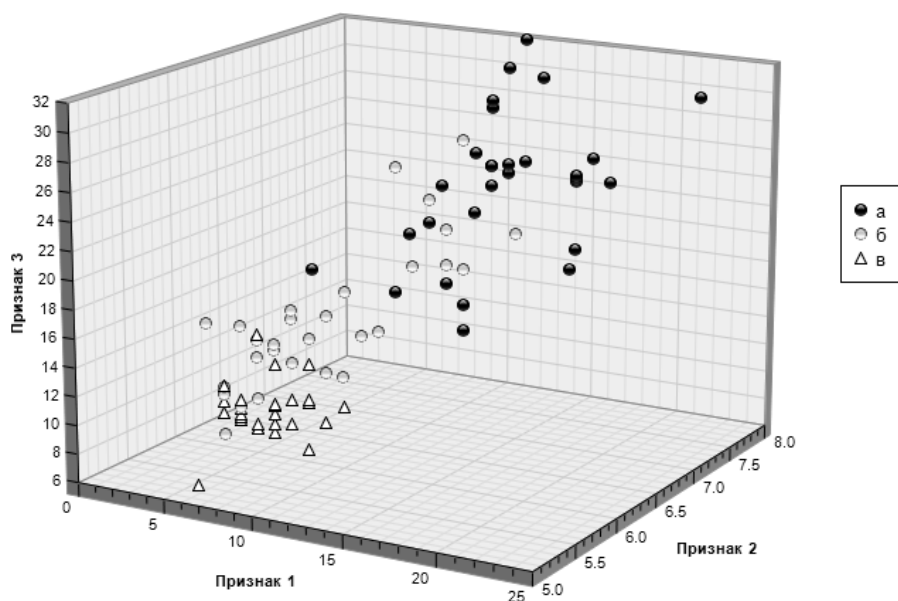


Рис. 1. Взаимное расположение текстов различных категорий: a – тексты категории K_{adult} ; $\bar{b}$ – тексты категории K_{I1} ; Δ – тексты категории K_{I2}

Основываясь на результатах, представленных в таблице, можно сделать вывод о том, что $\rho(K_{adult}, K_{I1}) < \rho(K_{adult}, K_{I2})$.

Полученные расстояния между категориями

Расстояние	Значение
$\rho(K_{adult}, K_{I1})$	1,7484
$\rho(K_{adult}, K_{I2})$	2,1157

Для оценки качества предложенного подхода использовалась процедура скользящего контроля. Функционал качества рассчитывался как сумма попарных внутриклассовых расстояний между текстами. В ходе эксперимента значение оценки скользящего контроля не превысило 7% от значения, полученного на тестовой выборке.

Заключение

В работе предложен и успешно протестирован подход к оценке близости категорий текстов при решении задач классификации электронных документов на примере их отнесения к определенной возрастной аудитории. Результаты применения предложенного подхода могут быть улучшены в ходе сопоставления классификационным признакам весовых коэффициентов, характеризующих их значимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нгуен Ба Нгок, Тузовский А.Ф. Классификация текстов на основе оценки семантической близости терминов // Известия Томского политехнического университета. 2012. № 5(320). С. 43–48.
2. Колесникова С.И. Методы анализа информативности разнотипных признаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 1(6). С. 69–80.
3. Глазкова А.В., Захарова И.Г. Подход к моделированию задачи автоматической классификации текстов (на примере их отнесения к определенной возрастной аудитории) // Вестник ТюмГУ. 2014. № 7. С. 205–211.
4. Santosh K., Bansal R., Shekhar M., Varma V. Author Profiling: Predicting Age and Gender from Blogs // Notebook for PAN at CLEF. Singapore, 2013. P. 119–124.

5. Гречников Е.А., Гусев Г.Г., Кустарев А.А., Райгородский А.М. Поиск неестественных текстов // Труды 11-й Всероссийской научной конференции «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции» – RCDL'2009. Петрозаводск, 2009. С. 306–308.
6. Nguyen D., Smith N., Rose C. Author Age Prediction from Text using Linear Regression // Proc. of ICASSP. New-York, 2011. P. 267–276.
7. Choi D., Ko B., Kim H., Kim P. Text Analysis for Detecting Terrorism-Related Articles on the Web // Journal of Network and Computer Applications. 2013. V. 8, No. 5. С. 37–46.
8. Akker R. op den, Traum D. A comparison of addressee detection methods for multiparty conversations // Proc. of methods for multiparty conversations. Amsterdam, 2009. P. 99–106.
9. Baba N., Huang H.-H., Nakano Y.I. Addressee identification for human-human-agent multiparty conversations in different proxemics // Proc. 4th Workshop on Eye Gaze in Intelligent Human Machine Interaction. Beijing, 2012.
10. Lee H., Stolcke A., Shriberg E. Using out-of-domain data for lexical addressee detection in human-human-computer dialog // Proc. North American ACL/Human Language Technology Conference. Atlanta, 2013. P. 215–219.
11. Анууров М.Ф. Сравнение потоковых методов классификации текстов художественной литературы на основе сжатия информации и подсчета подстрок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 4(29). С. 16–22.
12. Attenberg J., Suel T. Cleaning search results using term distance features // Proc. of AIRWeb. San Francisco, 2008. P. 21–24.
13. Oliva J., Serrano J., Castillo M., Iglesias A. A syntax-based measure for short-text semantic similarity // Journal of Network and Computer Applications. 2013. V. 8, No. 5. P. 37–46.
14. Колесникова С.И. О подходах к оцениванию информативности признаков в тестовом распознавании // Известия Томского политехнического университета. 2006. № 8(309). С. 23–27.
15. Захарова И.Г., Пушкарев А.Н. Математическое обеспечение динамической интегрированной экспертной системы поддержки принятия решений в маркетинге // Вестник ТЮмГУ. 2012. № 4. С. 151–155.
16. Luo Q., Chen E., Xiong H. A semantic term weighting scheme for text categorization // Expert Systems with Applications. 2011. No. 38. P. 12708–12716.
17. Маннинг К., Рагхаван П., Шютце Х. Введение в информационный поиск. М. : Вильямс, 2011. 528 с.
18. Дунаев В.В. Об одной модели классификации // Научно-техническая информация. 1990. Сер. 2. № 3. С. 22–27.
19. Мандалова Е.С., Агафонов Е.Д. О проблеме выделения информативных признаков в задаче классификации текстовых документов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 1(22). С. 96–103.
20. Качановский Ю.П., Коротков Е.А. Предобработка данных для обучения нейронной сети // Фундаментальные исследования. 2011. № 12-1. С. 117–120.
21. McLachlan G.J. Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition. New Jersey : Wiley Interscience, 1992. 552 p.
22. «База данных метатекстовой разметки Национального корпуса русского языка (коллекция детской литературы)». 2014.
23. Глазкова А.В. Проверка информативности классификационных признаков в задаче автоматической классификации текстов на естественном языке // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS-2015) : материалы V Междунар. науч.-техн. конф. Минск, 2015. С. 541–544.

Глазкова Анна Валерьевна. E-mail: anya_kr@aol.com
Тюменский государственный университет

Поступила в редакцию 3 февраля 2015 г.

Glazkova Anna V. (Tyumen State University, Russian Federation).

The evaluation of the proximity of text categories for solving electronic documents classification tasks.

Keywords: information extraction; mathematical modeling; natural language processing; text classification.

DOI 10.17223/19988605/31/2

The article deals with the problem of classification of texts by the example of their assignment to a particular age group of recipients. In practice, texts for one age category of recipients can also be considered as addressed to another age when they conditionally correspond to the levels of their communicative development. In this case, we can discuss the magnitude of the differences between text categories.

In previous research authors have formulated an approach to mathematical modeling of the problem of classification. Suppose given a text T and a set of categories $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Need to find a subset of K_I , i.e., a category, which may be associated with the text:

$$T \sim K_I, K_I = \{K_i : T \sim K_i\},$$

where $i = j_1, j_2, \dots, j_m$ and $1 \leq i \leq n$.

So, the category K_i can be presented as

$$K_i = \{q_j^K, w_j^K\}, j = \overline{1, L},$$

where q_j^K is classification feature, w_j^K is a weight coefficient of classification feature, L is a total count of classification features.

If the feature descriptions of the two texts are identical, we call these texts belonging to the same taxonomic rank, and then we have

$$T_i \cong T_j.$$

This is an equivalence relation because it satisfies the conditions of reflexive, symmetric, and transitive. Consequently, many texts can be divided into disjoint equivalence classes and one can construct factor set by the equivalence relation.

Texts having an equivalence class are carriers of one of the feature descriptions, which allows us to consider they are equivalent. Converting the original set of texts in the factor set is the process of forming the contents of the classes of texts addressed to a specific age audience. In fact, as mentioned above, we are talking about a certain quantifying the differences between the categories of texts with no matching feature descriptions and belonging to different classes of equivalence:

$$\rho(K_i, K_j) = 0 \Leftrightarrow K_i \cong K_j.$$

Measure of proximity of categories may be defined as the Mahalanobis distance because the features of objects are statistically dependent and their relevance is determined by the weight coefficient s . Then, the distance between the categories of K_i and K_j represented as vectors characterizing their classification features

$$K_i = (q_{i1}^K, q_{i2}^K, \dots, q_{iL}^K), \\ K_j = (q_{j1}^K, q_{j2}^K, \dots, q_{jL}^K),$$

are defined as

$$\rho(K_i, K_j) = \sqrt{(K_i - K_j)^T \Lambda_{\text{cat}}^{-1} (K_i - K_j)},$$

where Λ_{cat} is a matrix of weight coefficients, C_{cat} is a matrix of covariance, which is the matrix built by pairwise covariance of the elements in vectors K_i and K_j .

Pairwise covariance of features values for vectors K_i and K_j is:

$$\text{cov}(q_{in}^K, q_{jn}^K) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{in_t}^K - \bar{q}_i^K)(q_{jn_t}^K - \bar{q}_j^K),$$

where $\bar{q}_i^K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{in_t}^K)$, $\bar{q}_j^K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_{jn_t}^K)$ are average values in the text samples, $n = 1, \dots, L$.

The proposed approach to the evaluation of the proximity of categories texts is implemented due to the development of the prototype of software system for automatic classification of texts in Russian based on age categories of recipients.

REFERENCES

1. Nguen, B.N., Tuzovskiy, A.F. (2012) Text classification based on estimation of terms semantic similarity. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 5 (320). pp. 43-48. (In Russian).
2. Kolesnikova, S.I. (2009) Methods of analysis of different-type features informativity. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1 (6). pp. 69-80. (In Russian).
3. Glazkova, A.V. & Zakharova, I.G. (2014) Podkhod k modelirovaniyu zadachi avtomaticheskoy klassifikatsii tekstov (na primere ikh otne-seniya k opredelennoy vozrastnoy auditorii) [Approach to modeling of automatic text classification problem (case study of the audience age prediction)]. *Vestnik TyumGU – Tyumen State University Herald*. 7. pp. 205-211.
4. Santosh, K., Bansal, R., Shekhar, M. & Varma, V. (2013) Author Profiling: Predicting Age and Gender from Blogs. *Notebook for PAN at CLEF*. Singapore, 2013. p. 119-124.
5. Grechnikov, E.A., Gusev, G.G., Kustarev, A.A. & Raygorodskiy, A.M. (2009) [Unnatural texts search]. *Elektronnye biblioteki: perspektivnye metody i tekhnologii, elektronnye kollektsii* [Digital Libraries: Advanced Methods and Technologies, Digital Collections – RCDL'2009]. Proc. of the 11th All-Russian Scientific Conference. Petrozavodsk. pp. 306-308. (In Russian).
6. Nguyen, D., Smith, N. & Rose, C. (2011) Author Age Prediction from Text using Linear Regression. *Proc. of ICASSP*. New-York, 2011. pp. 267-276.
7. Choi, D., Ko, B., Kim, H. & Kim P. (2013) Text Analysis for Detecting Terrorism-Related Articles on the Web. *Journal of Network and Computer Applications*. 8 (5). pp. 37-46. DOI: 10.1016/j.jnca.2013.05.007
8. Akker, R. op den & Traum, D. (2009) A comparison of addressee detection methods for multiparty conversations. *Proc. of Methods for Multiparty Monversations*. Amsterdam. pp. 99-106.
9. Baba, N., Huang, H.-H. & Nakano, Y.I. (2012) Addressee identification for human-human-agent multiparty conversations in different proxemics. *Proc. 4th Workshop on Eye Gaze in Intelligent Human Machine Interaction*. Beijing.
10. Lee, H., Stolcke, A. & Shriberg, E. Using out-of-domain data for lexical addressee detection in human-human-computer dialog. *Proc. North American ACL/Human Language Technology Conference*. Atlanta. pp. 215-219.
11. Ashurov, M.F. (2014) Comparison of stream-based fiction text classification methods based on data compression and counting sub-strings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (29). pp. 16-22. (In Russian).
12. Attenberg, J. & Suel, T. Cleaning search results using term distance features. *Proc. of AIRWeb*. San Francisco. pp. 21-24.
13. Oliva, J., Serrano, J., Castillo, M. & Iglesias, A. (2013) A syntax-based measure for short-text semantic similarity. *Journal of Network and Computer Applications*. 8 (5). pp. 37-46. DOI: 10.1016/j.data.2011.01.002
14. Kolesnikova, S.I. (2006) O podkhodakh k otsenivaniyu informativnosti priznakov v testovom raspoznavanii [On the approaches to estimation if feature informativity in the test recognition]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 8(309). pp. 23-27.

15. Zakharova, I.G. & Pushkarev, A.N. (2012) Matematicheskoe obespechenie dinamicheskoy integrirovannoy ekspertnoy sistemy podderzhki prinyatiya resheniy v marketing [Software the dynamic integrated expert system of support of decision-making in marketing]. *Vestnik TyumGU – Tyumen State University Herald*. 4. pp. 151-155.
16. Luo, Q., Chen, E. & Xiong, H. (2011) A semantic term weighting scheme for text categorization. *Expert Systems with Applications*. 38. pp. 12708-12716. DOI: 10.1016/j.eswa.2011.04.058
17. Manning, C., Raghavan, P. & Schütze, H. (2011) *Vvedenie v informatsionnyy poisk* [Introduction to information retrieval]. Translated from English by D. Klyushin. Moscow: Williams.
18. Dunaev, V.V. (1990) Ob odnoy modeli klassifikatsii [Model of classification]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya*. 2 (3). pp. 22-27.
19. Mangalova, E.S. & Agafonov, E.D. (2013) On features selection approach for text mining problem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(22). pp. 96-103. (In Russian).
20. Kachanovskiy, Yu.P. & Korotkov, E.A. (2011) Preprocessing data for training neural networks. *Fundamental'nye issledovaniya – Fundamental research*. 12-1. pp. 117-120. (In Russian).
21. McLachlan, G.J. (1992) *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*. New Jersey: Wiley Interscience.
22. Database of metatextual marking of the Russian National Corpus (a collection of children's literature). 2014. (In Russian).
23. Glazkova, A.V. (2015) [Classification features informational content testing for automatic natural texts classification task]. *Otkrytye semanticheskie tekhnologii proektirovaniya intellektual'nykh sistem (OSTIS-2015)* [Open semantic technologies for intelligent systems (OSTIS-2015)]. Proc. of the 5th International Scientific and Engineering Conference. Minsk. pp. 541-544. (In Russian).

Л.А. Задиранова, С.П. Моисеева

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ
В СИСТЕМЕ ММРР|M| ∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ**

Рассматривается система массового обслуживания ММРР|M| ∞ с повторными обращениями в систему. Найдены аналитические выражения для первого и второго моментов числа повторных обращений в систему за время t , а также асимптотическая характеристическая функция.

Ключевые слова: система массового обслуживания; марковский модулированный поток; метод асимптотического анализа.

В качестве математических моделей социально-экономических и сложных технических систем, в том числе телекоммуникационных систем и систем облачных вычислений, часто используют системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов. Исследование таких систем с пуассоновским входящим и произвольным временем обслуживания можно встретить в работах В.В. Рыкова, П.П. Бочарова, А.В. Печинкина и других авторов [1–4].

Однако применение пуассоновского потока для расчета характеристик качества обслуживания в реальных системах дает большую погрешность. Доказательство адекватности применения марковского модулированного пуассоновского потока для описания информационных потоков в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах приведено в исследованиях W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, V. Paxson, C. Lindemann, M. Lohmann и др. [5, 6].

Основными методами исследования СМО с неограниченным числом приборов, как правило, являются метод вложенных цепей Маркова и метод дополнительной переменной. В последнее время также развиваются матрично-аналитические методы [3, 7–11]. В случаях, когда не удается найти характеристики системы в явном виде, применяют асимптотические методы [12–18].

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями, которые применяются для описания математических моделей, например, страховых или торговых компаний [19]. Кроме того, подобные системы предлагаются в качестве математических моделей распределительных вычислительных сетей [20].

Для аналогичных систем с произвольным временем обслуживания в работе [19] предложен метод предельной декомпозиции, позволяющий свести исследование бесконечно линейной системы массового обслуживания к исследованию совокупности однолинейных систем. К сожалению, данный метод не удается применить для исследования систем с непугассоновским входящим потоком [21].

Данная статья посвящена исследованию потока обращений в системе с повторным обслуживанием заявок и входящим марковским модулированным потоком (ММРР). С помощью метода начальных моментов найдены точные выражения для основных вероятностных характеристик числа повторных обращений в систему. Кроме того, предложено развитие метода асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений при условии растущего времени обслуживания заявок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (ММРР), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \dots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, K$, и матрицей условных интенсивностей Λ [13].

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором с вероятностью $1 - r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания. Ставится задача исследования потока повторных обращений в системе $\text{MMPP}|M|_{\infty}$ повторным обращением.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t , $n(t)$ – число повторных заявок, обратившихся за время t , $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t), n(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), n(t)\}$.

Для распределения вероятностей $P(k, i, n, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, i, n, t)}{\partial t} = & -\lambda_k P(k, i, n, t) - i\mu P(k, i, n, t) + \lambda_k P(k, i-1, n, t) + \mu(1-r)(1+i)P(k, i+1, n, t) + \\ & + \mu ir P(k, i, n-1, t) + \sum P(v, i, n, t) q_{vk}, \quad k, v = 1, 2, \dots, K, i, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции [23] вида

$$H(k, u, w, t) = \sum_i \sum_n e^{ju i} e^{jw n} P(k, i, n, t).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial u} &= j \sum_i \sum_n i e^{ju i} e^{jw n} P(k, i, n, t), \\ \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial w} &= j \sum_i \sum_n n e^{ju i} e^{jw n} P(k, i, n, t), \end{aligned}$$

из (1) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial t} + \mu j \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial u} (-1 + (1-r)e^{-ju} + re^{jw}) = \\ = H(k, u, w, t) [\lambda_k (e^{ju} - 1)] + \sum H(v, u, w, t) q_{vk}. \end{aligned}$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, w, t) [(e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u, w, t) &= [H(1, u, w, t), H(2, u, w, t), \dots, H(K, u, w, t)], \\ \mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{K1} & q_{K2} & \dots & q_{KK} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Нахождение начальных моментов числа повторных обращений

Для нахождения основных вероятностных характеристик процесса, характеризующего среднее число повторных обращений в исследуемую систему за время t , будем использовать дифференциально-матричное уравнение (2).

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. Среднее число занятых приборов при нестационарном режиме функционирования системы $\text{MMPP}|M|_{\infty}$ с повторными обслуживанием определяется выражением

$$M\{i(t)\} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}}{\mu(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2) по переменной u :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t \partial u} - j^2 \mu(1-r)e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} [(e^{ju} - 1)\mathbf{A} + \mathbf{Q}] + je^{ju} \mathbf{H}(u, w, t) \mathbf{A}.$$

Полагая в данном равенстве $u = w = 0$ и обозначив

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} \right|_{u=0, w=0} = j\mathbf{ms}_1(t),$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{ms}_1(t)}{\partial t} + \mu(1-r)\mathbf{ms}_1(t) = \mathbf{ms}_1(t)\mathbf{Q} + \mathbf{R}\mathbf{A},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{H}(0)$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{R}\mathbf{Q} = 0$ и удовлетворяющий условию нормировки $\mathbf{R}\mathbf{E} = 1$.

Суммируя обе части полученной системы, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}}{\partial t} + \mu(1-r)\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E},$$

решая которое, имеем

$$\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}}{\mu(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Тогда среднее число занятых приборов в системе определяется выражением

$$M\{i(t)\} = \mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}}{\mu(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Математическое ожидание числа повторных обращений при нестационарном функционировании системы ММРР|M| ∞ с повторным обслуживанием за время наблюдений t определяется выражением

$$M\{n(t)\} = rt \frac{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}}{(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2) по переменной w :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t \partial w} + j^2 r \mu e^{jw} \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju}) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u \partial w} = \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial w} [(e^{ju} - 1)\mathbf{A} + \mathbf{Q}]. \quad (3)$$

Полагая $u = w = 0$ и обозначив

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial w} \right|_{u=0, w=0} = j\mathbf{mp}_1(t),$$

из (3) получаем следующую систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{mp}_1(t)}{\partial t} + j^2 r \mu \mathbf{ms}_1(t) = \mathbf{mp}_1(t)\mathbf{Q}. \quad (4)$$

Умножая обе части системы (4) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1, 1, \dots, 1]^T$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{mp}_1(t)}{\partial t} \mathbf{E} - r \mu \mathbf{ms}_1(t) \mathbf{E} = 0. \quad (5)$$

Решая уравнение (5), получаем

$$\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E} = r \mu \mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}t,$$

где $\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}}{\mu(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t})$ – среднее число занятых приборов в системе, полученное выше. Тогда

первый момент числа повторных обращений в систему за время t имеет вид

$$M\{n(t)\} = \mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{E} = r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_1(t) \mathbf{E} t = r t \frac{\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E}}{(1-r)} (1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Теорема доказана.

Нетрудно показать, что при стационарном функционировании системы среднее число повторных обращений определяется выражением

$$M\{n(t)\} = r t \frac{\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E}}{(1-r)}.$$

Теорема 2. Смешанный момент числа занятых приборов и повторных обращений при стационарном функционировании системы ММРР|M| ∞ с повторным обслуживанием определяется выражением

$$M\{i(t) \cdot n(t)\} = \frac{1}{\mu(1-r)} (1 - e^{-\mu(1-r)t}) (\mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} + r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E}),$$

где $\mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E} = \mathbf{R} \mathbf{A} \{(\mathbf{Q} - \mu(1-r) \mathbf{I})^{-1} (2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r) \mathbf{I} - \mathbf{I})\} (\mathbf{Q} - \mu(1-r) \mathbf{I})^{-1} \mathbf{E}$, $\mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{E} = r t \frac{\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E}}{(1-r)}$ — соответственно вто-

рой момент числа занятых приборов и среднее число повторных обращений за время t при стационарном функционировании системы.

Доказательство. Для нахождения смешанного момента числа занятых приборов и повторных обращений в систему продифференцируем выражение (2) по u и по w дважды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t \partial u \partial w} + j^2 r \mu e^{jw} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u^2} - j^2 \mu(1-r) e^{-ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u \partial w} + j \mu (r e^{jw} - 1 + (1-r) e^{-ju}) \frac{\partial^3 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u^2 \partial w} = \\ = \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u \partial w} [(e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}] + j e^{ju} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial w} \mathbf{\Lambda}. \end{aligned}$$

Полагая $u = w = 0$, введем обозначения

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial w^2} \right|_{u=0, w=0} = j^2 \mathbf{m} \mathbf{p}_2(t), \quad \left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u^2} \right|_{u=0, w=0} = j \mathbf{m} \mathbf{s}_2,$$

учитывая которые, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t} + j^2 r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_2 - j^2 \mu(1-r) \mathbf{m}_{12}(t) = \mathbf{m}_{12}(t) \mathbf{Q} + \mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{\Lambda}. \quad (6)$$

Умножая обе части системы (6) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1, 1, \dots, 1]^T$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t} \mathbf{E} - r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E} + \mu(1-r) \mathbf{m}_{12}(t) \mathbf{E} = \mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{\Lambda} \mathbf{E},$$

где $M\{i^2(t)\} = \mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E} = \mathbf{R} \mathbf{A} \{(\mathbf{Q} - \mu(1-r) \mathbf{I})^{-1} (2\mathbf{\Lambda} + \mu(1-r) \mathbf{I} - \mathbf{I})\} (\mathbf{Q} - \mu(1-r) \mathbf{I})^{-1} \mathbf{E}$ — второй момент числа занятых приборов при стационарном функционировании системы, который был получен в работе [22]; $\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица.

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальном условии $\mathbf{m}_{12}(0) = 0$, имеем

$$\mathbf{m}_{12}(t) \mathbf{E} = \frac{1}{\mu(1-r)} (1 - e^{-\mu(1-r)t}) (\mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} + r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E}).$$

Следовательно, смешанный момент числа занятых приборов и повторных обращений в систему имеет вид

$$M\{i(t) \cdot n(t)\} = \mathbf{m}_{12}(t) \mathbf{E} = \frac{1}{\mu(1-r)} (1 - e^{-\mu(1-r)t}) (\mathbf{m} \mathbf{p}_1(t) \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} + r \mu \mathbf{m} \mathbf{s}_2 \mathbf{E}).$$

Теорема доказана.

Результаты теорем 1–2 позволяют сформулировать следующую теорему, доказательство которой проводится аналогично.

Теорема 3. Второй момент числа повторных обращений при стационарном функционировании системы ММРР|M| ∞ с повторным обслуживанием определяется выражением

$$M\{n^2(t)\} = r \mu [\mathbf{m} \mathbf{s}_1(t) \mathbf{E} + 2 \mathbf{m}_{12}(t) \mathbf{E}] t.$$

3. Метод асимптотического анализа

Для более полного исследования применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе ММРР|М| ∞ при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [14].

Найдем асимптотическую характеристическую функцию числа повторных обращений в системе ММРР|М| ∞ за время t в условии растущего времени.

Обозначим

$$\mu = \varepsilon, \quad u = \varepsilon y, \quad \mathbf{H}(u, w, t) = \mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon). \quad (7)$$

Перепишем (2) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon)}{\partial t} + j(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-j\varepsilon y}) \frac{\partial \mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon)}{\partial y} = \mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon) \left[(e^{j\varepsilon y} - 1) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q} \right]. \quad (8)$$

Теорема 4. Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}(y, w, t)$ решения $\mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon)$ уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{F}(y, w, t) \mathbf{E} = \exp \left\{ rkt(e^{jw} - 1) + j\kappa \right\}, \quad (9)$$

где $\kappa = \frac{1}{1-r} \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}$.

Доказательство. Суммируя все уравнения полученной системы (8) и выполняя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \mathbf{F}(y, w, t)}{\partial t} \mathbf{E} + jr(e^{jw} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}(y, w, t)}{\partial y} \mathbf{E} = 0, \quad (10)$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}(y, w, t) \mathbf{E} = \varphi \left(t + \frac{jy}{r(e^{jw} - 1)} \right),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция.

Так как число обслуженных заявок за интервал нулевой длины с вероятностью единица равно нулю, то начальное условие для определения вида функции $\varphi(y)$ имеет вид

$$\mathbf{F}(y, w, 0) \mathbf{E} = \Phi(y), \quad (11)$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе в условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого был получен в работе [22].

$$\Phi(y) = \exp \{ j\kappa y \},$$

где $\kappa = \frac{1}{1-r} \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}$.

Таким образом, решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию (11),

$$\mathbf{F}(y, w, t) \mathbf{E} = \exp \left\{ rkt(e^{jw} - 1) + j\kappa y \right\},$$

которое совпадает с равенством (9), что доказывает теорему.

Полагая в (9) $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему за время t для повторного обслуживания, в условии растущего времени обслуживания:

$$h(w, t) = M \{ e^{jwn(t)} \} = \mathbf{H}(0, w, t) \mathbf{E} = \mathbf{F}(0, w, t, \varepsilon) \mathbf{E} \approx \mathbf{F}(0, w, t) \mathbf{E} = \exp \left\{ rkt(e^{jw} - 1) \right\}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что поток обращений в рассматриваемой системе в условии растущего времени обслуживания и наблюдений имеет распределение Пуассона.

4. Область применения асимптотических результатов

Исследуем область применимости метода асимптотического анализа. Так как выражения для моментов первого порядка числа повторных обращений, полученные асимптотическим и аналитическим методами, совпадают, то используем для сравнения значения дисперсий.

Пример 1. Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток ММРР, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором условных интенсивностей $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}$. Заявка, поступившая в систему, занимает любой свободный прибор, на котором обслуживается в течение случайного времени, распределенного согласно экспоненциальному закону с параметром $\mu = 0,1$. Время наблюдения за экспериментом $t = 5$. Используя заданные параметры, имеем результат, приведенный в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 5$

Дисперсия D \ Вероятность возврата r	0,05	0,01	0,005	0,002
Асимптотические результаты	0,1974	0,0379	0,0188	0,0075
Аналитические результаты	0,2610	0,0402	0,0194	0,0076
Относительная погрешность Δ	0,2437	0,0572	0,0309	0,0132

Пример 2. Рассмотрим аналогичный пример с параметрами

$$Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}, t = 25, \mu = 0,1.$$

Результаты приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 25$

Дисперсия D \ Вероятность возврата r	0,01	0,005	0,002	0,001
Асимптотические результаты	0,1894	0,0942	0,0376	0,0188
Аналитические результаты	0,2574	0,1110	0,0402	0,0194
Относительная погрешность Δ	0,2642	0,1514	0,0647	0,0309

Пример 3. Используем следующие значения параметров:

$$Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}, t = 50, \mu = 0,1.$$

Результаты приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 50$

Дисперсия D \ Вероятность возврата r	0,01	0,005	0,001	0,0005
Асимптотические результаты	0,3789	0,1884	0,0375	0,0188
Аналитические результаты	0,6209	0,2483	0,0399	0,0194
Относительная погрешность Δ	0,3898	0,2412	0,0602	0,0309

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что на асимптотические результаты влияет как величина периода наблюдения t , так и вероятность r возвращения заявки в систему. Полагая

приемлемой погрешностью аппроксимации, равную значению 0,03, можно считать, что допустимо применение асимптотических результатов при $r \cdot t < 0,025$.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания заявок в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторным обслуживанием, определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число повторных обращений и асимптотическое приближение характеристической функции потока в рассматриваемой системе, определена область применимости полученных результатов и проиллюстрирована тремя примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кёнинг Д., Рыков В., Штоян Д. Теория массового обслуживания. М. : Московский институт нефтехимической и газовой промышленности, 1979. 112 с.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М. : Изд-во РУДН, 1995. 520 с.
3. Parulekar M., Makowski A.M. Tail probabilities for $M/G/\infty$ input processes (I): Preliminary asymptotics // Queueing Systems. 1997. V. 27, Issue 3–4. P. 271–296.
4. Baltzer J.C. On the fluid limit of the $M/G/\infty$ queue // Queueing systems: Theory and applications. August 2007. V. 56, Issue 3–4. P. 255–265.
5. Leland W.E., Willinger W., Taqqu M.S., Wilson D.V. On the self-similar nature of Ethernet traffic // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 1995. V. 25. P. 202–213.
6. Klemm A., Lindemann C., Lohmann M. Modeling I.P. Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extended version) // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 149–173.
7. Baum D. The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the international conference “Probabilistic analysis of rare events”. Riga, Latvia, 1999. P. 136–142.
8. Breuer L., Baum D. The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue // Proceedings 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001). Aachen, Germany, 2001. P. 209–223.
9. Jayawardene A.K., Kella O. $M/G/\infty$ with alternating renewal breakdowns // Queueing Systems. 1996. V. 22, Issue 1–2. P. 79–95.
10. Назаров А.А., Терпузов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2005. С. 228.
11. Фёдорова Е.А. Вычисление моментов в RQ-системе $MMPP|M|_1$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 4 (29). С. 41–50.
12. Iglehart D.L. Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // J. Appl. Prob. 1965. V. 2. P. 429–441.
13. Reynolds J.F. Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue // Oper. Res. 1968. V. 16. 186 p.
14. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
15. Назаров А.А., Семенова И.А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 85–96.
16. Судько Е.А., Назаров А.А. Исследование математической модели сети случайного доступа методом асимптотических семиинвариантов третьего порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 52–64.
17. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
18. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Исследование системы массового обслуживания $HIGI|GI|_{\infty}$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 75–83.
19. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автоматрия. 2011. Т. 47, № 6. С. 51–58.
20. Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А. Исследование потоков в системе $M|GI|_{\infty}$ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–66.
21. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 75 с.
22. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование числа занятых приборов в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 53–62.
23. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial queueing systems: A computational approach. Springer, Berlin. 2008. 318 p.

Zadiranova Lyubov A., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University, Russian Federation)

Asymptotic analysis of the flow of repeated requests in system MMPP|M| ∞ with repeated requests.

Keywords: Queueing system with repeated requests; Markov modulated process, method of asymptotic analysis; a flow of repeated requests.

DOI 10.17223/19988605/31/3

In this article, the Queueing system with unlimited number of facility is considered. The Markov modulated process, controlled by the Markov chain $k(t)$ with infinitesimal generator $Q = \|q_{ij}\|$, enters into the input of such system.

Every customer comes into any of the vacant server, where he is served during a stochastic time distributed according to the exponential law with the parameter μ . After service, the customer leaves the system with probability $r-1$, and with probability r the customer comes back in it for repeated service

The problem is to study the flow of repeated requests to the system during the time t . Using the method of initial moments, analytical expressions are found for the first and the second moments of the number of repeated requests to the system during the time t .

For more detailed research of this process, the method of asymptotic analysis is proposed in a condition of a growing service time. It is shown that asymptotic characteristic function of a number of repeated requests into the system during the time t has the Poisson distribution with the following parameters:

$$a = M\{i(t)\} = r\kappa t, \\ \sigma^2 = M\{(i(t) - a)^2\} = r\kappa t,$$

where κ is defined as

$$\kappa = \frac{1}{1-r} \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E},$$

$\mathbf{E}$ is an unit column vector, and the row vector $\mathbf{R}$ is determined by the system
$$\begin{cases} \mathbf{R} \mathbf{Q} = 0 \\ \mathbf{R} \mathbf{E} = 1 \end{cases}.$$

On the basis of numerical experiments, the range of applicability of the asymptotic algorithm is determined. Also, it is shown that there is an influence on asymptotic results both the probability of return to the system and the value of the observation period t .

REFERENCES

1. Kening, D., Rykov, V. & Stoyan, D. (1979) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Moscow Institute of Oil and Gas.
2. Bocharov, P.P. & Pechinkin, A.V. (1995) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Russian University of Peoples' Friendship.
3. Parulekar, M. & Makowski, A.M. (1997) Tail probabilities for M/G/ ∞ input processes (I): Preliminary asymptotics. *Queueing Systems*. 27 (3–4). pp. 271–296. DOI: 10.1023/A:1019122400632
4. Friker, C. & Raouf Jaibi, M. (2007) On the fluid limit of the M/G/ ∞ queue. *Queueing systems: Theory and applications*. 56 (3–4). pp. 255–265. DOI: 10.1007/s11134-007-9041-x
5. Leland, W.E., Willinger, W., Taqqu, M.S. & Wilson, D.V. (1995) On the self-similar nature of Ethernet traffic. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*. 25. pp. 202–213. DOI: 10.1145/205447.205464
6. Klemm, A., Lindemann, C. & Lohmann M. (2003) Modeling I.P. Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extended version). *Performance Evaluation*. 54. pp. 149–173. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00067-1
7. Baum, D. (1999) The infinite server queue with Markov additive arrivals in space. *Probabilistic analysis of rare events. Proc. of the International Conference*. Riga. pp. 136–142.
8. Breuer, L. & Baum, D. (2001) The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue. *Proc. of the 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001)*. Aachen. pp. 209–223.
9. Jayawardene, A.K. & Kella O. (1996) M/G/ ∞ with alternating renewal breakdowns. *Queueing Systems*. 22 (1–2). pp. 79–95. DOI: 10.1007/BF01159394
10. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2005) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Tomsk: NTL.
11. Fedorova, E.A. (2014) Calculation of moments in retrial queueing system MMPP|M|1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (29). pp. 41–50. (In Russian).
12. Iglehart, D.L. (1965) Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *Journal of Applied Probability*. 2. pp. 429–441. DOI: 10.2307/3212203
13. Reynolds, J.F. (1968) Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue. *Operation Research*. 16. 186 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.16.1.186>

14. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analyze on Queueing Theory]. Tomsk: NTL.
15. Nazarov, A.A. & Semenova, I.A. (2010) Analysis of the RQ-systems by the asymptotic semi invariants methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3 (12). pp. 85-96. (In Russian).
16. Sudyko, E.A. & Nazarov A.A. (2009) Investigation of mathematical model of the network random access by method of asymptotic semi-invariants of the third order. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). pp. 52-64. (In Russian).
17. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2013) Mathematical model of consumer traffic in two – commodity commercial company in the form of queueing system with repeated block access. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 322 (6). pp. 5-9. (In Russian).
18. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2013) Investigation of the queueing system $HIGI|GI|_{\infty}$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (23). pp. 75-83. (In Russian).
19. Moiseeva, S.P. & Zakhorol'naya, I.A. (2011) Mathematical model of parallel retrial queueing of multiple requests. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47 (6). pp. 51-58. DOI: 10.3103/S8756699011060276
20. Moiseeva, S.P., Ananina, I.A. & Nazarov, A.A. (2009) Research of streams in system $M|GI|_{\infty}$ with repeated references the method of limiting decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3 (8). pp. 56-66. (In Russian).
21. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated streams]. Minsk: BGU.
22. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2014) Investigation of the queueing system $MMPP|M|_{\infty}$ with repeated service. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 53-62. (In Russian).
23. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial queueing systems: A computational approach*. Berlin: Springer.

Ю.А. Келлер

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ ПОДБОРА УЧАСТКОВ-КАНДИДАТОВ ПОД ВЫРАВНИВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПРИЁМИСТОСТИ

Предложена методология использования метода главных компонент для оценки влияния геолого-технологических факторов при проведении операций по выравниванию профиля приёмистости на нагнетательных скважинах. Приведены основные выводы на основании проведенного анализа.

Ключевые слова: методы увеличения нефтеотдачи; выравнивание профиля приёмистости; нагнетательная скважина; метод главных компонент; кластеризация.

Разработка нефтяных месторождений при наличии системы поддержки пластового давления характеризуется, как правило, нарастающим темпом обводнения добываемой продукции. С целью prolongирования рентабельного срока эксплуатации месторождения широкое распространение нашли вторичные методы увеличения нефтеотдачи (МУН), в частности выравнивание профиля приёмистости (ВПП) на нагнетательных скважинах. Для этого в скважину закачивается специальный реагент для уменьшения проницаемости промытых зон пласта, что в свою очередь приводит к более равномерному фронту вытеснения нефти водой, вовлечения в разработку непромытых зон пласта, уменьшая тем самым обводненность продукции добывающих скважин. Под обводненностью продукции понимается отношение добываемой воды в объеме добываемого флюида из добывающей скважины. Например, обводненность продукции в 90% на добывающей скважине означает, что из 1 000 м³ добываемой жидкости в сутки только 100 м³ составляет нефть, а остальные 900 м³ – вода. На текущий момент геологические и технологические критерии выбора участков под ВПП проработаны в должном объеме и закреплены в виде технологических регламентов и инструкций, однако оценивание предполагаемой дополнительной добычи нефти, полученной за счет снижения обводненности, остается сложной задачей. Для её решения используется целый спектр приёмов: от гидродинамического до математического моделирования [1–4]. В данной работе предложена методика, направленная на определение геолого-технологических факторов, влияющих на эффективность проведения ВПП на группе месторождений, разработку групп правил для интеллектуального выбора участков-кандидатов под ВПП методом главных компонент с последующим оцениванием ожидаемой дополнительной добычи нефти.

1. Описание алгоритма выбора кандидатов

Поскольку в качестве влияющих на результат МУН геолого-технологических параметров в доступной литературе указывается достаточное их число [5], то с целью выбора наиболее значимых параметров для рассматриваемой группы месторождений был применен метод главных компонент. На практике метод главных компонент применяется, во-первых, для редукции данных (уменьшения общего числа переменных) и, во-вторых, для классификации переменных посредством факторного пространства [6]. На предварительном этапе была обобщена информация о проводимых обработках в период с 2007 по 2013 г. Далее было произведено исключение из сформированной выборки тех случаев, для которых не выполнялось условие полноты знаний обо всех геолого-технологических характеристиках месторождения (данные либо отсутствовали, либо их достоверность находилась под сомнением). В результате был сформирован список параметров, который мог быть использован для дальнейшего инженерного анализа. Характеристики, выбранные для последующего анализа методом главных компонент, приведены в табл. 1.

В период с 2007 по 2013 г. было проведено 130 мероприятий ВПП на нагнетательных скважинах. Обработки проводились с использованием двух технологий: сшитых полимерных систем (СПС) и КАРФАС. Сущность технологии СПС заключается в образовании гидрогеля в результате реакции химической сшивки макромолекул полимеров (например, раствор полиакриламида) в водном растворе посредством специальных сшивателей (например, ацетат хрома). Последовательной закачкой растворов медленно сшивающихся составов различных концентраций осуществляется их проникновение вглубь призабойного пласта на значительные расстояния от забоя скважины и создания в пластовых условиях потокоотклоняющих экранов. В результате изменения направления фильтрационных потоков в пласте в процесс выработки запасов вовлекаются нефтенасыщенные пропластки более низкой проницаемости и обводненности, ранее не охваченные заводнением [7]. Отличительными особенностями реагента КАРФАС является способность образования геля только за счет его взаимодействия с породой коллектора, т.е. непосредственно в пласте, однородность закачиваемого водного раствора делает его пригодным для применения на объектах, обладающих высокой степенью неоднородности, какими являются карбонатные пласты [8].

Т а б л и ц а 1

Параметры для анализа методом главных компонент

Наименование параметра	Размерность
Глубина залегания пласта	м
Общая толщина пласта	м
Эффективная нефтенасыщенность. Толщина	м
Коэффициент пористости пласта	д. ед.
Коэффициент нефтенасыщенности пласта	д. ед.
Плотность нефти	г/см ³
Коэффициент проницаемости пласта	мкм ²
Вязкость нефти	мПа*с
Пластовая температура	°С
Газовый фактор	м ³ /т
Объемный коэффициент нефти	м ³ /м ³
Давление насыщения	атм.
Начальное давление	атм.
Содержание серы	%
Содержание парафинов	%
Содержание смол-асфальтенов	%

Участок, выбранный под обработку, помимо удовлетворения геологических и технологических критериев, должен давать рентабельный уровень дополнительной добычи нефти. Однако величина дополнительной добычи нефти, как правило, напрямую зависит от величины суммарного отбора жидкости на участке. Чем выше отборы жидкости, тем большую дополнительную добычу нефти за счет снижения обводненности можно получить. Таким образом, было принято решение в качестве критерия эффективности мероприятия выбрать не абсолютную величину дополнительной добычи нефти на участке, а величину, рассчитанную следующим образом: сначала вычислялась месячная дополнительная добыча нефти как отношение суммарной величины дополнительной добычи нефти на участке к продолжительности эффекта. Далее вычислялся процент месячной дополнительной добычи нефти от месячных отборов нефти с участка до ВПП, и данная величина нормировалась на объём закачки реагента (в тыс. м³). Вычисленная таким образом характеристика обеспечивает корректную оценку потенциала обработанного участка при использовании метода главных компонент.

Обработка данных осуществлялась в программном комплексе STATISTICA 6, в качестве исследуемых переменных были выбраны данные из табл. 1, в качестве группирующей переменной – нормированный процент дополнительной добычи нефти по участку. Разбиение по группам представлено в табл. 2.

Обработки с эффективностью, отнесенные к группе 4, можно охарактеризовать как успешные, отнесенные к группе 1 – как неуспешные.

Разбиение эффективности мероприятий ВПП по четырем группам

Диапазон изменения нормированной дополнительной добычи нефти, %	Наименование группы
От 0 до 5	Группа 1
От 5 до 10	Группа 2
От 10 до 20	Группа 3
Свыше 20	Группа 4

Далее с использованием метода главных компонент была решена задача определения влияния геолого-технологических параметров на итоговую эффективность мероприятия ВПП по технологии СПС. Размер факторного пространства по критерию Кеттеля [9] был выбран равным 2. То есть каждый выбранный фактор является линейной комбинацией переменных, которые сильно коррелируют с ним. Далее было осуществлено распределение выделенных по эффективности групп на построенном факторном пространстве. Построенное распределение приведено на рис. 1. Путем вычисления факторных нагрузок для каждой из переменных было установлено (на основании наличия сильной корреляционной связи), что положительная ось Factor 1 соответствует таким переменным, как коэффициент пористости пласта, плотность нефти, проницаемость пласта, вязкость нефти, содержание серы, содержание смол-асфальтенов. Отрицательная ось Factor 1 соответствует таким переменным, как глубина залегания пласта, пластовая температура, газовый фактор, начальное давление. Отрицательной оси Factor 2 соответствует общая толщина пласта.

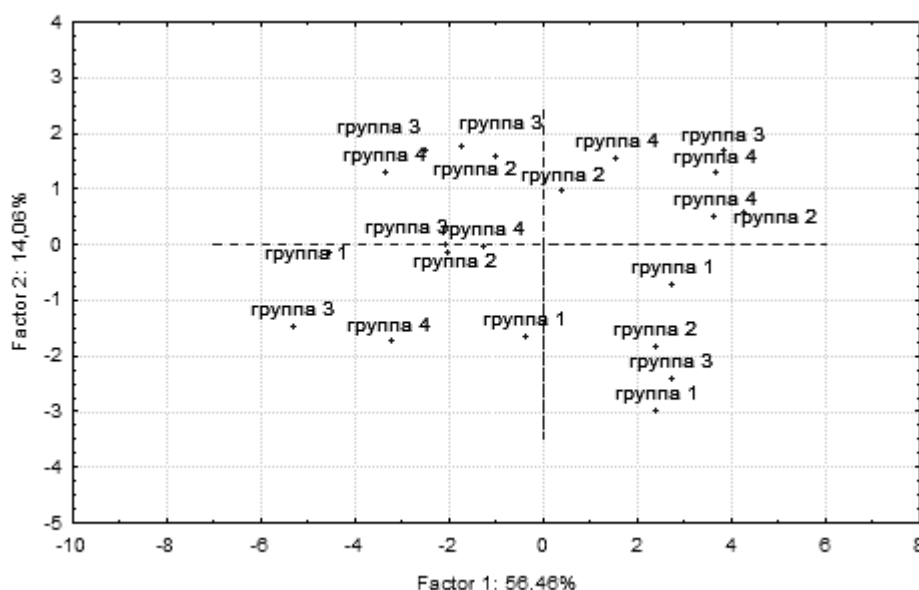


Рис. 1. Распределение по эффективности мероприятий ВПП на факторном пространстве

Анализ данных, приведенных выше, позволяет сделать следующие выводы. Большая часть неуспешных мероприятий группируется в правой нижней области факторного пространства, соответствующей положительной оси Factor 1 и отрицательной оси Factor 2. Наиболее успешные мероприятия группируются в верхней области факторного пространства, соответствующей положительной оси Factor 2. С целью выделения не только влияющих переменных на эффективность ВПП, но и границ их изменения была произведена кластеризация данных методом k-средних (k-means). Задачей кластерного анализа является выделение из исходной выборки данных групп так, чтобы объекты, принадлежащие одной и той же группе, были максимально сходными по своим параметрам, а объекты, принадлежащие к разным группам, – максимально различались по своим характеристикам. Особенностью процедуры кластеризации методом k-средних является необходимость задания количества выделяемых групп до начала работы алгоритма. Основываясь на практическом опыте, было принято решение выделить

три группы. В табл. 3 представлены диапазоны изменения переменных, а также их средние значения для каждой выделенной группы. Анализируя диапазоны минимальных и максимальных значений и средние значения для нормированной эффективности ВПП, можно выделить успешную с точки зрения получения дополнительной добычи группу (группа № 1) и неуспешную (группа № 2).

Анализируя приведенные в табл. 3 данные, можно сделать следующие выводы:

- наименее успешную группу (№ 2) характеризует глубина залегания менее 2 км;
- наименее успешная группа (№ 2) характеризуется высоковязкими нефтями (более 25 мПа·с);
- наиболее успешную группу (№ 1) характеризует глубина залегания в диапазоне от 2 до 2,5 км;
- наиболее успешная группа (№ 1) характеризуется маловязкими нефтями (от 1 до 4 мПа·с);
- наименее успешная группа (№ 2) характеризуется высокосернистыми нефтями (более 2%);
- наименее успешная группа (№ 2) характеризуется высокосмолистыми нефтями (более 18%);
- наиболее успешная группа (№ 1) характеризуется меньшими толщинами пласта (порядка 8 м).

Таблица 3

Диапазоны изменения значений переменных для каждой группы

Переменная	Мин.	Макс.	Средн.	Мин.	Макс.	Средн.	Мин.	Макс.	Средн.
Глубина залегания, м	2114	2583	2347	1312	1834	1479	2814	3199	3061
Общая толщина, м	1,8	14,7	8,8	2,4	20,4	10,5	10,5	19,3	13,6
Эф. толщина, м	1,6	9,3	5,7	2,4	19,2	8,3	6,4	14,1	9,8
Коэф. пористости, д. ед.	0,12	0,20	0,17	0,16	0,25	0,21	0,12	0,16	0,14
Коэф. нефтенас., д. ед.	0,86	0,92	0,91	0,84	0,96	0,91	0,86	0,88	0,87
Плотность нефти, г/см ³	0,82	0,87	0,84	0,84	0,93	0,90	0,81	0,84	0,82
Проницаемость, мкм ²	0,01	0,44	0,11	0,03	2,52	0,78	0,07	0,19	0,12
Вязкость нефти, мПа·с	1,4	3,8	2,2	2,9	116,2	29,0	0,8	2,0	1,2
Пл. температура, °С	49	54	51	27	50	32	64	76	72
Газовый фактор, м ³ /т	29	88	54	7	53	16	43	87	61
Объемный коэф. нефти, м ³ /м ³	1,09	1,24	1,14	1,02	1,20	1,08	1,13	1,22	1,17
Давление насыщения, атм.	47	94	69	36	61	50	71	97	83
Начальное давление, атм.	206	274	251	132	200	157	311	362	337
Содержание серы, %	0,9	1,9	1,4	1,6	4,6	3,1	0,8	1,1	0,9
Содержание парафинов, %	3,4	6,1	4,7	3,2	6,7	5,0	4,8	5,2	5,0
Содержание смол-асфальтенов, %	5,2	13,4	8,4	6,8	24,0	17,4	3,4	7,1	4,5
Эффективность ВПП, %/тыс. м ³	9,4	25,5	15,3	0,0	37,0	11,2	4,9	21,2	10,4

Пользуясь системой правил при подборе кандидатов на проведение ВПП, приведенной выше, в дополнение к предусмотренным в технических регламентах критериям удалось существенно уменьшить число неуспешных, с точки зрения получения дополнительной добычи нефти, обработок в 2014 г. на месторождениях, а также более корректно оценивать ожидаемую дополнительную добычу нефти после ВПП.

Заключение

Была выполнена классификация объектов воздействия МУН с помощью метода главных компонент, выделены геолого-технологические факторы, оказывающие сильное влияние на итоговую дополнительную добычу нефти. Показано, что на участках, залегающих на глубине менее 2 км, представленных высоковязкими, высокосернистыми и высокосмолистыми нефтями, проведение ВПП по технологии СПС на группе месторождений европейской части РФ нецелесообразно с точки зрения экономической рентабельности мероприятия. С помощью кластеризации методом k-средних выделены конкретные диапазоны значений геолого-технологических характеристик для успешных и неуспешных мероприятий. Применение предложенной методологии в сочетании с регламентом по подбору скважин-кандидатов под МУН позволяет снизить процент неуспешных мероприятий, а также оценить ожидаемую дополнительную добычу нефти, не прибегая к трудоемкому гидродинамическому моделированию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абызбаев И.И., Андреев В.Е. Прогнозирование эффективности физико-химического воздействия на пласт // Нефтегазовое дело. 2005. № 3. С. 167–176.
2. Келлер Ю.А. Применение кластеризации данных на основе самоорганизующихся карт Кохонена при подборе скважин-кандидатов для методов увеличения нефтеотдачи // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3(28). С. 32–37.
3. Ferreira I., Gammiero A., Llamedo M. Design of a neural network model for predicting well performance after water shutoff treatments using polymer gels (SPE 153908) // SPE Latin American and Caribbean petroleum conference. Mexico, 2012. 9 p.
4. Saaedi A., Camarda J., Liang J-T. Using neural networks for candidate selection and well performance prediction in water-shutoff treatments using polymer gels – a field-case study (SPE-101028-PA). SPE Asia Pacific Oil&Gas conference and exhibition. Adelaide, 2006. 8 p.
5. Куликов А.Н., Елисеев Д.Ю., Рожков А.П. Влияние геолого-технологических факторов на эффективность физико-химических технологий ПНП и их совершенствование // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2011. № 6. С. 59–66.
6. Statistica: Руководство пользователя. М. : StatSoft, 2001. 1343 с.
7. Технология СПС. URL: http://gidroimpuls.com/tehnologiya_sps (дата обращения: 10.11.2014).
8. Реагент КАРФАС. URL: <http://atelye-leo.ru/ingibitori/19-karfas.html> (дата обращения: 14.11.2014).
9. Халафян А.А. Учебник STATISTICA 6: Статистический анализ данных. М. : Бином-Пресс, 2007. 512 с.

Келлер Юрий Александрович, канд. физ.-мат. наук. E-mail: kua1102@rambler.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 февраля 2015 г.

Keller Yuri A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Using the method of principal components for selecting candidate wells for improving water injection profile

Keywords: enhanced oil recovery methods; improving water injection profile; injector well, the method of principal components; clustering.

DOI 10.17223/19988605/31/4

A methodology of using the method of principal components is suggested for the estimation of the influence of geologo-technological factors within the process of selecting candidate wells for enhanced oil recovery methods, in particular for improving water injection profile. At this point, geological and technological criteria of selecting parts of the field for improving water injection profile have been properly developed and fixed as technological rules and instructions, however, the estimation of suggested additional production of oil produced due to water cut decrease as a result of improving water injection profile remains a complicated and, on the whole, a partly unsolved problem. To solve it, a whole spectrum of techniques is needed, namely, from hydrodynamic to mathematical modeling. Every method has its pros and cons. One of the definite advantages of hydrodynamic modeling is the validity of forecasts based on the fact that the hydrodynamic model is oil field history matching. Also, there are the following disadvantages: the necessity of the existence of an actual hydrodynamic model, the complexity of the modeling procedure, the presence of multiple additional parameters, which are seldom wholly known. Mathematical modeling allows to avoid the problems inherent in hydrodynamic modeling. However, for its proper use, it is required to observe the condition of completeness of initial information. Therefore, generally, the results of mathematical modeling can be used as additional information in the process of making the final decision. The use of the method of principal components allows to create a classification of oilfields and group the fields with similar geological and physical characteristics. Based on the grouping, the analysis of the dependence of the success of measures actions on the features of geological and physical characteristics of oilfields has been conducted. It is shown that on oilfields deposited at a depth less than 2 km and represented by highly viscous, highly sulphurous and heavy oils the undertaking of improving water injection profile based on the cross-linked polymer systems technology is impracticable from the standpoint of economic profitability of the measure. By means of k-means clustering concrete ranges of meanings of geologo-technological characteristics for successful and unsuccessful measures actions are singled out. Applying the suggested methodology in conjunction with the rules of selecting candidate wells for enhanced oil recovery methods allows to lower the percentage of unsuccessful measures actions as well as to evaluate the prospective additional oil production without applying cumbersome hydrodynamic modeling.

REFERENCES

1. Abyzbaev, I.I. & Andreev, V.E. (2005) Prognozirovanie effektivnosti fiziko-khimicheskogo vozdeystviya na plast [Predicting efficiency of enhanced oil recovery on formation]. *Neftgazovoe delo – Oil and Gas Business*. 3. pp. 167-176.
2. Keller, Yu.A. (2004) The application of data clustering on the basis of Kohonen self-organizing maps in the process of selecting candidate wells for enhanced oil recovery methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University. Journal Of Control And Computer Science*. 3(28). pp. 32-37. (In Russian).
3. Ferreira, I., Gammiero, A. & Llamedo, M. (2012) Design of a neural network model for predicting well performance after water shutoff treatments using polymer gels (SPE 153908). *Proc. SPE Latin American and Caribbean petroleum conference*. Mexico.

4. Saaedi, A., Camarda, J. & Liang, J-T. (2006) Using neural networks for candidate selection and well performance prediction in water-shutoff treatments using polymer gels – a field-case study (SPE-101028-PA). *Proc. SPE Asia Pacific Oil&Gas conference and exhibition*. Adelaide.
5. Kulikov, A.N., Eliseev, D.Yu. & Rozhkov, A.P. (2011) Some aspects of geological-technological factors' impact on efficiency of physical-chemical technologies required for oil recovery increase out of a layer and their perfection. *Geologiya, geofizika i razrabotka neftyanykh i gazovykh mestorozhdeniy – Geology, geophysics and development of oil and gas fields*, 2011, no. 6, pp. 59–66. (In Russian).
6. Anon. (2001) *STATISTICA: Rukovodstvo polzovatelya* [STATISTICA: User's manual].
7. *Tekhnologiya SPS* [Cross-linked polymer systems technology]. [Online] Available from: http://gidroimpuls.com/tehnologiya_sps. (Accessed: 10th November 2014)
8. *Reagent KARFAS* [Reagent KARFAS]. [Online] Available from: <http://atelye-leo.ru/ingibitori/19-karfas.html>. (Accessed: 14th November 2014)
9. Khalafyan, A.A. (2007) *STATISTICA 6: Statisticheskiy analiz dannykh* [STATISTICA 6: Data statistical analysis]. Moscow: Binom.

М.А. Семёнова, Е.В. Чимитова

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕН ЖИЗНИ

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования
и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания
в сфере научной деятельности № 2.541.2014К от 17.07.2014.*

Рассматриваются вопросы построения вероятностных моделей пропорциональных интенсивностей Кокса и их обобщений – модели Ксая и SCE-модели в случае неизвестного базового распределения времен жизни. Разработан алгоритм оценивания регрессионных параметров и базовой функции риска с использованием функции частичного правдоподобия, описаны критерии проверки гипотез о параметрах моделей и критерий проверки выполнения предположения о пропорциональности рисков, предложенного М.С. Никулиным. Проведено исследование распределений статистик и мощности критериев отношения правдоподобия, Вальда и Никулина.

Ключевые слова: модель пропорциональных интенсивностей; модель Ксая; SCE-модель; оценка максимального правдоподобия; предположение о пропорциональности рисков; критерий отношения правдоподобия; критерий Вальда; проверка адекватности.

В большинстве работ, посвященных исследованиям продолжительности жизни, при построении моделей выживаемости учитывается зависимость вероятности наступления системного события от значений ковариат [1–3]. При этом системное событие может представлять собой изменение определенных биохимических показателей, смерть тяжелообольного пациента, наступление ремиссии или рецидива заболевания при условии получения некоторого вида лечения или другие события. В качестве ковариат, в свою очередь, могут выступать как внутренние свойства объектов исследования (возраст, пол или наличие хронических заболеваний), так и условия проведения эксперимента (вид терапии или наличие вспомогательных видов лечения), которые могут оказывать влияние на время наступления исследуемого события.

Одной из первых моделей зависимости вероятности наступления системного события от ковариат является модель пропорциональных интенсивностей Кокса [4]. Данная модель получила широкую популярность благодаря двум неоспоримым преимуществам. Во-первых, модель пропорциональных интенсивностей учитывает цензурированные наблюдения, наличие которых является типичным для задач анализа выживаемости. Действительно, не для всех наблюдаемых в исследовании объектов можно точно определить время наступления системного события, можно лишь утверждать, что системного события не произошло до некоторого момента времени, такие неполные наблюдения называют цензурированными. Во-вторых, для данной модели существует простая процедура непараметрического оценивания неизвестной базовой функции риска и регрессионных параметров [10].

Несмотря на все преимущества и насчитывающую десятилетия историю использования модели пропорциональных интенсивностей Кокса, вопросы о проверке предположения пропорциональности рисков и о корректности использования данной модели в случае непостоянного во времени отношения рисков наступления системного события при разных значениях ковариат остаются открытыми [5–7]. В [8] предложена модель Ксая, которая является обобщением модели пропорциональных интенсивностей Кокса и позволяет описывать пересекающиеся при разных значениях ковариат функции выживаемости, т.е. непропорциональные риски наступления системного события. Кроме этого, в [1, 9] приведена модель с пересечением функций выживаемости (SCE – simple cross-effect model), позволяющая описать не только пересекающиеся функции выживаемости, но и приближающиеся или отдаляющиеся друг от друга функции при разных значениях ковариат. Основной сложностью построения обобщенных мо-

делей является необходимость одновременного оценивания регрессионных параметров, в том числе обобщающих, и неизвестного базового распределения. Более того, при построении вероятностных моделей выживаемости требуется определение степени влияния ковариат на функцию выживаемости, для чего проверяется гипотеза о незначимости регрессионных параметров с использованием критерия отношения правдоподобия или критерия Вальда.

Таким образом, целью данной работы являются разработка алгоритма оценивания регрессионных параметров и базовой функции риска при построении полупараметрической модели Ксая и модели с пересечением функций выживаемости, исследование распределений статистик и мощности критериев проверки гипотезы о параметрах моделей и критерия проверки предположения о пропорциональности рисков.

1. Описание моделей

Пусть T_x – неотрицательная случайная величина, определяющая время наступления системного события, которое зависит от вектора ковариат $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$. Функция выживаемости определяется соотношением $S_x(t) = P(T_x \geq t) = 1 - F_x(t)$, а кумулятивная функция риска – выражением

$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(u) du = -\ln(S_x(t))$. Результаты эксперимента могут быть представлены в следующем виде:

$$(t_1, x^1, \delta_1), (t_2, x^2, \delta_2), \dots, (t_n, x^n, \delta_n),$$

где n – объем выборки, x^i – значение вектора ковариат для i -го объекта, $t_i = \min\{T_i, C_i\}$ – время наступления системного события T_i или момент цензурирования C_i , δ_i – индикатор цензурирования, $\delta_i = 1\{T_i \leq C_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Модель пропорциональных интенсивностей определяется следующим соотношением [4]:

$$\Lambda_x(t; \beta) = \exp(\beta^T x) \cdot \Lambda_0(t), \quad (1)$$

где β – m -мерный вектор параметров регрессии, $\Lambda_0(t)$ – базовая кумулятивная функция риска.

В соответствии с моделью пропорциональных интенсивностей отношение функций интенсивности при разных значениях ковариаты x не зависит от времени: $\frac{\lambda_{x=a}(t)}{\lambda_{x=b}(t)} = \frac{\exp(\beta^T a)}{\exp(\beta^T b)}$.

Модель Ксая получена путем возведения базовой функции риска в степень $\exp(\gamma^T x)$, позволяет описать непостоянное отношение функций интенсивности и имеет следующий вид:

$$\Lambda_x(t; \beta, \gamma) = \exp(\beta^T x) \{\Lambda_0(t)\}^{\exp(\gamma^T x)}. \quad (2)$$

Регрессионные параметры β и обобщающие регрессионные параметры γ являются m -мерными. При $\gamma = \bar{0}$ данная модель является моделью пропорциональных интенсивностей, тогда как при $\gamma \neq \bar{0}$ функции интенсивности при разных значениях ковариат пересекаются [8]. Отношение интенсивностей

$$\frac{\lambda_{x=a}(t)}{\lambda_{x=b}(t)} = \frac{\exp(\gamma^T a) \{\Lambda_0(t)\}^{\exp(\gamma^T a)-1}}{\exp(\gamma^T b) \{\Lambda_0(t)\}^{\exp(\gamma^T b)-1}} \text{ монотонно.}$$

SCE-модель, предложенная в [9], позволяет получить не только пересекающиеся функции выживаемости, но и приближающиеся и отдаляющиеся друг от друга функции при разных значениях ковариат и может быть записана следующим образом:

$$\Lambda_x(t; \beta, \gamma) = \left(1 + \exp((\beta + \gamma)^T x)\right) \Lambda_0(t)^{\exp(-\gamma^T x)} - 1. \quad (3)$$

Отношение функций интенсивности, соответствующих данной модели,

$$\frac{\lambda_{x=a}(t)}{\lambda_{x=b}(t)} = \frac{\exp(\beta^T a) \left(1 + \exp((\beta + \gamma)^T a) \Lambda_0(t)\right)^{\exp(-\gamma^T a)}}{\exp(\beta^T b) \left(1 + \exp((\beta + \gamma)^T b) \Lambda_0(t)\right)^{\exp(-\gamma^T b)}} \text{ монотонно. Обозначим отношение функций интенсивности } \lambda_{x=a}(t)/\lambda_{x=b}(t) \text{ в точке } t=0 \text{ через } c_0.$$

Тогда в зависимости от значения c_0 функции выживаемости расходятся или приближаются друг к другу, если $\gamma < 0$. Если же $\gamma > 0$, то отношение функций интенсивности убывает с c_0 до 0, т.е. функции выживаемости в этом случае при разных значениях ковариаты пересекаются на интервале $(0, \infty)$.

2. Оценивание параметров

Для нахождения оценок неизвестных регрессионных параметров рассматриваемых моделей применяется метод максимального правдоподобия [10]. Логарифм функции правдоподобия для цензурированных справа данных в общем виде можно записать следующим образом:

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \left[\frac{g(x^i, \Lambda_0(t_i), \theta)}{\sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n g(x^j, \Lambda_0(t_i), \theta)} \right], \quad (4)$$

где θ – вектор регрессионных параметров модели, функция $g(x, \beta) = \exp(\beta^T x)$ для модели пропорциональных интенсивностей, $g(x, \Lambda_0(t), \beta, \gamma) = \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0(t))^{\exp(\gamma^T x) - 1}$ для модели Ксая и

$g(x, \Lambda_0(t), \beta, \gamma) = \exp(\beta^T x) \left(1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0(t)\right)^{\exp(-\gamma^T x) - 1}$ для SCE-модели.

Поскольку для модели пропорциональных интенсивностей функция $g(x, \beta)$ не зависит от базовой функции риска, то для нахождения оценок регрессионных параметров модели необходимо просто максимизировать логарифм функции правдоподобия: $\hat{\beta} = \arg \max_{\beta} \ln L(\beta)$. В [10] предложена непараметрическая оценка базовой функции риска модели пропорциональных интенсивностей, которая может быть записана следующим образом:

$$\hat{\Lambda}_0(t) = \sum_{i=1, t \geq t_i}^n \left[\delta_i / \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n \exp(\hat{\beta}^T x) \right].$$

В [1] предложена итеративная процедура оценивания регрессионных параметров и базовой функции риска для семейства обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей. Для модели Ксая и SCE-модели с зависящими от базовой функции риска функциями $g(x, \Lambda_0(t), \beta, \gamma)$ данный алгоритм можно сформулировать следующим образом.

Чтобы оценить вектор регрессионных параметров $\theta = [\beta^T, \gamma^T]^T$ обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей, необходимо:

1. Положить $k = 0$, задать начальное приближение $\hat{\theta}_0 = [\hat{\beta}_0^T, \hat{\gamma}_0^T]^T$.

2. Оценить базовую функцию риска $\hat{\Lambda}_0(t; \hat{\theta}_k)$, для этого:

а) упорядочить r различных значений полных наблюдений ($\delta_i = 1$) по возрастанию: $w_1 < w_2 < \dots < w_r$, задать d_i равным числу наблюдений со значением w_i ;

б) вычислить оценку функции риска для каждого w_i : $\hat{\Lambda}_0(0; \hat{\theta}_k) = 0$,

$$\hat{\Lambda}_0(w_i; \hat{\theta}_k) = \frac{d_1}{\sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n g(x, \hat{\Lambda}_0(0; \hat{\theta}_k), \hat{\theta}_k)}, \quad \hat{\Lambda}_0(w_{i+1}; \hat{\theta}_l) = \hat{\Lambda}_0(w_i; \hat{\theta}_k) + \frac{d_{i+1}}{\sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n g(x, \hat{\Lambda}_0(w_i; \hat{\theta}_k), \hat{\theta}_k)}, \quad i = 2, \dots, r-1.$$

3. Получить оценку $\hat{\theta}_{k+1} = \arg \max_{\theta} \ln L(\hat{\theta}_k)$.

4. Если $|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k| \geq \varepsilon$, задать $k = k + 1$ и перейти на шаг 2, иначе – считать $\hat{\theta}_{k+1}$ найденной оценкой регрессионных параметров.

В результате проведенного методами статистического моделирования исследования оценок регрессионных параметров модели пропорциональных интенсивностей, модели Ксая и SCE-модели, полученных с использованием описанного алгоритма, показано, что с увеличением объема выборок уменьшается смещение и дисперсия получаемых оценок, тогда как при повышении степени цензурирования смещение и дисперсия оценок увеличиваются.

3. Критерии проверки гипотез о параметрах

В общем виде гипотеза о параметрах модели может быть записана как $H_0: \theta = \theta^0$ и проверена с помощью критерия отношения правдоподобия или критерия Вальда.

Статистика критерия отношения правдоподобия имеет вид

$$LR = 2(\ln L(\hat{\theta}) - \ln L(\theta^0)) \quad (5)$$

и асимптотически распределена по закону χ^2 с s степенями свободы, где s – количество оцениваемых параметров модели [13].

Статистика критерия Вальда для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta^0$ может быть записана следующим образом:

$$W = (\hat{\theta} - \theta^0)^T I(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta^0), \quad (6)$$

где $I(\hat{\theta}) = -\left[\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{ij}$ – оценка информационной матрицы Фишера, $i, j = 1, \dots, s$. Статистика (6) также

асимптотически распределена по закону χ^2 с количеством степеней свободы, равным количеству оцениваемых параметров. Кроме этого, критерий Вальда позволяет проверять гипотезу о каждом параметре $H_0: \theta_i = \theta_i^0$, $i = 1, \dots, s$, в этом случае используется статистика

$$Wi = \frac{(\hat{\theta}_i - \theta_i^0)^2}{[I^{-1}(\hat{\theta})]_{ii}}, \quad (7)$$

где $[I^{-1}(\hat{\theta})]_{ii}$ – диагональный элемент матрицы, обратной для матрицы $I(\hat{\theta})$. Статистика (7) асимптотически распределена по закону χ^2 с одной степенью свободы [13].

Для получения оценки информационной матрицы Фишера вычислим производные по параметрам логарифма функции правдоподобия (3):

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{h(t_i)}{g(t_i)h^2(t_i)} \left(h(t_i) \frac{\partial g(t_i)}{\partial \theta_k} - g(t_i) \frac{\partial h(t_i)}{\partial \theta_k} \right) \right], \quad g(t_i) = g(x^i, \Lambda_0(t_i), \theta), \quad h(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n g(x^j, \Lambda_0(t_i), \theta),$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_l \partial \theta_k} = \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{1}{g(t_i)} \frac{\partial^2 g(t_i)}{\partial \theta_l \partial \theta_k} - \frac{1}{h(t_i)} \frac{\partial^2 h(t_i)}{\partial \theta_l \partial \theta_k} - \frac{1}{g^2(t_i)} \frac{\partial g(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial h(t_i)}{\partial \theta_l} + \frac{1}{h^2(t_i)} \frac{\partial h(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial g(t_i)}{\partial \theta_l} \right], \quad k, l = 1, \dots, s.$$

В случае модели пропорциональных интенсивностей (1) выражения для вычисления первой и второй производных вспомогательной функции $g(x, \beta) = \exp(\beta^T x)$ имеют вид $\frac{\partial g(x, \beta)}{\partial \beta_k} = x_k \exp(\beta^T x)$ и $\frac{\partial^2 g(x, \beta)}{\partial \beta_l \partial \beta_k} = x_l x_k \exp(\beta^T x)$, соответственно, $k, l = 1, \dots, m$.

Далее обозначим для краткости через Λ_0 функцию $\Lambda_0(t)$. Тогда для модели Ксая (2) производные функции $g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma) = \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1}$ по параметру β :

$$\frac{\partial g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \beta_k} = x_k \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1},$$

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \beta_l \partial \beta_k} = x_l x_k \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1},$$

по параметру γ :

$$\frac{\partial g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_k} = x_k \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1} (1 + \exp(\gamma^T x) \ln \Lambda_0),$$

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = x_l x_k \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1} (1 + 3 \exp(\gamma^T x) \ln \Lambda_0 + \exp^2(\gamma^T x) \ln^2 \Lambda_0),$$

смешанная производная по параметрам:

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_l \partial \beta_k} = x_l x_k \exp((\beta + \gamma)^T x) (\Lambda_0)^{\exp(\gamma^T x) - 1} (1 + \exp(\gamma^T x) \ln \Lambda_0), \quad k, l = 1, \dots, m.$$

Для SCE-модели (3) производные функции $g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma) = \exp(\beta^T x) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 1}$ по параметрам β и γ приведены ниже:

$$\frac{\partial g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \beta_k} = x_k \exp(\beta^T x) (1 + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 2},$$

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \beta_l \partial \beta_k} = x_l x_k \exp(\beta^T x) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 3} \left[(1 + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) + \exp(\beta^T x) \Lambda_0 (2 + \exp(\beta^T x) \Lambda_0 - 3 \exp(\gamma^T x) - 2 \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) \right],$$

$$\frac{\partial g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_k} = x_k \exp(\beta^T x) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 2} \left[\exp(\beta^T x) (1 - \exp(\gamma^T x)) \Lambda_0 - (\exp(-\gamma^T x) + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) \ln (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) \right],$$

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_l \partial \gamma_k} = x_l x_k \exp(\beta^T x) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 3} \left[(\exp(\gamma^T x) - 1) \left\{ (1 - \exp(\gamma^T x)) \exp(\beta^T x) \Lambda_0 + (\exp(-\gamma^T x) + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) \ln (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) \right\} + (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) \left\{ \ln (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) - \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0 - 1 \right\} \right],$$

$$\frac{\partial^2 g(x, \Lambda_0, \beta, \gamma)}{\partial \gamma_l \partial \beta_k} = x_l x_k \exp(\beta^T x) (1 + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0)^{\exp(-\gamma^T x) - 3} \left[\exp(\beta^T x) \Lambda_0 - 2 \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0 + (\exp(-\gamma^T x) + \exp(\beta^T x) \Lambda_0) \ln (1 + \exp((\beta + \gamma)^T x) \Lambda_0) \right], \quad k, l = 1, \dots, m.$$

Как правило, при построении моделей зависимости функции выживаемости от ковариат возникает необходимость проверки гипотезы о равенстве нулю каждого параметра модели. Если гипотеза от-

вергается, то соответствующая данному параметру ковариата считается значимой. Важно отметить, что при построении обобщенных моделей значимость ковариаты может быть установлена на основании результатов проверки гипотезы о равенстве нулю как регрессионного параметра β , так и обобщающего параметра γ , соответствующих данной ковариате.

В результате исследования методами статистического моделирования распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев отношения правдоподобия и критерия Вальда проверки гипотезы о параметрах модели пропорциональных интенсивностей и модели Ксая показано, что с увеличением объема выборок расстояние между эмпирическими распределениями статистик и соответствующим предельным χ^2 -распределением сокращается, распределения статистик не зависят от значений ковариат и регрессионных параметров. В случае проверки гипотезы о незначимости параметров β и γ модели с пересечением функций выживаемости распределения статистики критерия Вальда оказываются далекими от предельного χ^2 -распределения даже при больших объемах выборок.

Не менее важной задачей, решаемой с использованием критериев проверки гипотез о параметрах обобщенных моделей, является проверка гипотезы о согласии с моделью пропорциональных интенсивностей Кокса. Для этого формулируется гипотеза о равенстве нулю только обобщающего параметра γ .

Для исследования распределений статистик критериев проверки гипотезы $H_0: \gamma = 0$ о равенстве нулю обобщающего параметра SCE-модели согласно модели пропорциональных интенсивностей Кокса с регрессионным параметром $\beta = 0,5$ и базовым экспоненциальным распределением моделировались цензурированные выборки объемом $n = 100$ со скалярной ковариатой $x = \{0, 1\}$, объем моделирования $N = 10000$. На рис. 1 и 2 представлены распределения статистик критерия отношения правдоподобия и критерия Вальда для разных степеней цензурирования, а также соответствующее предельное χ^2_1 -распределение.

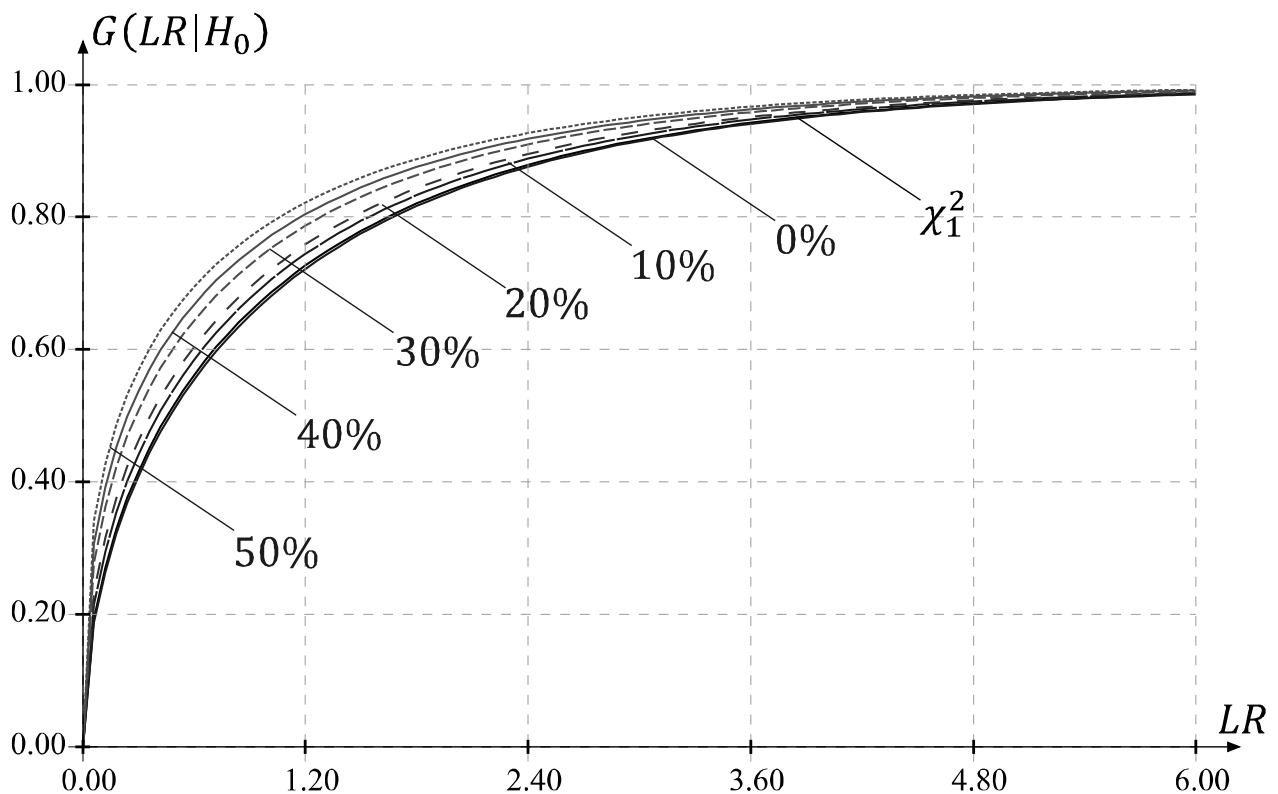


Рис 1. Эмпирические функции распределения статистики критерия отношения правдоподобия при проверке гипотезы о незначимости обобщающего параметра модели с пересечением функций выживаемости

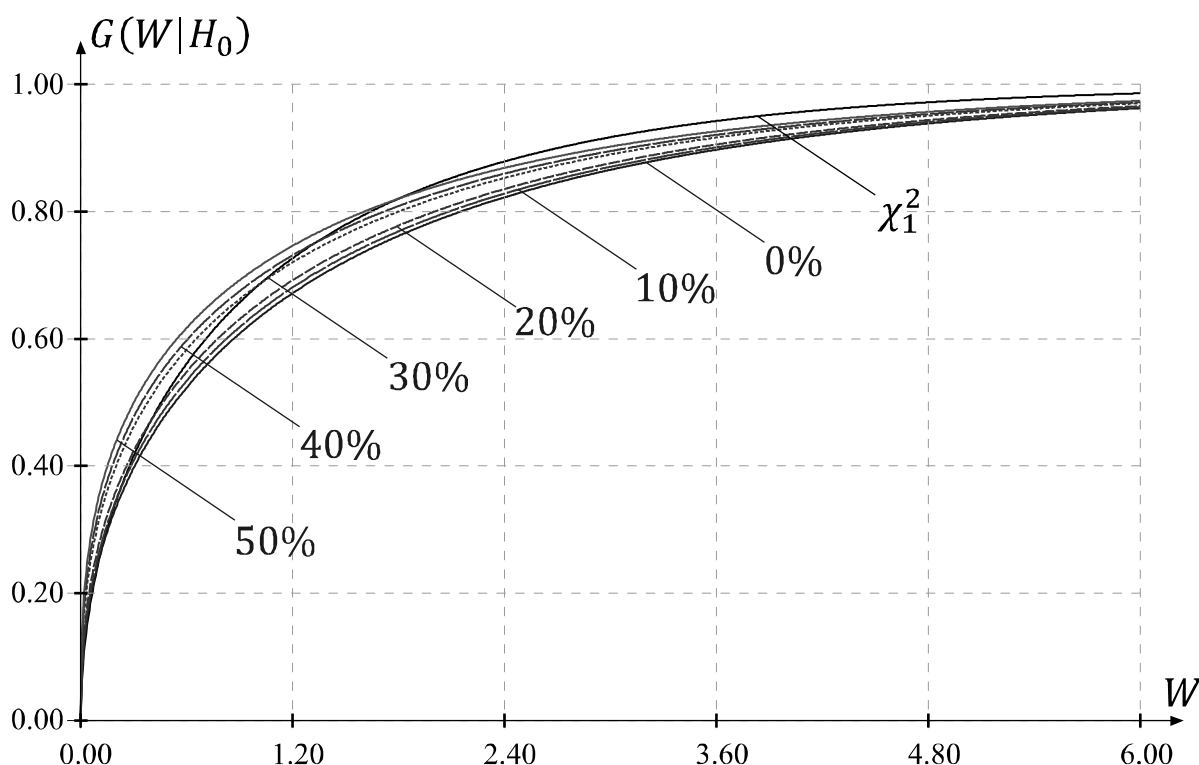


Рис 2. Эмпирические функции распределения статистики критерия Вальда при проверке гипотезы о незначимости обобщающего параметра модели с пересечением функций выживаемости

На рис. 1 видно, что в случае полных выборок (без цензурирования) распределение статистики критерия отношения правдоподобия $G(S|H_0)$ близко к предельному χ_1^2 -распределению уже при $n = 100$. Однако с ростом степени цензурирования расстояние от эмпирических распределений статистики данного критерия до предельного закона увеличивается. В свою очередь распределения статистики критерия Вальда значительно отклоняются от предельного χ_1^2 -распределения даже в случае проверки гипотезы по полным выборкам. Поэтому при проверке гипотезы о параметрах SCE-модели по критерию Вальда использование предельного распределения для вычисления достигнутого уровня значимости может привести к неверному выводу. Данный факт является существенным недостатком критерия Вальда в сравнении с критерием отношения правдоподобия.

4. Критерий проверки предположения о пропорциональности рисков

Существует ряд методов проверки предположения о пропорциональности рисков при построении модели пропорциональных интенсивностей: графические методы, критерии, основанные на остатках, критерии Вальда и отношения правдоподобия для проверки незначимости добавленных в модель зависимых от времени ковариат и критерии против определенных конкурирующих гипотез. Одним из графических методов является сравнение графиков оценки Каплана–Мейера распределения остатков Кокса–Снелла [14] с функцией стандартного экспоненциального распределения. Другой графический метод основан на сравнении наблюдаемых и ожидаемых кривых выживаемости: если они достаточно близки, то предположение пропорциональности рисков выполняется. Однако все графические методы основаны на субъективной оценке и могут быть использованы лишь для предварительной оценки адекватности модели.

Применение критерия проверки гипотезы о согласии при проверке предположения пропорциональности рисков является более объективным методом, чем графические методы, описанные ранее, так как позволяет получить значение статистик и достигнутые уровни значимости p . В существующей ли-

тературе рассматривается несколько критериев проверки предположения пропорциональности рисков. Модифицированный критерий, основанный на остатках Шонфельда, предложен в [7]. Для цензурированных данных в [5, 6] разработаны статистики проверки гипотезы о согласии с моделью пропорциональных интенсивностей. Однако применение данных критериев согласия для проверки предположения о пропорциональности рисков связано с необходимостью моделирования неизвестных распределений статистик [11] и / или с идентификацией базового распределения [12], что требует значительных вычислительных и временных ресурсов.

В настоящей работе рассматривается критерий, предложенный М.С. Никулиным в [9], для проверки гипотезы

$$H_0 : \Lambda_x(t; \hat{\beta}) = \exp(\hat{\beta}^T x) \Lambda_0(t)$$

о модели пропорциональных интенсивностей против конкурирующей гипотезы о модели с пересечением функций выживаемости

$$H_1 : \Lambda_x(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \left(1 + \exp((\hat{\beta} + \hat{\gamma})^T x)\right) \Lambda_0(t) \exp(-\hat{\gamma}^T x) - 1.$$

Статистика критерия проверки гипотезы H_0 против гипотезы H_1 может быть записана в векторной форме следующим образом:

$$T = n^{-1} U^T \hat{D}^{-1} U, \quad (8)$$

где $U = [U_1, \dots, U_m]^T$, $U_k = \sum_{i=1}^n \delta_i \left[-x_k^i \ln(1 + \exp(\hat{\beta}^T x^i)) - \frac{\tilde{S}_1(t_i)}{S_0(t_i)} \right]$, $k = 1, \dots, m$, m – размерность вектора параметров модели пропорциональных интенсивностей; $\hat{D} = \hat{\Sigma}_{**} - \hat{\Sigma}_* \hat{\Sigma}_0^{-1} \hat{\Sigma}_*^T$ – ковариационная матрица вектора U ,

$$\hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{S_2(t_i)}{S_0(t_i)} - EE^T \right], \quad \hat{\Sigma}_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{\tilde{S}_2(t_i)}{S_0(t_i)} - \tilde{E}E^T \right], \quad \hat{\Sigma}_{**} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\frac{\tilde{\tilde{S}}_2(t_i)}{S_0(t_i)} - \tilde{\tilde{E}}\tilde{\tilde{E}}^T \right],$$

$$E_k = \frac{S_1(t_i)}{S_0(t_i)}, \quad \tilde{E}_k = \frac{\tilde{S}_1(t_i)}{S_0(t_i)},$$

$$S_0(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n \exp(\hat{\beta}^T x^j), \quad S_1(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n x_k^j \exp(\hat{\beta}^T x^j), \quad S_2(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n -x^j (x^j)^T \exp(\hat{\beta}^T x^j),$$

$$\tilde{S}_1(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n -x_k^j \exp(\hat{\beta}^T x^j) \ln(1 + \exp(\hat{\beta}^T x^j) \hat{\Lambda}_0), \quad \tilde{S}_2(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n -x^j (x^j)^T \exp(\hat{\beta}^T x^j) \ln(1 + \exp(\hat{\beta}^T x^j) \hat{\Lambda}_0),$$

$$\tilde{\tilde{S}}_2(t_i) = \sum_{j=1, t_j \geq t_i}^n -x^j (x^j)^T \exp(\hat{\beta}^T x^j) \ln^2(1 + \exp(\hat{\beta}^T x^j) \hat{\Lambda}_0).$$

При справедливости проверяемой гипотезы статистика (8) подчиняется в пределе при $n \rightarrow \infty$ χ^2 -распределению с числом степеней свободы m .

На рис. 3 представлены распределения статистики (8) при объемах выборок $n = 50, 100, 200, 300$ в случае проверки гипотезы $H_0 : \Lambda_x(t; \hat{\beta}) = \exp(\hat{\beta}^T x) \Lambda_0(t)$, компоненты вектора ковариат $x_1 = \{0, 1\}$ и $x_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, значения параметров $\beta_1 = 0, 3$ и $\beta_2 = 0, 6$.

Как видно из рис. 3, с увеличением объема выборок расстояние между эмпирическим и предельным распределением статистики (8) сокращается. Также было показано, что размерность вектора ковариат и, следовательно, количество оцениваемых параметров влияют не только на число степеней свободы соответствующего предельного распределения, но и на близость эмпирического распределения статистики к теоретическому – чем меньше ковариат, тем ближе смоделированное распределение статистики к соответствующему предельному при том же объеме выборки.

Сравним мощность критерия проверки предположения о пропорциональности рисков, предложенного М.С. Никулиным, с мощностью критериев проверки гипотез о параметрах. Действительно, гипотеза о незначимости обобщающих параметров $H_0 : \gamma = \bar{0}$ модели с пересечением функций выживаемости является гипотезой о выполнении предположения пропорциональности рисков, так как в случае

$\gamma = \bar{0}$ модель (3) является моделью пропорциональных интенсивностей. Рассмотрим следующие конкурирующие гипотезы:

- 1) $H_1^1 : \Lambda_x(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \left(1 + \exp((\hat{\beta} + \hat{\gamma})^T x) \Lambda_0(t)\right)^{\exp(-\hat{\gamma}^T x)} - 1, \gamma = 0,5;$
- 2) $H_1^2 : \Lambda_x(t; \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \left(1 + \exp((\hat{\beta} + \hat{\gamma})^T x) \Lambda_0(t)\right)^{\exp(-\hat{\gamma}^T x)} - 1, \gamma = -0,5.$

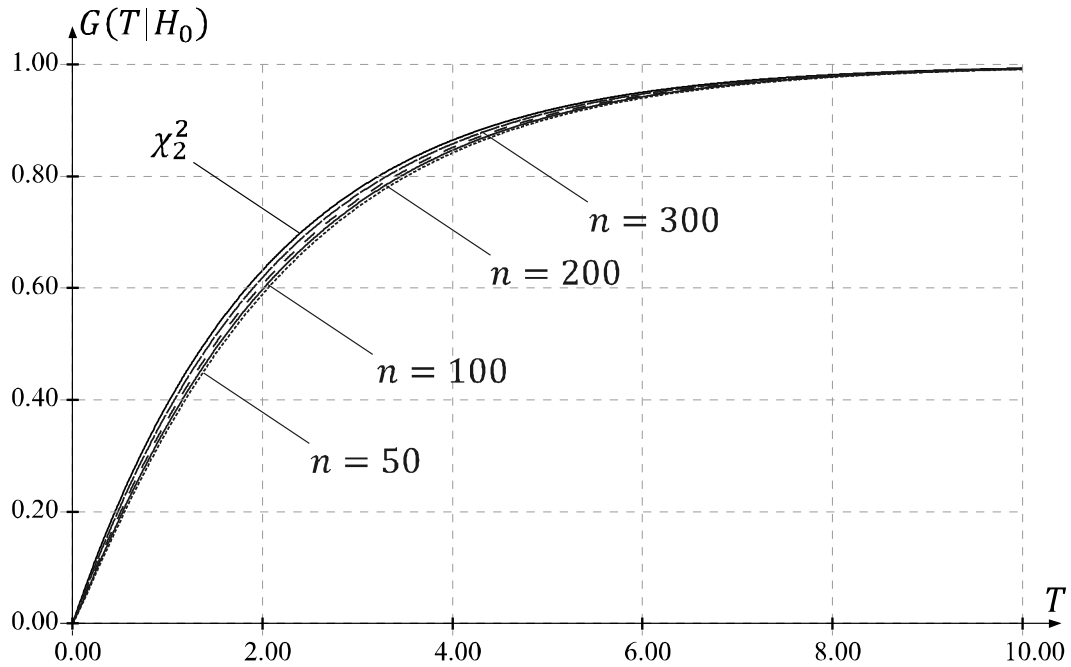


Рис 3. Эмпирические функции распределения статистики T критерия проверки предположения о пропорциональности рисков

Функции выживаемости, соответствующие гипотезам H_0 , H_1^1 и H_1^2 при $\beta = 0,5$ для разных значений ковариаты $x = \{0,1\}$, представлены на рис. 4–6 соответственно.

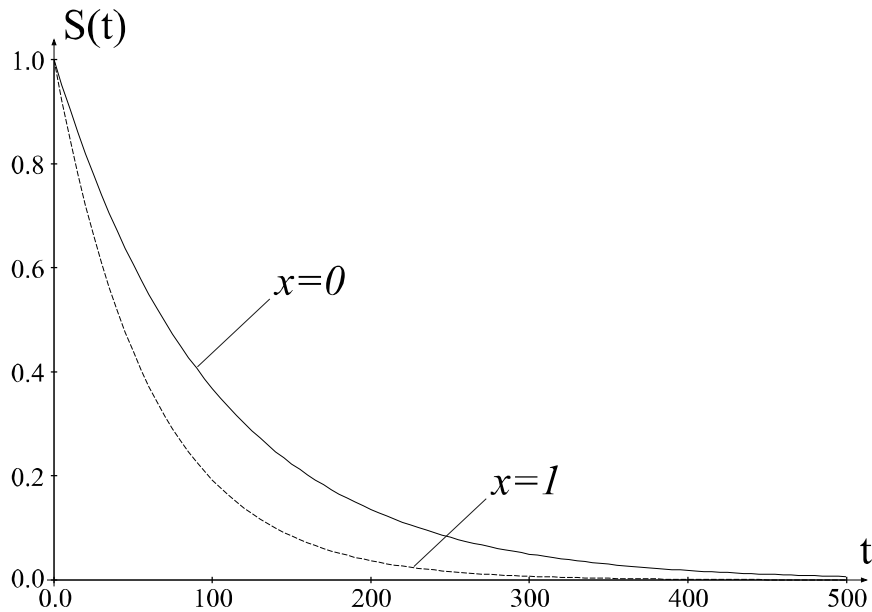


Рис. 4. Функции выживаемости согласно H_0

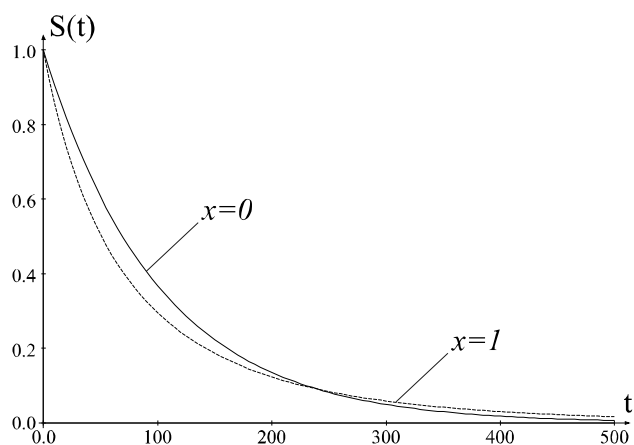


Рис 5. Функции выживаемости согласно H_1^1

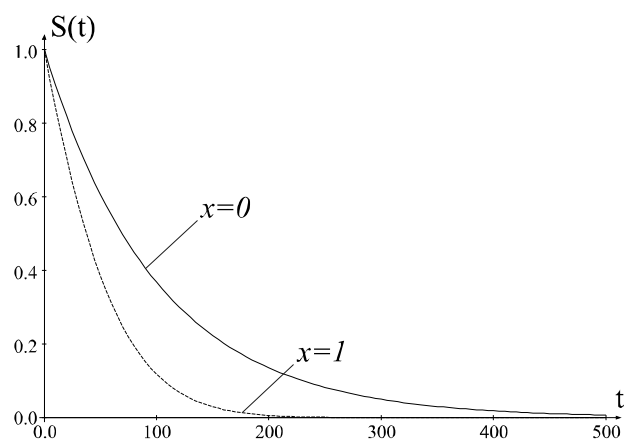


Рис 6. Функции выживаемости согласно H_1^2

На рис. 5 видно, что при разных значениях ковариаты функции выживаемости, соответствующие модели с обобщающим параметром $\gamma = 0,5$, пересекаются. Расстояние между функциями выживаемости на рис. 6 при справедливости гипотезы H_1^2 больше аналогичного расстояния на рис. 4 при справедливости нулевой гипотезы о модели пропорциональных интенсивностей. В таблице представлены полученные оценки мощности рассматриваемых критериев для объемов выборок $n = 100, 200$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0,1$, объем моделирования $N = 10000$.

Оценки мощности критериев

Критерий	H_1^1		H_1^2	
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 100$	$n = 200$
LR	0,40	0,57	0,14	0,34
W	0,01	0,20	0,27	0,45
T	0,36	0,57	0,21	0,38

В случае конкурирующей гипотезы H_1^1 , соответствующей SCE-модели с пересекающимися функциями выживаемости, наиболее мощным из рассмотренных критериев оказался критерий отношения правдоподобия. При объеме моделируемых выборок $n = 100$ мощность критерия Вальда оказалась меньше заданного уровня значимости, при увеличенном объеме выборок $n = 200$ критерий Вальда показал наименьшую мощность в сравнении с критерием отношения правдоподобия и критерием Никулина. В случае конкурирующей гипотезы H_1^2 с расходящимися функциями выживаемости критерии со статистиками LR и T уступают по мощности критерию со статистикой W на всех рассмотренных объемах выборок, при этом мощность критерия Никулина больше мощности критерия отношения правдоподобия. Однако, учитывая смещенность критерия Вальда на паре конкурирующих гипотез H_0 и H_1^1 , а также существенное отличие эмпирических распределений статистик $G(S|H_0)$ от соответствующего предельного χ^2 -распределения, для проверки предположения пропорциональности рисков рекомендуется применять критерий отношения правдоподобия со статистикой (5) и критерий Никулина со статистикой (8).

Заключение

В настоящей работе сформулирован итеративный алгоритм оценивания регрессионных параметров и базовой функции риска полупараметрической модели Ксая и SCE-модели. В результате проведенного методами компьютерного моделирования исследования статистических свойств оценок параметров моделей показано, что с увеличением объема выборок уменьшаются смещение и дисперсия по-

лучаемых оценок, тогда как при повышении степени цензурирования смещение и дисперсия оценок увеличиваются.

На основании результатов исследования распределений статистик и мощности критериев отношения правдоподобия, Вальда и Никулина целесообразно рекомендовать использование критерия отношения правдоподобия и критерия Никулина для проверки гипотезы о выполнении предположения пропорциональности интенсивностей при построении полупараметрической модели пропорциональных интенсивностей Кокса. Применение критерия Вальда для проверки гипотезы как о значимости влияния ковариат, так и о согласии с моделью Кокса, сопряжено с возможными ошибками в определении достигнутого уровня значимости ввиду существенных отличий реальных распределений статистики при конечных объемах выборок от соответствующих предельных законов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagdonavicius V., Nikulin M. Accelerated life models: modeling and statistical analysis. Boca Raton, Florida : Chapman & Hall/CRC, 2002. 334 p.
2. Lee E., Wang J. Statistical methods for survival data analysis. 3rd. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003. 534 p.
3. Semenova M., Bitukov A. Parametric models in the analysis of patients with multiple myeloma // Proceedings of the International Workshop "Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control". Novosibirsk : NSTU publisher, 2013. P. 250–256.
4. Cox D.R., Roy J. Regression models and life tables (with Discussion) // Journal of the Royal Statistical Society. 1972. Series B. V. 34. P. 187–220.
5. Lin D.Y. Goodness-of-fit analysis for the Cox regression model based on a class of parameter estimators // JASA. 1991. V. 86. P. 725–728.
6. Grambsch P., Therneau T.M. Proportional hazards tests and diagnostics based on weighted residuals // Biometrika. 1994. V. 81. P. 515–526.
7. Harrell F.E. Regression modeling strategies with applications to linear models, logistic regression, and survival analysis. N.Y. : Springer, 2002. 572 p.
8. Hsieh F. On heteroscedastic hazards regression models: theory and application // Journal of the Royal Statistical Society. 2001. Series B. V. 63. P. 63–79.
9. Bagdonavicius V., Levulienė R., Nikulin M. Modeling and testing of presence of hazard rates crossing under censoring // Comm. in Stat. Sim. and Comp. 2012. V. 41. P. 980–991.
10. Breslow N.E. Analysis of survival data under the proportional hazards model // International Statistical Review. 1975. V. 43. P. 45–57.
11. Чимитова Е.В., Ведерникова М.А. Проверка адекватности модели пропорциональных интенсивностей Кокса по случайно цензурированным выборкам // Сборник научных трудов НГТУ. 2010. № 4(62). С. 103–108.
12. Balakrishnan N., Chimitova E., Galanova N., Vedernikova M. Testing goodness-of-fit of parametric AFT and PH models with residuals // Comm. in Stat. Sim. and Comp. 2013. V. 42. P. 1352–1367.
13. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных // Финансы и статистика. 1983. 471 с.
14. Kalbfleisch J.D., Prentice R.L. The statistical analysis of failure time data. N.Y. : John Wiley & Sons, Inc., 1980.

Семёнова Мария Александровна. E-mail: chimitova@corp.nstu.ru

Чимитова Екатерина Владимировна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: vedernikova.m.a@gmail.com

Новосибирский государственный технический университет

Поступила в редакцию 2 декабря 2014 г.

Semenova Maria A., Chimitova Ekaterina V. (Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).

Testing hypothesis of parameters of generalized proportional hazards models under unknown lifetime distribution.

Keywords: proportional hazards model; Hsieh model; SCE-model; maximum likelihood estimation; proportional hazards assumption; likelihood ratio test; Wald test; goodness-of-fit testing

DOI 10.17223/19988605/31/5

The paper deals with the construction of the Cox proportional hazards model and its generalizations. The considered generalizations of the proportional hazards model are the Hsieh model and the simple cross-effect model (SCE-model), which allow decreasing, increasing or non-monotonic behavior of the ratio of hazard rate functions. The algorithm of the estimation of regression parameters and unknown baseline distribution for the generalized models is developed by using the partial likelihood function. The research on statistical properties of estimates carried out with computer simulations, has shown that the bias and the variance of obtained estimates decrease with the sample size growth. However, the bias and the variance of obtained estimates increase with the censoring degree growth.

The likelihood ratio test and the Wald test are used for testing hypothesis about parameters of considered models. In this paper, the expressions of elements of the matrix of the second partial derivatives by regression parameters of the Hsieh model and SCE-model have been obtained. In the case of testing hypothesis about parameters of proportional hazards model and the Hsieh model, the distributions $G(S | H_0)$ of likelihood ratio test statistic and the Wald statistic are independent of covariates values or regression parameters values. The difference between the simulated test statistic distributions and the corresponding χ^2 -distributions decreases with the sample size growth. The dimension of the covariate vector and the number of estimated parameters affect not only the number of degrees of freedom of the limiting distribution, but also the closeness of simulated test statistic distributions to the theoretical distributions: the smaller the dimension of the covariate vector the smaller the difference between empirical and limiting distributions for the same sample size. In the case of testing hypothesis of insignificance of parameters β and γ of SCE-model, the statistic distributions $G(S | H_0)$ of the Wald test are not close to the corresponding limiting χ^2 -distributions even for the large sample sizes.

Basing on the obtained results of research on statistic distributions and the power of considered tests, it is advisable to use the test proposed by M.S. Nikulin and likelihood ratio test for checking proportional hazard assumption against the competing hypothesis corresponding to the SCE-model. The application of the Wald test can result in inaccurate computation of p-value because empirical statistic distributions significantly differ from corresponding limiting distributions.

REFERENCES

1. Bagdonavicius, V. & Nikulin M. (2002) *Accelerated life models: modeling and statistical analysis*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.
2. Lee, E. & Wang, J. (2003) *Statistical methods for survival data analysis*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
3. Semenova, M. & Bitukov, A. (2013) Parametric models in the analysis of patients with multiple myeloma. *Proc. of the International Workshop "Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control"*. Novosibirsk: NSTU. pp. 250-256.
4. Cox, D.R. & Roy, J. (1972) Regression models and life tables (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. 34. pp. 187-220.
5. Lin, D.Y. (1991) Goodness-of-fit analysis for the Cox regression model based on a class of parameter estimators. *JASA*. 86. pp. 725-728. DOI: 10.1080/01621459.1991.10475101
6. Grambsch, P. & Therneau, T.M. (1994) Proportional hazards tests and diagnostics based on weighted residuals. *Biometrika*. 81. pp. 515-526. DOI: 10.1093/biomet/81.3.515
7. Harrell, F.E. (2002) *Regression modeling strategies with applications to linear models, logistic regression, and survival analysis*. New York: Springer.
8. Hsieh, F. (2001) On heteroscedastic hazards regression models: theory and application. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. 63. pp. 63-79. DOI: <http://dx.doi.org/10.1111/1467-9868.00276>
9. Bagdonavicius, V., Levulienė, R. & Nikulin, M. (2012) Modeling and testing of presence of hazard rates crossing under censoring. *Communication in Statistics – Simulation and Computation*. 41. pp. 980-991. DOI: 10.1080/03610918.2012.625758
10. Breslow, N.E. (1975) Analysis of survival data under the proportional hazards model. *International Statistical Review*. 43. pp. 45-57.
11. Chimitova, E.V. & Vedernikova, M.A. (2010) Testing goodness-of-fit hypothesis with the proportional hazard Cox model by independent censored samples. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*. 4(62). 103-108. (In Russian).
12. Balakrishnan, N., Chimitova, E., Galanova, N. & Vedernikova, M. (2013) Testing goodness-of-fit of parametric AFT and PH models with residuals. *Communication in Statistics – Simulation and Computation*. 42. pp. 1352-1367. DOI: 10.1080/03610918.2012.659824
13. Ayyvazyan, S.A., Enyukov, I.S. & Meshalkin, L.D. (1983) *Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Applied statistic: Basis of modeling and data mining]. Moscow: Finansy i statistika.
14. Kalbfleisch, J.D. & Prentice, R.L. (1980) *The statistical analysis of failure time data*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

М.Н. Сиротина**СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ НАСТУПЛЕНИЯ СОСЕДНИХ СОБЫТИЙ В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ И УСЛОВИЯ РЕКУРРЕНТНОСТИ ПОТОКА**

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. По окончании длительности мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени и т.д. В работе получена формула совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями в модулированном синхронном потоке в условиях мертвого времени. Представлены условия рекуррентности рассматриваемого потока, а также его вероятностные характеристики.

Ключевые слова: модулированный синхронный поток событий; мертвое время; совместная плотность вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями потока; условия рекуррентности потока.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование модулированного синхронного потока событий, начатое в работах [1–4].

Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [5].

На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении стала статья [6], в которой дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [7–9]. В [7, 8] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками, в [9] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. С начала 90-х гг. отечественные и зарубежные авторы в своих работах [10–15] называют введенные в [7–9] потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо МАР-потоками, либо МС-потоками. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [16–21]; 2) асинхронные и обобщенные асинхронные потоки событий [22–27]; 3) полусинхронные и обобщенные полусинхронные потоки событий [28–33]. В [34] введены в рассмотрение МАР-потоки событий первого порядка (собственно, МАР-потоки, введенные в [9]) и МАР-потоки событий второго порядка (суперпозиция двух синхронизированных МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [34] показано, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [24, 27, 29, 33, 35]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [16–22, 26, 28, 30–32].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [36], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В работах [1–4] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу MAP-потоков второго порядка. Синхронный поток событий систематически исследовался в работах [16–21, 37–41]. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [1–4], приведен вывод совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями модулированного синхронного дважды стохастического потока, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени. Приводятся условия рекуррентности рассматриваемого потока, а также некоторые его вероятностные характеристики.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; переход осуществляется с вероятностью q ($0 < q \leq 1$); с вероятностью $1 - q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности T (далее мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, т.е. события, наступившие в течение интервала мертвого времени, не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь генерирует период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления наблю-

даемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности T , ось под номером 1 отображает исходный модулированный поток событий, под номером 2 – схему создания мертвого времени, под номером 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока.

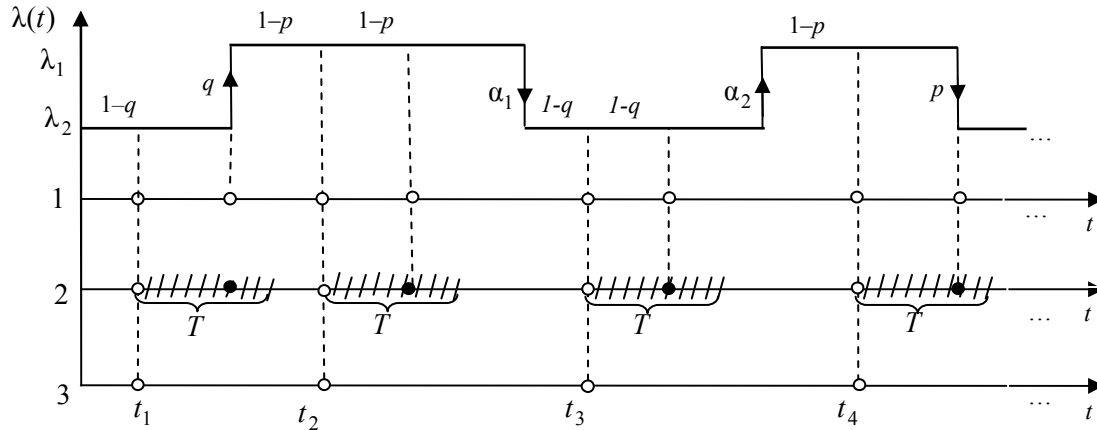


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 & (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) & q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [40].

Подчеркнем, что в постановке задачи принимается первичность наступления события, затем – переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Данное обстоятельство при получении аналитических результатов является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние происходят мгновенно. При получении же численных результатов путем имитационного моделирования необходима определенность, что первично – наступление события, затем смена состояния либо наоборот.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми (в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только моменты наступления наблюдаемых событий на временной оси $t_1, t_2, \dots$. Рассматривается стационарный режим функционирования потока. Последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий наблюдаемого потока порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события потока), $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока. Так как поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $p_T(\tau_k) = p_T(\tau), \tau \geq 0$, для любого k . Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. $\tau = 0$.

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $k=1,2,\dots$, – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. В силу стационарности потока можно положить $k=1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Тогда $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятностей имеет вид $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Основной задачей работы является получение явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau)$ и явного вида совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$. В ходе исследования находятся условия рекуррентности наблюдаемого потока событий, а также его вероятностные характеристики.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Пусть τ – значение случайной величины длительности интервала между моментами наступления двух соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2).

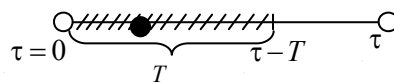


Рис. 2. Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$ – условная плотность вероятностей того, что на интервале $(\tau - T, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $\tau - T$ значение процесса $\lambda(\tau - T) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$); $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за время T процесс $\lambda(t)$ перешел из i -го состояния в j -е, $i, j = 1, 2$; $\pi_i(0|T)$ – условная стационарная вероятность того, что в момент $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии i , событие потока наступило и наступило мертвое время длительности T .

Обозначим $t = \tau - T$, $\tau \geq T$. Введем $p_{jk}(t)$ – переходную вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока и в момент времени t имеет место $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$). Тогда для введенных вероятностей $p_{jk}(t)$ имеет место система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} p_{11}'(t) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(t) + \alpha_2 p_{12}(t), & p_{12}'(t) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{12}(t) + \alpha_1 p_{11}(t), \\ p_{22}'(t) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(t) + \alpha_1 p_{21}(t), & p_{12}'(t) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{21}(t) + \alpha_2 p_{22}(t), \\ p_{11}(0) &= 1, & p_{12}(0) &= 0, & p_{22}(0) &= 1, & p_{21}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, находим

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2 t} \right], & p_{12}(t) &= \frac{\alpha_1}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ p_{21}(t) &= \frac{\alpha_2}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], & p_{22}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2 t} \right], \\ z_{1,2} &= (\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t) = \tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $j, k=1,2$, из формулы (1) для плотности вероятностей $p_T(\tau)$ примут вид

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1(1-p) + p_{12}(t)\lambda_2q, \quad \tilde{p}_{12}(t) = p_{11}(t)\lambda_1p + p_{12}(t)\lambda_2(1-q), \\ \tilde{p}_{22}(t) &= p_{22}(t)\lambda_2(1-q) + p_{21}(t)\lambda_1p, \quad \tilde{p}_{21}(t) = p_{22}(t)\lambda_2q + p_{21}(t)\lambda_1(1-p),\end{aligned}\quad (3)$$

где вероятности $p_{jk}(t)$ определены в (2).

Подставляя (2) в (3), затем заменяя t на $\tau - T$, получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $j, k=1,2$:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_1(1-p)}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_1\lambda_2q}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{12}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_1p}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_1\lambda_2(1-q)}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{21}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_2q}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_2\lambda_1(1-p)}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{22}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_2(1-q)}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_2\lambda_1p}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Для введенных вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $i, j=1,2$, имеет место система дифференциальных уравнений ($0 \leq \tau \leq T$):

$$\begin{aligned}q_{11}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{11}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau), \\ q_{12}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{21}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{22}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau),\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$q_{11}(0) = 1, q_{12}(0) = 0, q_{22}(0) = 1, q_{21}(0) = 0.$$

Решая данную систему дифференциальных уравнений и в полученном решении полагая $\tau = T$, находим

$$\begin{aligned}q_{11}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{22}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ \pi_1 &= \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1,\end{aligned}\quad (5)$$

где π_i , $i=1,2$, – априорная стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени поток находится в i -м состоянии [2].

Для нахождения вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, из исходной формулы (1) введем π_{ij} – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации розыгрыша состояния потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j , $i, j=1,2$.

Тогда относительно введенных $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, и π_{ij} , $i, j=1,2$, в силу марковости процесса $\lambda(t)$ будет справедлива следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}, \\ \pi_2(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\ \pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1,\end{aligned}$$

выражая из которой вероятности $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, получим

$$\pi_1(0|T) = \frac{\pi_{21}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \quad \pi_2(0|T) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}. \quad (6)$$

При этом для вероятностей π_{ij} в силу марковости процесса $\lambda(t)$ можно записать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, & \pi_{21} &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \\ \pi_{12} &= q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, & \pi_{22} &= q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \\ \pi_{11} + \pi_{12} &= 1, & \pi_{21} + \pi_{22} &= 1,\end{aligned} \quad (7)$$

где вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j=1,2$, определены в (5), p_{jk} , $j, k=1,2$, – вероятность того, что в течение интервала между моментом времени $t=0$ и моментом наступления следующего события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния j в состояние k . Тогда $p_{jk} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{jk}(u) du$.

Интегрируя полученные в (4) плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k=1,2$, получим следующие значения переходных вероятностей p_{jk} , $j, k=1,2$:

$$\begin{aligned}p_{11} &= \lambda_1(1-p) \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2 q \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, & p_{12} &= \lambda_1 p \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2(1-q) \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, \\ p_{22} &= \lambda_2(1-q) \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1 p \frac{\alpha_2}{z_1 z_2}, & p_{21} &= \lambda_2 q \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1(1-p) \frac{\alpha_2}{z_1 z_2},\end{aligned} \quad (8)$$

где $z_1 z_2$ определены в (5).

Подставляя вероятности p_{jk} , $j, k=1,2$, из (8) и вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j=1,2$, из (5) в уравнения (7), получим выражения для вероятностей π_{ij} , $i, j=1,2$:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-p)\lambda_1 \alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} (q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2} (p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) + (1-q)\lambda_2 \alpha_1 + \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})),\end{aligned} \quad (9)$$

где π_i , $i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

После подстановки полученных в (9) вероятностей π_{ij} , $i, j=1,2$, в формулы (6) выражения для $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, запишутся в виде

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \frac{q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}, \\ \pi_2(0|T) &= \frac{(1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},\end{aligned} \quad (10)$$

где π_i , $i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Для нахождения вероятностей $\pi_i(T)$, $i=1,2$, введем $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, – вероятность того, что в момент времени τ процесс находится в i -м состоянии, $0 < \tau < T$. Тогда $\pi_i(\tau + \Delta\tau|T)$, $i=1,2$, – вероятность того, что в момент времени $\tau + \Delta\tau$ процесс находится в i -м состоянии, $0 < \tau + \Delta\tau < T$. Рассматривая на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ всевозможные варианты поведения процесса $\lambda(\tau)$ относительно искомых вероятностей $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1'(\tau|T) &= -(p\lambda_1 + \alpha_1)\pi_1(\tau|T) + (q\lambda_2 + \alpha_2)\pi_2(\tau|T), \\ \pi_2'(\tau|T) &= -(q\lambda_2 + \alpha_2)\pi_2(\tau|T) + (p\lambda_1 + \alpha_1)\pi_1(\tau|T),\end{aligned}$$

с граничными условиями $\pi_i(\tau|T) = \pi_i(0|T)$ для $\tau = 0$, $i=1,2$.

Решение данной системы примет вид

$$\begin{aligned}\pi_1(\tau|T) &= \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau}, \\ \pi_2(\tau|T) &= \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau},\end{aligned}$$

где π_i , $i=1,2$, определены в (5).

Подставив в последней формуле для $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, вместо τ значение T и обозначив $\pi_i(T|T)$, $i=1,2$, как $\pi_i(T)$, $i=1,2$, получим

$$\begin{aligned}\pi_1(T) &= \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ \pi_2(T) &= \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},\end{aligned}\tag{11}$$

где π_i , $i=1,2$, определены в (5), $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, определены в (10).

Несложно показать, что

$$\begin{aligned}\pi_1(T) &= \pi_1(0|T)q_{11}(T) + \pi_2(0|T)q_{21}(T), \\ \pi_2(T) &= \pi_2(0|T)q_{12}(T) + \pi_1(0|T)q_{22}(T).\end{aligned}\tag{12}$$

Подставляя (4), (5) и (10) в (1), учитывая (12) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получаем формулу для нахождения плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном потоке при непродлеваемом мертвом времени $p_T(\tau)$:

$$\begin{aligned}p_T(\tau) &= 0, 0 \leq \tau < T, \\ p_T(\tau) &= \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T,\end{aligned}\tag{13}$$

где $\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(z_2 - \lambda_1\pi_1(T) - \lambda_2\pi_2(T))$, $1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(-z_1 + \lambda_1\pi_1(T) + \lambda_2\pi_2(T))$, $z_{1,2}$ определены в (2), $\pi_i(T)$, $i=1,2$ определены в (11).

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть τ_1, τ_2 – значения случайной величины длительности смежных интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 3).

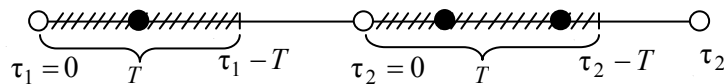


Рис. 3. Смежные интервалы между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда формула для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ запишется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), \\ \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{cases}$$

где $\pi_i(0|T), i=1,2$, определены в (10); $q_{ij}(T), q_{ks}(T), i, j, k, s=1,2$, определены в (5); $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T), \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), j, k, s, n=1,2$, определены в (4) (в формулах (4) нужно заменить τ на τ_1 либо на τ_2).

Используя формулу (12) и сделав замены $t_1 = \tau_1 - T, t_2 = \tau_2 - T$, несложно получить формулу для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_1) \sum_{k=1}^2 q_{jk}(T) \sum_{s=1}^2 \tilde{p}_{ks}(t_2), t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

при этом согласно формулам (1), (12) запишем

$$p_T(t_1) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_1), t_1 \geq 0,$$

$$p_T(t_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_2), t_2 \geq 0.$$

Подставляя значения $q_{jk}(T), j, k=1,2$, (5) в формулу (14) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим разность $p_T(t_1, t_2) - p_T(t_1)p_T(t_2)$ в виде

$$p_T(t_1, t_2) - p_T(t_1)p_T(t_2) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2)) \times \quad (15)$$

$$\times \{ \pi_1(T)(\pi_2(0|T)\tilde{p}_{11}(t_1) - \pi_1(0|T)\tilde{p}_{12}(t_1)) + \pi_2(T)(\pi_2(0|T)\tilde{p}_{21}(t_1) - \pi_1(0|T)\tilde{p}_{22}(t_1)) \},$$

где $\pi_i(0|T), i=1,2$, определены в (10), $\pi_i(T), i=1,2$, определены в (11), $\tilde{p}_{ij}(t_1), \tilde{p}_{is}(t_1), i, j, s=1,2$, определены в (4). Тогда $\sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2))$ примет вид

$$\sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2)) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(z_1 e^{-z_1 t_2} - z_2 e^{-z_2 t_2}) / (z_2 - z_1). \quad (16)$$

Подставляя $\pi_i(T), i=1,2$, из (11), $\pi_i(0|T), i=1,2$, из (10), $\tilde{p}_{ij}(t_1), i, j=1,2$, из (4) в выражение в фигурной скобке формулы (15), затем подставляя (16) в (15), после чего осуществляя обратную замену $t_1 = \tau_1 - T, t_2 = \tau_2 - T$, получаем формулу для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) +$$

$$+ e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1\lambda_2(1-p-q)((\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0))((p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)}{(z_2 - z_1)^2(z_1z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)^2} \times$$

$$\times \{ z_1z_2 + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - 2z_1z_2) +$$

$$+ e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) - z_1z_2) \} \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$

где $\pi_i(0), i=1,2$, определены в формуле (10) для $T=0$.

Можно показать, что произведение $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ имеет вид

$$\gamma(T)(1-\gamma(T)) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)((\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0))((p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)}{(z_2 - z_1)^2(z_1z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)^2} \times$$

$$\times \{ z_1z_2 + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - 2z_1z_2) +$$

$$+ e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) - z_1z_2) \} \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})z_1z_2, \quad (17)$$

где $\pi_i(0), i=1,2$, определены в формуле (10) для $T=0$.

Обозначим $f(T)$ выражение в фигурной скобке формулы (17). После преобразования $f(T)$ примет вид

$$f(T) = z_1 z_2 (1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2 + (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} +$$

$$+ (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} (1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}),$$

так что для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) > 0$.

Тогда окончательно совместная плотность $p_T(\tau_1, \tau_2)$ выпишется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \frac{\lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)}{z_1 z_2} \gamma(T)(1-\gamma(T)) \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$
(18)

где $\gamma(T), 1-\gamma(T)$ определены в (13).

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, когда модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком.

1. Из формулы (17) для $p_T(\tau_1, \tau_2)$ следует первое условие рекуррентности наблюдаемого потока. Если $1-p-q=0$, то совместная плотность (17) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$.

При этом плотность вероятностей $p_T(\tau)$ (13) примет вид

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T,$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1 - \lambda_2 \pi_2 + (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 - (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

где $z_{1,2}$ определены в (2), $\pi_i, i=1,2$ определены в (5).

2. Из формулы (18) для произведения $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ следует второе условие рекуррентности наблюдаемого потока. Если $(\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$, то совместная плотность (17) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$, при этом $\gamma(T) = 1$.

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ (13) примет вид

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T,$$

где z_1 определена в (2).

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеперечисленных условий факторизации или их комбинации нетрудно доказать, используя метод математической индукции, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ для любого k : $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) \dots p_T(\tau_k)$. Таким образом, наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

При обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, полученных в [1].

Для первого условия факторизации потока $1 - p - q = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = q, k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а определяется лишь своим значением в момент наступления события потока. В данной ситуации имеется некоторая близость рассматриваемого потока событий к простейшему потоку в том смысле, что апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий потока принимает постоянное значение, равное q .

Для второго условия факторизации потока $(\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k запишется в виде

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + [(1-p)\lambda_1 - q\lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, k = 1, 2, \dots$$

То есть апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$, наоборот, будет зависеть от предыстории, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность вероятностей $p_T(\tau)$ имеет экспоненциальное распределение $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T$.

5. Вероятностные характеристики и вероятности типов событий наблюдаемого потока

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсия и ковариация.

$$M(\tau) = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}, D(\tau) = 2\left(\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2^2}\right) - \left(\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}\right)^2,$$

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\sigma_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)} \gamma(T)(1 - \gamma(T))\lambda_1\lambda_2(1 - p - q) \frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_1 z_2)^3}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события двух типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2 .

Обозначим $q_1^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие является событием пуассоновского потока интенсивности λ_i , и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из 1-го состояния в i -е ($i = 1, 2$); $q_2^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие является событием пуассоновского потока интенсивности λ_i и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из 2-го состояния в i -е ($i = 1, 2$).

Тогда для введенных вероятностей можно получить следующие явные выражения:

$$q_1^{(1)}(T) = (1 - p)\lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2\pi_1 + \lambda_2(q - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_1^{(2)}(T) = p\lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2\pi_1 + \lambda_2(q - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_2^{(1)}(T) = q\lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_1(p - \pi_2)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_2^{(2)}(T) = (1 - q)\lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_1(p - \pi_2)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i = 1, 2, z_1 z_2$ определены в (5).

Тогда стационарную вероятность $q_1(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 , можно представить в виде

$$q_1(T) = q_1^{(1)}(T) + q_1^{(2)}(T) = \lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 + \lambda_2 (q - \pi_1) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Аналогично стационарную вероятность $q_2(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 , можно представить в виде

$$q_2(T) = q_2^{(1)}(T) + q_2^{(2)}(T) = \lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1 \pi_2 + \lambda_1 (p - \pi_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Отметим, что $\pi_1(0|T) = q_1^{(1)}(T) + q_2^{(1)}(T)$, $\pi_2(0|T) = q_1^{(2)}(T) + q_2^{(2)}(T)$.

Заключение

В ходе исследования получен явный вид $p_T(\tau_1, \tau_2)$ совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени. Приведены условия рекуррентности потока, а также рассмотрены вероятностные характеристики наблюдаемого потока и приведен явный вид таких характеристик, как типы событий потока.

Данные формулы позволяют произвести оценку параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий потока либо методом максимального правдоподобия, либо методом моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Голофастова М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 42–53.
2. Сиротина М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 63–74.
3. Aleksandr Gortsev and Mariya Sirotina. Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration // ITMM 2014: Proceedings 13th International Scientific Conference named after A.F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk. Russia. November 20-22. 2014. Springer. P. 145–152.
4. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени // Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. Белоруссия. Минск. 23–26 февраля. 2015. Минск : Изд-во РИВШ, 2015. С. 299–304.
5. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
7. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P.1–46.
11. Lucantoni D.M., Neuts, M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communication in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
12. Лившиц К.Н., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
13. Yang Y.W. Woo Shin. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operation Research Letters. 2004. V. 32, Issue 4. P. 364–373.
14. Artalejo Jesus R., Chakravarthy Srinivas R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue // Applied Mathematics and Computation. 2006. V. 183, Issue 2. P. 1399–1409.

15. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. WSEAS Press, 2009. P. 155–158.
16. Bushalnov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
18. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9(II). С. 129–138.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 24–29.
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika. 1995. V. 40, No. 7–8. P. 6–10.
22. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
24. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 88–101.
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
27. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
28. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
29. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
30. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
31. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 18–23.
33. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
35. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
37. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
38. Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний синхронного МС-потока событий // Избранные доклады международной конференции «Весибирские чтения по математике и механике». Томск : Изд-во ТГУ, 1997. Т. 1. С. 97–102.
39. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2004. V. 65, No. 9. P. 1389–1399.
40. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
41. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. конф. Минск : Изд-во БГУ, 2005. С. 60–69.

Sirotina Maria N. (Tomsk State University, Russian Federation).

Joint probability density function of the interval duration between adjacent events of the modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time and recurrence conditions of the flow.

Keywords: modulated synchronous flow; dead time; joint probability density function of the interval duration between an adjacent observable flow of events; recurrence condition of a flow.

DOI 10.17223/19988605/31/6

In the paper, the modulated synchronous twice stochastic flow of events is considered, which rate is piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). The time when process $\lambda(t)$ is staying in i -state has exponential probability distribution function with parameter $\alpha_i, i = 1, 2$. During the time random interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, there is a Poisson flow with the rate $\lambda_i, i = 1, 2$. A state transition of process $\lambda(t)$ occurs in arrival moment of the Poisson flow event, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability p , the passing from the second to the first state is realized with probability q .

The flow functions in conditions of dead time, which is one of the falsifying factors of state and parameter estimation of the flow. After each registered event there is time of fixed duration T (dead time), during which another flow events is inaccessible for observation. One considers nonextendable dead time, that is all events, which happen during dead time interval, do not arise its prolongation. When duration of dead time period is finished, the first happened event creates dead time period of duration T again, and etc. Note that for the flow, which functions in dead time conditions, events are observable if they did not get into dead time interval (events which cause its approach). For the flow which functions in dead time absence all events are observable.

The derivation of the explicit form of the formula for the joint probability density function of the interval duration between adjacent events of the observable flow is hold. On the base of the joint probability density function as well as the probability density function is obtained before a probability characteristics of the flow such as expectation function, expected mean square and covariance function are given.

A flow characteristic called probability of the observable event type was introduced in the research. There are two types of the considered flow events: 1) the Poisson flow events of the λ_1 intensity; 2) the Poisson flow events of the λ_2 intensity. The formulae for introduced probabilities are derived.

It is proved that the modulated synchronous flow in condition of fixed dead time is a recurrence flow because its joint probability density function is factored under certain conditions.

The obtained formulae will be used in the future investigation to estimate input flow parameters using the method of moment or the maximum likelihood method.

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. & Golofastova, M.N. (2013) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 42-53. (In Russian).
2. Sirotina, M.N. (2014) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1 (26). pp. 63-74. (In Russian).
3. Gortsev, A. & Sirotina, M. (2014). Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration. *ITMM 2014: Proceedings 13th International Scientific Conference*. Anzhero-Sudzhensk. 20th to 22nd November. pp. 145-152. (In Russian).
4. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time]. *Proc. of the International Conference. Minsk. 23rd to 26th February*. Minsk: RIVSh. pp. 299-304. (In Russian).
5. Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU.
6. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60 (4). pp. 923-930. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S030500410003838X>
7. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92-99.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55-61.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp.1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174

11. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
12. Livshits, K.N. & Bublik, Ya.S. (2010) The probability of insurance company collapse with twice stochastic flow of insurance payouts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
13. Yang, Y.W. (2004) BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters. *Operation Research Letters*. 32 (4). pp. 364-373. DOI: 10.1016/j.orl.2003.09.005
14. Artalejo, J.R. & Chakravarthy, S.R. (2006) Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrieval queue. *Applied Mathematics and Computation*. 183 (2). pp. 1399-1409.
15. Best, J. (2009) Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity. *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. Proceedings of the 3rd International Conference on Circuits, Systems and Signals (CSS'09)*. Vouliagmeni, Athens, Greece. 29th to 31st December. WSEAS Press. pp. 155-158.
16. Bushalnov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69 (9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 10. pp. 8-16. (In Russian).
18. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobytiy [Dead time and parameters estimation of synchronous alternating flow with or without event manifestation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 9(II). pp. 129-138.
19. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232-239.
20. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of synchronous twice-stochastic flow of events using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1(I). pp. 24-29.
21. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 40 (7–8). pp. 6-10.
22. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (23). pp. 54-63. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (21). pp. 14-25. (In Russian).
24. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (19). pp. 88-101. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21 (3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
26. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of asynchronous flow with additional event initiation using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 18. pp. 267-273.
27. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36 (12). pp. 1153-1167. DOI: 10.1007/BF00559693
28. Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2014) [Dead time period estimation of generic semi-synchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur* [New Information Technologies In Complex Structure Investigations]. Proc. of the 10th Russian Conference with International Participation. Tomsk. 9th to 13th July. Tomsk: Tomsk State University. pp. 96-97.
29. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2010) Optimum estimation of states in generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (11). pp. 66-81. (In Russian).
30. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13 (1). pp. 31-41. (In Russian).
31. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46 (6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
32. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1(1). pp. 18-23.
33. Nezhel'skaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyu-daemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.

34. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) On relationship of MC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
35. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Solov'ev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time. *Automation and Remote Control*. 73 (8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente [Statistic analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
37. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50 (1). pp. 56-63.
38. Nezhel'skaya, L.A. (1997) [Optimal state estimation of synchronous MC-flow of events]. *Vsesibirskie chteniya po matematike i mekhanike* [Siberian Readings on Mathematics and Mechanics]. Proc. of the International Conference. Tomsk: Tomsk State University. Vol. 1. pp. 97-102. (In Russian).
39. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65 (9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
40. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 10. pp. 8-16. (In Russian).
41. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2005) [Synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, stochastic Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of the International Conference. Minsk: BGU. pp. 60-69. (In Russian).

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, О.В. Грамотина

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК

В работе получены эффективные условия, при которых многоканальную систему массового обслуживания можно аппроксимировать моделью бесконечно канальной системы, в последнее время часто используемой при моделировании компьютерных сетей. Эти условия основываются на предельной теореме для процесса, описывающего число занятых каналов в бесконечно канальной системе, «моментном» условии Колмогорова–Ченцова и других теоретических результатах.

Ключевые слова: многоканальная и бесконечно канальная системы массового обслуживания; винеровский процесс; число занятых каналов.

В последние годы у специалистов по моделированию компьютерных сетей появился большой интерес к использованию систем массового обслуживания с бесконечным числом каналов (см., например, [1]). Этот интерес во многом обусловлен удобством расчета таких систем из-за отсутствия в них очереди и вытекающей отсюда возможности заявкам независимо перемещаться по системе. Однако реальные компьютерные сети содержат конечное число каналов, и потому необходимо обосновывать использование систем с бесконечным числом каналов к их моделированию.

В настоящей работе устанавливаются условия, при которых объединение n одноканальных систем массового обслуживания в многоканальную приводит при $n \rightarrow \infty$ к исчезновению очереди (в некотором вероятностном смысле). Эти условия основываются на предельной теореме о сходимости числа занятых каналов в многоканальной системе к числу занятых каналов в системе с бесконечным числом каналов [2] и на предельной теореме о сходимости специальным образом нормированного случайного процесса, описывающего число заявок, пришедших в систему до момента t , к некоторому предельному [3], чаще всего винеровскому, процессу. При получении результатов работы использовались «моментное» условие Колмогорова–Ченцова [4], оценка вероятности превышения высокого уровня гауссовским процессом [5] и принцип инвариантности Донскера–Прохорова [6].

В качестве исходной одноканальной системы берется система с пуассоновским или детерминированным входным потоком и групповым поступлением заявок, в том числе система с повторным обслуживанием заявок, особенно часто встречающаяся в приложениях [7].

1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим схему серий, в которой характеристики n -канальной системы массового обслуживания определяются параметром $n \rightarrow \infty$, характеризующим устремляющуюся в бесконечность интенсивность входного потока. Обозначим $e_n(t)$ – количество заявок входного потока, пришедших до момента t включительно, $e_n(0) = 0$, $Me_n(t) = nm(t)$, где $m(t)$ – неубывающая функция. Пусть $q_n(t)$ – количество занятых каналов в системе в момент t , $q_n(0) = 0$; τ_j – время обслуживания j -й заявки, причем τ_j , $j \geq 1$, – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(t)$ ($\bar{F} = 1 - F$), имеющей непрерывную и ограниченную числом $\bar{f}$ плотность.

Теорема 1. Пусть при некоторых $T > 0$, $\sigma > 0$ выполняются следующие условия:

1. Последовательность случайных процессов $x_n(t) = \frac{e_n(t) - nm(t)}{\sqrt{n}}$ при $n \rightarrow \infty$ C – сходится на $[0, T]$ к стандартному винеровскому процессу $\xi(t)$, умноженному на σ .

2. Справедливо неравенство $\int_0^T \bar{F}(t) dm(t) < 1$. Тогда $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} q_n(t) = n\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу сделанных предположений из [2, гл. II, § 1, теорема 1] следует, что процесс $z_n(t) = \frac{q_n(t) - nQ(t)}{\max(\sigma, 1)\sqrt{n}}$, где $Q(t) = \int_0^t \bar{F}(u) dm(u)$, при $n \rightarrow \infty$ C – сходится к процессу

$$\zeta(t) = \sigma \int_0^t \bar{F}(t-u) d\xi(u) + K\Theta(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\Theta(t)$ – центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$ с ковариационной функцией

$$R(t, t+u) = \int_0^{t+u} \bar{F}(v+u) F(v) dm(v). \text{ Тогда при } 0 \leq t \leq t+u \leq T \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t, t+u) &= M(\zeta(t) - \zeta(t+u))^2 = K^2(R(t, t) + R(t+u, t+u) - 2R(t, t+u)) + \\ &+ \sigma^2 M\left[\int_0^t \bar{F}(t-u) d\xi(u) - \int_0^{t+u} \bar{F}(t+u-v) d\xi(v)\right] \leq uC, \quad C = (\sigma^2 + K^2a)(2T\bar{f} + 1). \end{aligned}$$

Следовательно, минимальное число $N(r)$ шаров радиуса r в метрическом пространстве $([0, T], \varepsilon)$, покрывающих отрезок $[0, T]$ (здесь $\varepsilon(t, t+u)$ – полуметрика на $[0, T]$), удовлетворяет неравенству $N(r) \leq \max(1, TCr^{-2})$, и значит, построенный по относительной энтропии $\ln N(r)$ интеграл Дадли

$$\Psi(T) = \int_0^T (\ln N(r))^{1/2} dr < \infty. \text{ Тогда из [5] } P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t) > u\right) \rightarrow 0, u \rightarrow \infty.$$

Так как $\frac{n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t) \geq \frac{(1-Q(v))n}{\max(\sigma, 1)\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$. Из C -сходимости случайного процесса $z_n(t)$ к случайному процессу $\zeta(t)$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} q_n(t) = n\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} q_n(t) \geq n\right) \leq P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} z_n(t) \geq \frac{(1-Q(v))n}{\max(\sigma, 1)\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 означает сходимость к нулю виртуального времени ожидания в n -канальной системе на отрезке времени $[0, T]$ и, значит, характеризует исчезновение очереди при объединении n одноканальных систем, $n \rightarrow \infty$.

2. Основные результаты

Пусть $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ – пуассоновский поток точек; $N(t) = \max(i: t_i \leq t), t \geq 0$, – пуассоновский процесс интенсивности $a > 0$. Предположим, что $\eta_1, \eta_2, \dots$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины с неотрицательными целочисленными значениями, $M\eta_1 = f_1, D\eta_1 = f_2 < \infty$, и рассмотрим обобщенный пуассоновский процесс $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k$. Процесс $S(t)$ описывает поступление η_k заявок в момент $t_k, k \geq 1$, тогда входной поток в n -канальную систему массового обслуживания определяется равенством $e_n(t) = \sum_{k=1}^n S_k(t)$, где $S_1(t), \dots, S_n(t)$ – независимые копии случайного процесса $S(t)$.

Теорема 2. Если при некотором $T > 0$ выполнено условие 2 теоремы 1, то справедливо соотношение $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} q_n(t) = n\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из первого и второго тождеств Вальда следуют равенства

$$M \sum_{k=1}^n S_k(t) = af_1 nt, D \sum_{k=1}^n S_k(t) = af_2 nt. \quad (1)$$

В силу равенств (1), независимости приращений процесса $S(t)$ на непересекающихся интервалах и многомерной центральной предельной теоремы получаем, что конечномерные распределения процесса

$$x_n(t) = \frac{\sum_{k=1}^n S_k(t) - af_1 nt}{\sqrt{n}} \quad \text{сходятся к конечномерным распределениям винеровского процесса } \sigma \xi(t), t \in [0, T].$$

В свою очередь, в силу определения обобщенного пуассоновского процесса

$$\begin{aligned} \sup_n M(|x_n(t_2) - x_n(t)|^2 |x_n(t) - x_n(t_1)|^2) &= D(S(t_2) - S(t)) \cdot D(S(t) - S(t_1)) = \\ &= af_2(t_2 - t) \cdot af_2(t - t_1) \leq (af_2(t_2 - t_1))^2, \quad 0 < t_1 < t < t_2 < T. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\alpha = 2, \beta = 2, \lambda = 1, C = (af_2)^2$ выполнено «моментное» условие Колмогорова–Ченцова [4]

$$\sup_n M(|x_n(t_2) - x_n(t)|^\alpha |x_n(t) - x_n(t_1)|^\beta) \leq C(t_2 - t_1)^{1+\lambda}, \quad t_1 < t < t_2 < T.$$

Из [3, глава 3, теоремы 6, 7, следствие 1] приходим к C -сходимости случайного процесса $x_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ к винеровскому процессу $\sigma \xi(t), t \in [0, T]$, при $\sigma = \sqrt{af_2}$. Тем самым условие 1 теоремы 1 выполнено, а значит, утверждение 2 полностью доказано.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 сохранится, если определить случайным процесс $e_n(t)$ равенством $e_n(t) = e_1(nt)$.

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 сохранится, если исходный пуассоновский поток $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ заменить пуассоновским потоком с интенсивностью $a(t) \geq 0$, где $a(t)$ – непрерывная, ограниченная функция. В этом случае процесс $x_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ C -сходится к случайному процессу $\sigma \xi(m(t)), m(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$, где $\xi(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Замечание 4. Утверждение теоремы 2 сохранится, если исходный пуассоновский поток $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ заменить детерминированным потоком интенсивности 1, а случайный процесс $e_n(t)$

заменить на $\sum_{k=1}^{[nt]} \eta_k$ и воспользоваться принципом инвариантности Донскера–Прохорова [6]. Тем самым, входной поток становится детерминированным с групповым поступлением заявок.

Заключение

В реальных технических приложениях большой интерес вызывают системы с повторными вызовами [7]. Полученные в работе результаты могут быть распространены на один из известных классов таких систем. Пусть заявка поступает в многоканальную систему и после ожидания в очереди начинает обслуживаться на одном из приборов. По окончании обслуживания может возникнуть необходимость повторного обслуживания, которое может начаться на том же приборе, если в этот момент очереди нет. В противном случае заявка становится в очередь и дожидается освобождения одного из приборов и т.д. Чтобы к такой системе применить теорему 2, необходимо заменить функцию распределения времени обслуживания $F(t)$ на функцию распределения суммарного времени обслуживания заявки во всех повторных вызовах. Однако остается открытым вопрос для систем обслуживания с повторными вызовами, работающими по другим протоколам, и для многоканальных систем обслуживания в случайной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жидкова Л.С., Моисеева С.П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 49–54.
2. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980. 381 с.
3. Боровков А.А., Могильский А.А., Саханенко А.И. Предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1995. Т. 82. С. 5–194.
4. Ченцов Н.Н. Слабая сходимость случайных процессов без разрывов второго рода // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, вып. 1. С. 154–161.
5. Дмитриевский В.А. Условие ограниченности и оценки распределения максимума случайных полей на произвольных множествах // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 2. С. 271–274.
6. Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 177–238.
7. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 35. С. 88–92.

Цицаишвили Гурами Шалвович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет

Осипова Марина Анатольевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: mao1975@list.ru

Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет

Грамотина Ольга Викторовна. E-mail: helga13d25@mail.ru

Институт прикладной математики ДВО РАН

Поступила в редакцию 16 марта 2014 г.

Tsitsiashvili Gurami. Sh., Osipova Marina. A., Gramotina Olga. V. (Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation).

Synergetic effects in multichannel queuing systems with group arrivals of customers.

Keywords: multichannel and infinite channel queuing systems; Wiener process; a number of busy channels.

DOI 10.17223/19988605/31/7

In recent years, experts in a modelling of computer networks have shown great interest to an application of queuing systems with an infinite number of channels. This interest mainly is determined by a convenience of such systems calculations because of a queue absence and so a possibility for customers to choose channels freely. But real computer networks contain finite numbers of channels. So, it is necessary to establish an application of systems with infinite number of channels for their modelling.

In this paper, we establish conditions, in which an aggregation of n onserver systems into multiserver system for $n \rightarrow \infty$ reduce to a queue disappearance. These conditions are based on limit theorems on a convergence of a number of busy channels in multiserver system to a number of busy channels in a system with the infinite number of channels and on a convergence of specially normed random process, described a number of customers arrived into a system up to a moment t to some limit the Wiener process. To obtain these results, we used the «moment» Kolmogorov-Chencov condition, an upper bound for a probability that a Gaussian process exceeds a high level and the Donsker-Prokhorov invariance principle.

We take as initial a onserver queuing system with a Poisson or deterministic input flow and group arrivals of customers including retrieval queuing systems widely used in applications.

In this paper, a model of n - server queuing system is considered, in which $e_n(t)$ is a number of customers, arrived in the system up to the moment t inclusively, $e_n(0) = 0$, $Me_n(t) = nm(t)$, where $m(t)$ is a non decreasing function, $q_n(t)$ is the number of busy servers at the moment t , $q_n(0) = 0$, τ_j is the service time of j -th customer, $\tau_j, j \geq 1$, is the sequence of independent and identically distributed random variables with the distribution function $F(t)$ ($\bar{F}(t) = 1 - F(t)$), which has a continuous and bounded by some positive number density.

Assume that $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ is a Poisson flow, $N(t) = \max(i : t_i \leq t)$, $t \geq 0$, is a Poisson process with the intensity $a > 0$, $\eta_1, \eta_2, \dots$ are independent and identically distributed random variables with integer and positive values, $M\eta_1 = f_1$, $D\eta_1 = f_2 < \infty$ and $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k$ is the generalized Poisson process describing an arrival of η_k customers at the moment t_k , $k \geq 1$. Then, input flow into the n channel queuing system is defined by the equality $e_n(t) = \sum_{k=1}^n S_k(t)$, where $S_1(t), \dots, S_n(t)$ are independent copies of the process $S(t)$. A main result of this paper is the following statement.

Theorem. If for some $T > 0$ the inequality $\int_0^T \bar{F}(t) dm(t) < 1$ is hold, then $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} q_n(t) = n\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

In manifold technical applications, there is a large interest to queuing systems with retrial calls. Results obtained in this paper may be spread onto one of some known classes of such systems. Assume that a customer arrives in a multichannel system and after a waiting begins to be served at some channel. After the end of this service, it is possible to appear a necessity for this customer to repeat a service again. This service may be realized at some free channel if it is possible. In opposite case the customer waits for a disposal of some channel and so on. To apply Theorem to such system it is necessary to replace the distribution function $F(t)$ by a distribution function of a summary service time. But there is a problem how to analyze queuing systems with repeated services which works using another protocols and multichannel queuing systems in a random environment.

REFERENCES

1. Zhidkova, L.S. & Moiseeva, S.P. (2011) Investigation of parallel serving system with simplest flow of fold customers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 49-54. (In Russian).
2. Borovkov, A.A. (1980) Asimptoticheskie metody v teorii massovogo obsluzhivaniya [Asymptotic methods in queuing theory]. Moscow: Nauka.
3. Borovkov, A.A., Mogul'skiy, A.A. & Sakhanenko, A.I. (1995) Limit theorems for random processes. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. 82. pp. 5-194. (In Russian).
4. Chentsov, N.N. (1956) Slabaya skhodimost' sluchaynykh protsessov bez razryvov vtorogo roda [Weak convergence of random processes without discontinuities of second order]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 1 (1). pp. 154-161.
5. Dmitrovskiy, V.A. (1980) Uslovie ogranichennosti i otsenki raspredeleniya maksimuma sluchaynykh poley na proizvol'nykh mnozhestvakh [Condition of boundedness and estimates of maximum distribution for random fields on arbitrary sets]. *DAN SSSR*. 253 (2). pp. 271-274.
6. Prokhorov, Yu.V. (1956) Skhodimost' sluchaynykh protsessov i predel'nye teoremy teorii veroyatnostey [Convergence of random processes and limit theorems of probability theory]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 1 (2). pp. 177-238.
7. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Issledovanie SMO s povtornym obrashcheniem i neogranichennym chislom ob-sluzhivayushchikh priborov metodom predel'noy dekompozitsii [Investigation of retrial queuing systems with unbounded number of servers my method of limit decomposition]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational technologies*. 35. pp. 88-92.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8

DOI 10.17223/19988605/31/8

А.М. Бабанов

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ БД, ОТКРЫВАЮЩИЕСЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ СЕМАНТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ

Освещаются задачи проектирования схем БД, которые зачастую решаются проектировщиками неосознанно, что в дальнейшем усложняет работу и приводит к некорректным и неэффективным результатам. Новые перспективы открываются с использованием современных семантических моделей, обладающих дополнительными возможностями фиксации семантики. За счет более полного описания предметной области в семантической схеме можно существенно автоматизировать процесс проектирования и улучшить качество получаемых схем данных.

Ключевые слова: семантическая модель данных; OR-модель; ERM-модель; проектирование схем БД; задачи, перспективы.

Семантические модели и методика их использования при проектировании схем БД многими незаслуженно недооцениваются. Действительно, если рассматривать их как возможность наглядного представления готовой схемы БД, построенной человеком напрямую в модели конкретной СУБД, то так оно и есть – эффект невелик. В таком случае те многочисленные проблемы проектирования, о которых пойдет речь в статье, преодолеваются часто неосознанно, интуитивно, без глубокого их анализа и использования системного подхода. Многие проектировщики о них даже не подозревают. Важна уже сама по себе констатация этих задач проектирования. Представляют интерес также способы разрешения этих проблем, которые становятся возможными благодаря именно семантическим моделям.

В настоящей работе рассматриваются задачи проектирования схем БД и способы их решения (возможно, автоматического) с использованием современных семантических моделей «Объект – Роль» (OR-модель) [1] и «Сущность – Связь – Отображение» (ERM-модель) [2].

1. Фиксация представлений и требований пользователей отдельно в удобной для них форме

Начинается работа по созданию системы баз данных с анализа бизнес-процессов предметной области (ПрО) и используемых в них данных. Этой информацией во всей полноте, как правило, не владеет ни один эксперт по ПрО, каждый отчетливо представляет только свои задачи. А спроектировать в конечном счете необходимо единую интегрированную БД, обеспечивающую информацией всех участников всех бизнес-процессов. Причем каждый должен пользоваться своим, удобным ее представлением.

Следует отметить, что ошибки этапа анализа требований к будущей системе – самые дорогие из всех ошибок разработчиков. Их запоздалое исправление зачастую приводит к существенным объемам переделок на последующих этапах. Поэтому все требования, полученные от экспертов по ПрО на естественном языке, должны быть сразу же переведены в ясный, точный, формальный вид и перепроверены у экспертов.

Второй аспект, который необходимо учитывать при знакомстве проектировщиков с ПрО, связан с «человеческим фактором». Следует «бережно» относиться к экспертам по ПрО – стараться общаться с ними на их языке, не утруждать их визитами, переспросами об одном и том же. А значит, надо изначально максимально полно зафиксировать семантику ПрО, желательно в формальном виде. И на последующих этапах использовать этот артефакт, а не обращаться к экспертам повторно.

Порядок выполнения работ по анализу ПрО сложился давно и достаточно традиционен. Т. Халпин видит процесс формализации представлений о ПрО следующим образом:

«Этот этап жизненного цикла информационных систем называется концептуальным проектированием. Иногда его называют анализом, чтобы отличить от последующих этапов логического и физического проектирования. Для больших приложений могут выделяться подпроцессы или компоненты, легче поддающиеся анализу, и для них проектируются подсхемы. Впоследствии эти подсхемы интегрируются в глобальную концептуальную схему всей ПрО» [1. С. 51]. «Проектировщики достигают консенсуса в терминологии, поэтому для совпадающих понятий в подсхемах используются одни и те же термины» [Там же. С. 62].

Осознавая положительные стороны OR-моделирования, самого выразительного среди зарубежных аналогов нашей модели [3], упомянем о недостатках процедуры проектирования Халпина.

1. Немногочисленность и низкий уровень OR-форм представления моделируемого мира (объекты и роли) требует изначального приведения многообразных других форм человеческого восприятия к этим понятиям.

2. Унификация терминологии бизнес-процессов вряд ли обрадует отдельные группы экспертов и пользователей.

3. Первоначально построенные подсхемы данных бизнес-процессов служат лишь полуфабрикатом для интегрированной схемы ПрО. Дальнейшая их судьба не обсуждается. А ведь они являются важным источником информации для многих последующих задач проектирования.

Халпин, сравнивая свою модель с реляционной моделью, правильно утверждает, что «на концептуальном уровне следует использовать понятия, которые близки и понятны людям» [1. С. 7]. Конечно, объекты и их роли понятнее кортежей и отношений. Но человеческому представлению, кроме объектов и ролей, свойственны понятия «взаимосвязь объектов», «характеристика», «значение характеристики». Вместо простой фиксации семантики ПрО в схеме проектировщик вынужден транслировать описания моделируемого мира, сообщенные ему экспертом, на скучный язык структур данных OR-модели.

ERM-модель предлагает широкий набор взаимосвязанных структурных понятий (в том числе простых и понятных для человека). Выделение среди них базовых и производных понятий с правилами их взаимного преобразования [4] дает возможность проектировщику в каждом случае использовать наиболее подходящие структурные понятия. Система проектирования в любой момент может автоматически преобразовать схему к нужному понятийному базису.

При ERM-проектировании на первом этапе создаются подсхемы данных в точном соответствии с требованиями пользователей подсистем и с сохранением их представлений и терминологии. Но определяются они не по отдельности, а все вместе составляют единую ERM-схему. На последующих этапах эти сведения будут положены в основу решения многих задач проектирования.

Для иллюстрации предлагаемых идей воспользуемся фрагментами схемы медицинской ПрО, описанной в [5] (рис. 1).

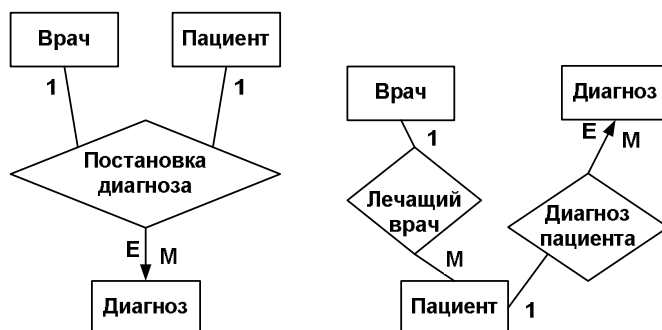


Рис. 1. Фрагменты исходной ERM-схемы медицинской ПрО

На рисунке приведены два различных представления о поставленных пациентам диагнозах: первое – для бизнес-процесса постановки диагноза (наиболее информативное), второе – для процесса лечения пациента в стационаре. Во втором случае знания о враче, который поставил диагноз, не требуется.

Обратите внимание на разницу во множествах связей между пациентами и диагнозом: на левой диаграмме оно тернарно, на правой – бинарно.

2. Приведение подсхем к базовым понятиям и определение взаимоотношений между элементами разных подсхем

Как уже отмечалось, все современные методики проектирования БД либо изначально предполагают создание интегрированной схемы БД, либо интегрируют ранее созданные подсхемы. И в том и в другом случае осуществляется унификация форм представления и наименований явлений ПрО. Это приводит к потере семантики, локализованной в подсхемах, и ее повторному выяснению у экспертов по ПрО в дальнейшем в ходе создания внешних схем пользователей. ERM-модель позволяет сохранить представления и наименования, сложившиеся в разных группах пользователей, и указать, как они взаимосвязаны между собой.

Источниками различий в подсхемах разных пользователей являются их несовпадения во взглядах на те бизнес-процессы, в выполнении которых они участвуют (или не участвуют). Что касается данных этих бизнес-процессов, то люди зачастую по-разному решают задачи структурирования информации, исходя из своих знаний и интереса к ней.

Так, во многих семантических моделях для элементов ПрО предлагается три формы данных – сущность, связь и значение характеристики (или их аналоги). И для каждого явления ПрО проектировщик должен выбрать лишь одну из них и зафиксировать ее в интегрированной схеме хранимых данных (так называемая проблема триализма [6]). Второй задачей структуризации данных является задача правильного определения структуры связей – важно точно определить, сколько и какие сущности их образуют [Там же]. Помимо унификации форм данных и структуры связей при интеграции подсхем безвозвратно теряются некоторые ограничения целостности, определяющие специфические бизнес-правила.

В ERM-моделировании предлагается на этом этапе не отказываться от подсхем данных, а наряду с изначальными (возможно, производными) формами данных и ограничений целостности автоматически порождать их базовые формы (классы и отображения) и на них с помощью операций и отношений между классами и отображениями задавать взаимосвязи между элементами различных подсхем. Для этого используются отношения «равенство», «включение», «непересекаемость» – для классов, и «следствие», «эквивалентность», «несовместность» – для отображений. Подобные определения позволят в дальнейшем решать автоматически многие задачи проектирования.

В нашем примере множества связей ПОСТАНОВКА ДИАГНОЗА и ДИАГНОЗ ПАЦИЕНТА явно близки по смыслу, но отличаются структурно. В ERM-схеме это можно представить на базовом, более выразительном уровне. При переходе на этот уровень явно вводятся реляционные отображения, определяемые множествами связей (рис. 2).

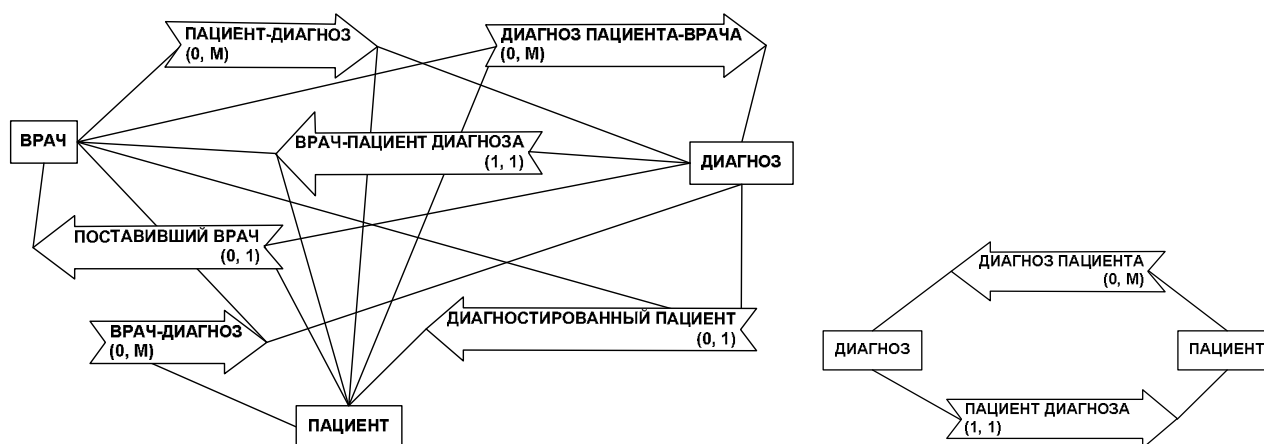


Рис. 2. Диаграммы реляционных отображений ERM-схемы медицинской ПрО

Далее с использованием операций над отображениями определяются взаимосвязи между ними (рис. 3).



Рис. 3. Диаграммы взаимоотношений отображений ERM-схемы медицинской Про

На рисунке указано, что производное отображение, являющееся проекцией базового отображения ВРАЧ-ПАЦИЕНТ ДИАГНОЗА на роль ПАЦИЕНТ, эквивалентно базовому отображению ПАЦИЕНТ ДИАГНОЗА. Это означает, что для каждого диагноза его связь с пациентом определяется одинаково обоими множествами связей. Второй подграф на рис. 3 говорит о том, что и множества диагнозов, полученные с помощью этих множеств связей для любого пациента, совпадают.

3. Определение статуса данных («хранимые – получаемые – частично получаемые»)

Переходя от подсхем пользователей к интегрированной схеме БД, проектировщик сталкивается с еще одной проблемой – какие данные хранить в БД, а какие получать из них автоматически. Халпин выделяет даже три статуса данных – хранимые, получаемые и частично получаемые.

«Получаемый (derived) факт – это факт, который выводится из других фактов математическими вычислениями или логическим выводом. Факт, который нельзя вывести из других фактов, называется хранимым или утверждаемым пользователем (asserted) фактом. Для каждого получаемого факта в схеме данных задается правило его получения» [1. С. 33]. «Частично получаемый (semiderived) тип фактов определяется в том случае, когда ряд фактов этого типа можно вывести, а другие факты будут заданы пользователем» [Там же. С. 99].

В ОР-методике проектирования БД решение задачи определения статуса данных – исключительная прерогатива человека. Он сам делает конкретный выбор и сам определяет правила получения данных, фиксируя свое решение в ОР-схеме.

ERM-схема к этому моменту уже содержит все взаимосвязи элементов подсхем, и есть надежда, что этой информации будет в большинстве случаев достаточно для автоматического решения проблемы «хранимые – получаемые – частично получаемые» (или, по крайней мере, «хранимые – получаемые»). В редких случаях система ERM-проектирования может проконсультироваться у человека. Также можно автоматизировать процесс определения правил вывода получаемых данных. Вся необходимая для этого информация уже задана в ERM-схеме.

Что касается множеств связей диагнозов с пациентами из нашего примера, то очевидно, что из его тернарного варианта легко получить бинарные связи. Обратного преобразования бинарных связей в тернарные не существует. Таким образом, тип связей ПОСТАНОВКА ДИАГНОЗА – хранимый, а ДИАГНОЗ ПАЦИЕНТА – получаемый (с помощью операции проекции).

4. Интеграция хранимых элементов схемы

Традиционный подход к проектированию БД (разработка подсхем и их интеграция в общую схему) предлагает человеку именно на этапе интеграции решать все те задачи, о которых речь шла выше. Зачастую для сложных Про это осуществить отнюдь не просто.

Многие методики вообще не регламентируют этот процесс, апеллируя к интуиции проектировщика. Другие, более детальные, указывают основную операцию интеграции – объединение элементов подсхем, напоминая, что «при этом необходимо разрешить возможные конфликты именования, ликвидировать избыточность и неоднозначность» [5. С. 242].

В ERM-моделировании задача интеграции схемы на уровне базовых понятий «класс» и «отображение» решается сама собой после выделения хранимых структур и ограничений целостности. Особен-

ностью такого моделирования является то, что наряду с этими элементами схемы (и непосредственно с ними связана) имеется информация о получаемых структурах, что является основанием для последующей автоматической генерации внешних схем бизнес-процессов.

5. Определение представлений для пользователей

После получения интегрированной схемы необходимо спроектировать подсхемы отдельных пользователей и групп пользователей. «Каждая внешняя схема определяет информационные структуры и операции над данными, которые доступны одной группе пользователей» [1. С. 31]. Поскольку эта задача предполагает создание инструментов, обеспечивающих работу непосредственно с данными, решать ее приходится с использованием средств СУБД и в рамках ее модели данных.

Обычно в этот момент проектировщики вновь обращаются к экспертам с вопросом, что и в каком виде они хотели бы видеть в диалоге с системой БД. Эти представления и необходимо реализовать в СУБД. Основными инструментами разработчиков в случае реляционной СУБД являются представления (view) и триггеры (trigger). Первые обеспечивают необходимые преобразования данных из интегрированной логической модели во внешнюю схему при чтении информации, вторые реализуют проверки данных и обратное преобразование при вводе и изменении данных. Именно эти объекты БД и надлежит создать разработчикам системы. Окончательный вид информация для пользователей приобретет после разработки специализированных диалоговых и отчетных средств.

В случае ERM-моделирования внешние подсхемы фактически совпадают с аналитическими подсхемами. В ходе проектирования элементы этих подсхем ассоциированы с их базовыми эквивалентами и снабжены ссылками на хранимые структуры и ограничения целостности.

Этой информации в ERM-схеме достаточно, чтобы полностью определить внешние схемы пользователей на языке СУБД. В реляционном случае процесс генерации вышеупомянутых представлений и триггеров можно автоматизировать. Для получаемых и частично получаемых типов данных в представлениях определяются способы их вычисления из хранимых типов данных.

Если исходные подсхемы определены в терминах базовых понятий, для удобства восприятия их пользователями автоматически строятся представления для подсхем в традиционных «человеческих» структурных понятиях «сущность», «связь» и «значение».

6. Приближение подсхемы данных к неподготовленному пользователю

Большое внимание создатели и исследователи семантических моделей и методики проектирования БД уделяют донесению семантики ПрО, зафиксированной в схеме, до экспертов и пользователей будущей системы. В этом им видится одна из задач семантического моделирования. Помимо уяснения информационных возможностей схемы эксперты и пользователи могут при этом высказать свои замечания и предложения по ее уточнению и приведению в соответствие с семантикой ПрО.

Лучшему пониманию семантической схемы способствуют:

- близкий к человеческому мировосприятию язык схемы;
- способность представить элементы схемы в виде высказываний естественного языка (вербализация схемы);
- предъявление простых и понятных примеров данных, удовлетворяющих и противоречащих схеме (экземпляризация схемы).

Вот так освещает эти вопросы Халпин:

«Модели ПрО представляются экспертам ПрО для проверки как сами по себе, так и с использованием двух дополнительных возможностей: вербализации структур данных и ограничений целостности, а также предъявления примеров данных, удовлетворяющих или противоречащих схеме (экземпляризации)» [1. С. 10]. «В отличие от UML и ER-модели OR-модель построена на лингвистическом базисе. Для того чтобы извлечь максимальную выгоду от вербализации и экземпляризации при взаимодействии с экспертами по ПрО, лучше использовать язык, который спроектирован специально, в том числе и для этого» [Там же. С. 18].

«Некоторые эксперты в состоянии работать с диаграммами, другие – нет. Некоторые из них хорошо понимают правила, выраженные на естественном языке, другие – нет. Но абсолютно все хорошо работают с конкретными примерами данных. И хотя нет особой необходимости в том, чтобы эксперты работали непосредственно с диаграммами, наличие возможности проиллюстрировать роль непосредственно на диаграмме облегчает задачу проверки проектных решений модельера по поводу тех или иных бизнес-правил» [1. С. 16].

«Для любого типа фактов можно добавить на диаграмме таблицу фактов, заполненную примерами данных для облегчения процесса проверки ограничений целостности. Каждый столбец такой таблицы относится к одной роли» [Там же. С. 10]. «Для двойной проверки ограничений в таблице фактов можно представить также контрпримеры. Конкретные примеры помогают эксперту по ПрО определить, справедливо ли то или иное правило, указанное в схеме данных. Этот дополнительный способ проверки особенно полезен в тех случаях, когда эксперты затрудняются в понимании логических терминов, таких как “каждый”, “по крайней мере”, “не более”, “в точности”, “тот же самый” и т.д.» [Там же. С. 11].

В качестве иллюстрации сказанного можно привести рис. 4, взятый из монографии Халпина [1].

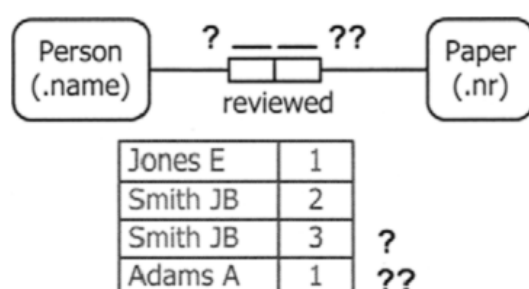


Рис. 4. Экземпляризация с контрпримерами в OR-схеме

Знаками «?» и «??» в OR-схеме и экземпляризации помечены соответствующие друг другу ограничения уникальности роли и контрпримеры. Что касается вербализации, то предполагается, что имена типов сущностей (представлены прямоугольниками с закругленными углами) и предиката (представлен соединенными прямоугольниками ролей) составляют законченное высказывание «Person reviewed Paper» («Человек рецензирует Статью»).

ERM-модель также имеет лингвистические корни. Отображения, по сути, представляют собой предметные функции логики, а последние являются универсальной семантической категорией естественного языка, с помощью которой можно выразить все значимые выражения языка, кроме предложений и единичных имен [7]. С использованием отображений утвердительные предложения приобретают функциональную форму с ярко выраженными подлежащим и сказуемым.

Для нашего примера на рис. 1 можно привести следующие вербализующие правую подсхему высказывания:

- «Врач лечит пациента»
- «Пациент лечится у врача»
- «Пациент имеет диагноз»
- «Диагноз принадлежит пациенту»
- «Врач может лечить нескольких пациентов»
- «Врач может не лечить ни одного пациента»
- «Пациент может лечиться не более чем у одного врача»
- «Пациент может не лечиться у врачей»
- «Пациент может иметь несколько диагнозов»
- «Пациент может не иметь ни одного диагноза»
- «Диагноз должен принадлежать одному и только одному пациенту»

Первые четыре высказывания носят чисто структурный характер и определяют информативность схемы – то, какую информацию БД в состоянии сохранить и вернуть пользователю. Остальные выска-

звания представляют собой констатацию бизнес-правил ПрО и отражают ограничения целостности, указанные в схеме (рис. 1). А все вместе они позволяют эксперту по ПрО оценить корректность схемы и ее адекватность моделируемому миру.

Заключение

В последнее время, к сожалению, предаются забвению методы структурного анализа и проектирования, а также поддерживающие и автоматизирующие их CASE-средства (Computer Aided Software Engineering – разработка программного обеспечения с помощью компьютера). Их бурное развитие в 1990-х гг. и в начале XXI в. сулило разработчикам информационных систем светлое будущее. Но по каким-то причинам оно не настало. Однако ряд исследователей продолжают развивать это направление исследований, надеясь, что их усилия не напрасны.

Представленная работа затрагивает проблемы, которые часто не замечают современные проектировщики БД. Но от этого их схемы данных не становятся адекватнее, эффективнее и понятнее. Использование семантической методики, подкрепленной CASE-инструментами, в которых реализованы предлагаемые в статье идеи, позволит вывести проектирование БД на качественно новый уровень.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halpin T., Morgan T. Information Modeling and Relational Databases. Second Edition. Morgan Kaufman, 2008. 943 p.
2. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
3. Бабанов А.М. Правила порождения ограничений в семантических моделях данных ORM и ERMM // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 4(29). С. 68–76.
4. Бабанов А.М. Базовые и производные структурные понятия ERM-модели данных и изоморфное отношение между ними // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 117–126.
5. Цикритзис Д., Лоховски Ф. Модели данных : пер. с англ. М. : Финансы и статистика, 1985. 344 с.
6. Бабанов А.М. Синонимия элементов ERM-схем и ее использование в методике ERM-моделирования для графической нотации // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 63–72.
7. Бабанов А.М. Два современных подхода к семантическому моделированию – ORM и ERMM // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3(28). С. 46–56.

Бабанов Алексей Михайлович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: babanov2000@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 января 2015 г.

Babanov Alexey M. (Tomsk State University, Russian Federation).

Prospects of database design, opening with application of modern semantic data models.

Keywords: semantic data model, OR-model; ERM-model; DB scheme designing; problems, prospects.

DOI 10.17223/19988605/31/8

Semantic models and technique of their use at DB scheme designing are wrongly underestimated by many persons. Frequently semantic scheme is only an illustration of DB scheme created directly in DBMS model. In this case, those numerous problems of designing, about which this article narrates, are overcome without their deep analysis and use of the system approach. The article covers these problems of DB scheme designing and ways of their decision (it is possible automatic) with use of the modern semantic models – «Object – Role» (OR-model) and «Entity – Relationship – Mapping» (ERM-model).

All modern DB scheme design techniques either initially assume creation of the integrated DB scheme, or integrate earlier created subschemes. Both in that and in the other case, the unification of representation forms and names of application domain (AD) phenomena is carried out. It leads to the loss of semantics located in subschemes, and its repeated finding-out at AD experts during creation of external user schemes.

At the first ERM-designing stage data subschemes are created in exact accordance with requirements of subsystem users and with preservation of their representations and terminology. But they are defined not separately, and all together make the uniform ERM-scheme. At the following stage it is suggested to not refuse these data subschemes, and along with primary data forms and integrity constraints automatically to generate their base forms (classes and mappings) and to set interrelations between elements of various subschemes by the operations and relations between classes and mappings. In further, similar definitions will allow solving automatically many problems of designing.

Passing from user subschemes to the integrated DB scheme, the designer faces one more problem: what data should be stored in the DB and what data should be derived from stored data automatically. Halpin distinguishes even three statuses of data, namely, stored, derived and semiderived. In OR-technique of DB designing the definition of data status is an exclusive prerogative of a person. He makes a concrete choice and he defines data derivation rules, fixing the decision in the OR-scheme.

By this moment, the ERM-scheme already contains all interrelations of subscheme elements, and there is a hope that this information will be in most cases enough for the automatic decision of a problem «stored – derived». Also, it is possible to automate process of the derivation rule definition. All necessary information for it also is set in the ERM-scheme.

After obtaining of the integrated scheme, it is necessary to design subschemes for separate users and user groups. Usually, during this stage designers again address to experts with the question, what they would like to see in dialogue with DB system and in what form. These representations are also necessary for realizing in DBMS. The basic tools of developers in case of relational DBMS are views and triggers.

In the case of ERM-modeling external subschemes actually coincide with analytical ones. During designing elements of these subschemes are associated with their base equivalents and supplied with references to stored structures and integrity constraints. This information in the ERM-scheme is enough to completely define external user schemes in DBMS language. In the relational case, the generation process of the above mentioned views and triggers can be automated. For derived and semiderived data types rules of their calculation from stored data types are defined in views.

Founders and researchers of semantic data models and DB designing technique give also the much attention to the bringing of AD semantics, fixed in schemes, to experts and users of the future system.

There are features promoted the best understanding of the semantic scheme:

- similar to human perception language of the scheme;
- ability to present elements of the scheme as statements of a natural language (verbalization);
- presentation of simple and clear data examples, satisfying and contradicting to the scheme (fact population).

Use of the semantic technique supported by CASE-tools in which ideas offered in this article are realized, will allow to lead DB designing to qualitatively new and higher level.

REFERENCES

1. Halpin, T. & Morgan, T. (2008) *Information Modeling and Relational Databases*. Morgan Kaufman.
2. Babanov, A.M. (2007) Semantic model “Entity – Relationship – Mapping”. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1. pp. 77-91. (In Russian).
3. Babanov, A.M. (2014) Constraint specifications generating rules in semantic models ORM and ERMM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(29). pp. 68-76. (In Russian).
4. Babanov, A.M. (2012) Base and derivative structural concepts of ERM data model and isomorphic relation between them. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (21). pp. 117-126. (In Russian).
5. Tsichritzis, D., Lochovsky, F. (1982) *Modeli dannykh* [Data Models]. Translated from English. Moscow: Finansy i statistika.
6. Babanov, A.M. (2014) Synonymy of ERM-scheme's elements and its use in ERM-modeling technique for the graphic notation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 63-72. (In Russian).
7. Babanov, A.M. (2014) Two modern approaches to semantic modeling - ORM and ERMM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(28). pp. 46-56. (In Russian).

ОБЗОР

УДК 004.415.2

DOI 10.17223/19988605/31/9

О.А. Змеев, Л.С. Иванова

ПОИСК АРТЕФАКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ. ОБЗОР ПОДХОДОВ

Рассмотрены подходы, предложенные исследователями разных стран, для обнаружения паттернов, антипаттернов и недостатков проектирования в различных источниках информации о системе. Проведена систематизация рассмотренных подходов по ряду критериев. Приведен перечень существующих реализаций.

Ключевые слова: паттерн; антипаттерн; анализ данных; UML.

С развитием информационных технологий вопрос качества программного обеспечения становится все более острым. Проектируемые системы становятся все больше и сложнее, что затрудняет как добавление нового функционала, так и поиск и исправление различных ошибок. Автоматизация процесса поиска аномалий, антипаттернов и недостатков способствует улучшению качества разрабатываемого программного обеспечения (ПО), существенному уменьшению времени и стоимости работ. Кроме того, анализ разрабатываемого ПО на наличие различных шаблонов проектирования, отсутствие ошибок позволяет более объективно оценить квалификацию разработчика.

В данной статье проводится обзор литературы, посвященной проблеме обнаружения различных артефактов (паттернов, недостатков, ошибок, антипаттернов и др.) в исходном коде ПО, документации и других источниках информации. Осуществляется систематизация найденных подходов по ряду признаков.

Первый раздел посвящен перечню объектов для анализа. Во втором разделе рассмотрены различные источники информации для анализа. Третий раздел содержит перечень наиболее популярных методов обнаружения артефактов. В четвертом разделе проведен обзор существующих реализаций рассмотренных подходов.

1. Объекты анализа

Подходы, предлагаемые для поиска артефактов, можно классифицировать по целому ряду признаков. Начать рассмотрение следует с классификации по объектам анализа. В качестве цели для поиска могут выступать следующие артефакты:

1. Паттерны проектирования – архитектурные решения, представляющие собой решение некоторой часто возникающей проблемы проектирования в типичном контексте. Например, реализация паттерна Декоратор (Decorator) [1] позволяет посредством оборачивания динамически изменять функционал объекта без порождения громоздкого набора подклассов.

Среди авторов, исследования которых посвящены анализу кода и / или документации, поиск паттернов проектирования является наиболее популярной темой [2–17].

Обнаружение паттернов в исходном коде является важной частью обратного проектирования. Автоматизация данного процесса позволяет существенно увеличить качество собранной информации и уменьшить затраты, как временные, так и материальные.

Авторы статьи [3] предложили подход как для поиска реализаций паттернов, так и для их проверки на соответствие стандартному представлению [1].

2. Антипаттерны, нарушения принципов проектирования, недостатки кода.

Антипаттерны – неудачные архитектурные решения часто возникающих проблем проектирования. В качестве примера можно упомянуть Божественный объект (God object, Blob) [18]. Создание объекта с очень широким функционалом противоречит принципу ООП «разделяй и властвуй» [19].

Поиску данных артефактов посвящены исследования [20–27]. Первый подход [26] по этой тематике подразумевал ручной поиск недостатков в UML-диаграммах [28], в более современных исследованиях используется автоматизированный поиск.

Обнаружение антипаттернов и других недостатков проектирования позволяет повысить качество разрабатываемых приложений. Кроме того, антипаттерны могут быть причиной ошибок, которые не поддаются обнаружению с помощью классических методов тестирования.

3. Микропаттерны.

Поиск паттернов проектирования в автоматическом режиме является нетривиальной задачей в силу своей сложности и нечеткой формализации условий, идентифицирующих их. Это может приводить к ошибочным результатам при попытках распознавания.

С другой стороны, если опуститься на более низкий семантический уровень, который приближен к конкретной реализации (технологии), то паттерны могут быть описаны в четких терминах данной технологии. Подобного рода паттерны были названы отслеживаемыми (англ. traceable patterns) [29]. Данные паттерны могут покрывать различные по величине модули, начиная с фрагментов кода, заканчивая пакетами (в контексте модулей Java). Отслеживаемые паттерны, ограничивающиеся рамками одного класса / интерфейса, были именованы в [29] как микропаттерны.

Авторами статьи [29] был выдвинут набор микропаттернов, которые можно описать простыми средствами, предлагаемыми языком программирования Java. Данный набор представляет собой основные способы проектирования отдельных классов, которые используются разработчиками. В качестве примера можно привести паттерн Запись (англ. Record) – класс, в котором все поля имеют модификатор доступа public и не имеют ни одного объявленного метода.

Это, в свою очередь, даёт фундамент для определения более сложных конструкций, область которых выходит за рамки конкретного класса.

2. Исходные данные для анализа

Вторым основанием для классификации подходов для обнаружения артефактов является источник данных для проведения анализа. В литературе выделяют три типа анализа:

1. Статический анализ – анализ исходного кода и документации.

Статический анализ можно разделить на ряд этапов: на первом этапе осуществляются семантический разбор источника и генерация некоторого внутреннего представления классов и отношений между классами. Затем данное представление анализируется (методы анализа представлены в разделе 3) на наличие искомых артефактов. На финальном этапе результаты анализа передаются пользователю.

Большинство исследований, посвященных DPD (Design Pattern Detection – обнаружение паттернов проектирования), основано на статическом анализе. Методики анализа исходного кода приложения описаны в литературных источниках [2, 4, 6–12, 14, 16, 17, 20–25, 27, 29]. В качестве языка программирования для написания исходного кода наиболее популярными являются Java и C++. Канадскими исследователями был изучен вопрос распознавания паттернов в системах на языке Эйфель в статье [17]. Для тестирования реализаций большинство исследователей использовали известные библиотеки с открытым исходным кодом на соответствующем языке.

Главным недостатком данного подхода является ориентированность на определенный язык программирования. Исходный код приложений, написанный на других популярных языках программирования (C#, Objective C, PHP и др.), не может быть проанализирован с помощью инструментов, предназначенных для анализа исходного кода на языке Java.

Положительной стороной данного подхода является возможность проведения анализа на любом этапе разработки программного обеспечения, подразумевающим наличие исходного кода.

Некоторые подходы подразумевают использование UML-диаграмм [28] в качестве документации для анализа. Примеры методик анализа диаграмм описаны в источниках [3, 13, 15, 26]. Анализ диаграмм UML позволяет устранить ориентированность на определенный язык, однако необходимо поддерживать диаграммы в актуальном состоянии и отображать на них максимально возможное количество информации. Кроме того, необходимо учитывать формат хранения данных, использующийся в case-инструментах для создания UML-диаграмм.

2. Динамический анализ – анализ приложения во время выполнения.

В отличие от статического анализа, динамический подразумевает анализ поведения приложения в процессе работы. Происходит сбор информации о сообщениях, посылаемых между объектами, с учетом времени. На основе этих данных строится внутреннее представление, в котором осуществляется поиск артефактов по поведенческим признакам.

Достоинством динамического анализа является способность распознавать артефакты, одинаковые статически, но разные по поведению. Пример динамического анализа описан в работе [5].

3. Комбинированный анализ – комбинация статического и динамического анализа.

Данному виду анализа посвящены исследования [5]. Статический анализ исходного кода применяется для выявления «кандидатов», динамический анализ – для проверки «кандидатов» на соответствие тому или иному паттерну проектирования. Данный подход более точен, однако объединяет достоинства и недостатки двух вышеописанных подходов.

3. Методы обнаружения артефактов

В исследуемых подходах предлагаются следующие стратегии обнаружения:

1. Метрики программного обеспечения.

Метрикой ПО называют меру, позволяющую получить численное значение некоторого свойства ПО. В качестве примера рассмотрим метрику, используемую авторами статьи [23], для обнаружения антипаттерна Божественный класс (God object) – взвешенное число методов (Weighted Method Count). Формула данной метрики

$$WMC = \sum_{i=1}^n c_i, \quad (1)$$

где c_i – цикломатическое число Маккейба (2). Для каждого метода строится ориентированный граф, при этом вершины графа соответствуют участкам кода с последовательными вычислениями без операторов ветвления и цикла, дуги соответствуют ветвям выполнения программы. Каждая вершина должна быть достижима из начальной, конечная вершина достижима из любой другой вершины.

$$c_i = e_i - n_i + 2p_i \quad (2)$$

где e_i – количество дуг графа, построенного для i -го метода, n_i – количество вершин такого графа, p_i – число компонент связности такого графа.

Принадлежность класса к антипаттерну Божественный объект авторы [23] определяют по следующему правилу:

$$GodClass(S) = S' \left| \begin{array}{l} S' \subseteq S, \forall C \in S' \\ (WMC(C), TopValues(25\%)) \wedge \\ \wedge (ATFD(C), HigherThan(1)) \wedge (TCC(C), BottomValues(25\%)), \end{array} \right.$$

где $ATFD(C)$ – число классов, атрибуты которого запрашиваются в методах класса C , $TCC(C)$ – относительное число непосредственно связанных методов класса C . $(WMC(C), TopValues(25\%))$ означает, что значение $WMC(C)$ должно входить в 25% наибольших значений WMC среди всех классов множества S . $HigherThan(1)$ означает, что $ATFD(C)$ должен быть больше или равен 1. $(TCC(C), BottomValues(25\%))$ означает, что значение $TCC(C)$ должно входить в 25% наименьших значений TCC среди всех классов множества S .

Инструмент для анализа MARPLE [2] также использует метрики при анализе исходного кода и выявлении паттернов.

2. Графы.

В тематике DPD графы чаще всего используются для представления связей между классами, объектами классов. В некоторых исследованиях [11, 24] используется абстрактный синтаксический граф (Abstract Syntax Graph – ASG [30]) как способ представления информации о системе.

2.1 Мера схожести.

Примером использования графов в обнаружении артефактов является подход, предложенный греческими исследователями Николасом Цанталисом и др. [16]. В данном подходе для обнаружения паттернов проектирования используется мера схожести между графами. В качестве узлов графа выступают классы, в качестве ребер – отношения между классами (ассоциации, генерализации и др.). Для вычисления схожести между графами используется следующий метод: графы, соответствующие искомому паттерну (G_A с n_A вершин) и рассматриваемому подмножеству классов (G_B с n_B вершин), представлены в виде матриц смежности. Данные матрицы обрабатываются с помощью специального итеративного алгоритма: Z_0 матрица $n_B \times n_A$, заполненная единицами; на каждой итерации значение вычисляется по формуле (3) до тех пор, пока результат не сойдется.

$$Z_{k+1} = \frac{BZ_k A^T + B^T Z_k A}{\|BZ_k A^T + B^T Z_k A\|_1}, \quad (3)$$

где A , B – матрицы смежности графов G_A и G_B соответственно.

Результат работы алгоритма – матрица S , равная последнему значению Z_k . Элемент s_{ij} описывает схожесть вершины j из G_A с вершиной i из G_B . Затем все матрицы S , полученные для каждого типа отношений, суммируются, результат нормируется. Схожесть искомого паттерна и рассматриваемого подмножества классов определяется экспертной оценкой на основе полученных данных.

Обнаружение подобия между графами позволяет находить паттерны, отличающиеся от их стандартного представления [1]. Кроме того, авторы заявляют, что их подход обнаруживает иерархии паттернов.

2.2. Максимальный изоморфный подграф, дерево решений.

Нахождение подобия между графами может быть сведено к задаче нахождения максимального изоморфного подграфа. Сложность поиска повышается в силу перебора всех возможных изоморфических перестановок для каждого подграфа. В качестве оптимизации авторы статьи [13] используют дерево принятия решений, проход по которому может породить любую возможную перестановку подграфа. Далее вместо полного набора изоморфных перестановок подграфов необходимо использовать соответствующее каждому подграфу дерево решений. Таким образом, для того чтобы определить сходство паттерн-графа и некоторого подграфа системы-графа, необходимо пройти по соответствующему дереву решений и получить ответ о возможности порождения данным деревом перестановки подграфа, равного паттерн-графу.

2.3. Максимальный изоморфный подграф, генетический алгоритм.

Использование графов и генетического алгоритма для обнаружения паттернов предложили индийские исследователи Р. Синх Рао и М. Гупта [15]. В качестве источника данных они используют UML-диаграммы классов, которые преобразуются в графы по специальным правилам: вводятся дополнительные отношения наследования и агрегации по принципу транзитивности; строится граф, вершины которого соответствуют классам, ребра – отношениям между классами. Для каждой вершины определяется вектор $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, строящийся по правилам: $t_1=1$, если соответствующий класс связан ассоциацией с другим классом, иначе 0; $t_2=1$, если соответствующий класс связан агрегацией с другим классом. Значение t_3 определяется наличием отношения наследования, t_4 – зависимостью. Аналогичные вектора $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ вводятся для ребер графа (значения зависят от типа отношения, представленного данным ребром). Хромосома для генетического алгоритма – матрица C размерности $n \times m$, где n – число вершин графа, соответствующего паттерну, m – число вершин графа, соответствующего рассматриваемому подмножеству классов. Хромосомы для первой итерации строятся случайным образом. Функция приспособленности имеет вид

$$F = F_{nc} + F_{ec},$$
$$F_{nc} = |t_1 - t'_1| + |t_2 - t'_2| + |t_3 - t'_3| + |t_4 - t'_4|,$$
$$F_{ec} = |e_1 - e'_1| + |e_2 - e'_2| + |e_3 - e'_3| + |e_4 - e'_4|.$$

Скрещивание происходит путем соединения двух матриц (некоторых столбцов и строк). Мутация заключается в случайной перестановке элементов матрицы из одной строки в другую. Отбор осуществляется по минимальным значениям функции приспособленности. Результатом работы генетического алгоритма является матрица C – матрица соответствия вершины i графа-паттерна и j – графа-подсистемы.

Данный подход предложен впервые, рабочий прототип находится в разработке, поэтому пока нет никаких данных о результатах тестирования.

3. Визуальный анализ.

В качестве полуавтоматического метода обнаружения артефактов в статье [21] был предложен подход, в котором большое количество табличных данных наглядно представляются через визуальные атрибуты геометрического объекта (цвет, высота, поворот прямоугольного столбика и т.д.). Над данными геометрическими объектами могут проводиться различные операции (фильтрация, группировка и т.д.) для облегчения принятия окончательного решения экспертами.

4. Байесовская сеть доверия.

Авторы статьи [22] используют байесовскую сеть для обнаружения антипаттернов. Задача поиска сводится к задаче классификации с двумя возможными исходами: антипаттерн и неантипаттерн. В качестве входных данных используются вектора значений ряда метрик (число объявленных методов, число атрибутов и др.). Для формирования сети, соответствующей искомому антипаттерну, авторы используют методику Goal Question Metric [31]. Методика подразумевает разделение шагов на три уровня: концептуальный (цели), операционный (вопросы), уровень качества (метрики). На концептуальном уровне необходимо определить объект поиска. Операционный уровень вводит ряд вопросов, использующихся для определения объекта поиска, например симптомы антипаттернов. Уровень качества подразумевает ответы на вопросы в измеряемом виде, например метрики для измерения свойств программного обеспечения. На основании данной информации строится сеть доверия, причем входные вершины соответствуют вопросам операционного уровня, выходная вершина содержит вероятность того, что класс является антипаттерном.

5. Java-аннотации.

В статье [14] для обнаружения паттернов проектирования предложено использовать Java-аннотации. По мнению авторов, такие аннотации, как `@abstract`, `@instantiation` и другие, могут указывать на реализации паттернов Одиночка, Адаптер и др. Для обнаружения возможных кандидатов в вышеупомянутой статье также применяются регулярные выражения и SQL-запросы.

6. Предикаты.

Применение предикатов для принятия решения о наличии паттерна рассмотрено в источниках [4, 6, 8, 9]. Принадлежность к определенному паттерну определяется посредством комплексной формулы логики предикатов. Исследуемые входные данные (какого-либо типа, например исходный код, структура диаграммы классов UML и т.д.) представляются как набор термов, подставляемых в целевую формулу. На выходе вполне естественный ответ о принадлежности исходного набора термов области истинности целевого предиката. Подход удобен с точки зрения анализа и реализации своей четкой формализацией требований, однако этот же аспект создает существенные проблемы на этапе формирования этих требований. К примеру, в статье [8] для решения подобных проблем искомые паттерны и анализируемый исходный код преобразуются в конструкции на языке OWL (Web Ontology Language [32]).

7. Операции с битовыми массивами.

Необычный способ поиска паттернов в исходном коде предложили исследователи из Монреаля [10]. Они используют итеративный алгоритм, который с помощью побитовых логических операций над векторами обнаруживает реализацию паттерна в приложении. Для исходного кода создается UML-подобное графическое представление, на основе которого строится ориентированный граф (вершины – классы, ребра – отношения между классами). Полученный граф автоматически достраивается до эйлера графа, строится минимальный эйлеров цикл. На основе эйлера цикла формируется строчное представление исходной системы, которое преобразуется в набор битовых векторов. Аналогичные операции проводятся для искомого паттерна. Логические операции над набором векторов системы и набором векторов искомого паттерна позволяют обнаружить реализацию паттерна в системе.

8. Разбор текстового представления визуального языка

Метод, описанный в статье [7], делится на два этапа. Первый этап заключается в следующем: для исходного кода строится представление на специальном визуальном языке, отражающем отношения между классами. Это представление преобразуется в строковое выражение. Паттерн задается определенной грамматикой, которая определяет некоторое допустимое подмножество возможных порождаемых выражений. Проверяется принадлежность текущего выражения данному подмножеству на основе LR-анализа. Принадлежность говорит о возможном существовании паттерна в рассматриваемой подсистеме. Пример грамматики для паттерна Адаптер (Adapter) приведен ниже:

a) *AdapterPattern* $\rightarrow$ 1_2 INHERITANCE 1_1 *Adapter* 1_1 ASSOCIATION 2_1 *Adaptee*

b) *Target* $\rightarrow$ CLASS

$\Delta: \{Target_1 = CLASS_1\}$

c) *Adapter* $\rightarrow$ CLASS

$\Delta: \{Adapter_1 = CLASS_1\}$

d) *Adaptee* $\rightarrow$ CLASS

$\Delta: \{Adaptee_1 = CLASS_1\}$

Правила порождения b – d определяют нетерминальные *Target*, *Adapter*, *Adaptee* как терминальный символ CLASS, правило a определяет паттерн Адаптер как нетерминальный *Target*, связанный терминальным символом INHERITANCE с нетерминальным *Adapter*, который, в свою очередь, связан терминальным ASSOCIATION с нетерминальным *Adaptee*.

На втором этапе осуществляется проверка участков исходного кода – кандидатов, обнаруженных на первом этапе. Данный подход, как утверждают авторы, зарекомендовал себя для обнаружения структурных паттернов.

Помимо вышеперечисленных, исследователями предложены различные методы ручного поиска артефактов [26].

4. Существующие реализации

На основе некоторых из описанных подходов [2–8, 11, 12, 14, 17, 22, 23, 25, 27] авторами были разработаны соответствующие реализации. Большинство из них являются плагинами для IDE Eclipse и осуществляют анализ исходного кода на языке Java. Для тестирования таких плагинов использовались открытые исходные коды популярных фреймворков (JHotDraw и др.). Таким образом, сравнение качества и скорости обнаружения артефактов возможно только для нескольких реализаций.

Автор инструмента для обнаружения паттернов PDE [5] в своей диссертации провел сравнение инструмента с такими аналогами, как FUJABA [11] и PINOT [12]. Помимо того факта, что аналоги не поддерживают часть паттернов GoF [1], они продемонстрировали худшие результаты при распознавании таких паттернов, как Прототип (Prototype), Компоновщик (Composite) и Состояние (State) [1].

Инструмент DRT [14] в сравнении с PINOT [12] выдал практически одинаковые результаты, выигрывая в определении Фабричного метода и проигрывая для паттерна Посетитель. Сравнение с FUJABA [11] продемонстрировало полное превосходство DRT [14].

Подходы для обнаружения антипаттернов также имеют несколько реализаций. Разработчики инструмента BDTEX [22] утверждают, что их приложение обнаруживает реализации антипаттерна Блоб (Blob, God object) [18] лучше, чем инструмент Detex [25].

Помимо плагинов для анализа исходного кода, в сети Интернет доступна реализация подхода для рефакторинга паттернов проектирования в UML-диаграммах [3]. Данная реализация встроена в инструмент для создания UML-диаграмм ArgoUML.

Проблема тестирования и сравнения различных реализаций DPD-подходов стала настолько острой, что итальянскими исследователями [33] было создано веб-приложение для сравнительного анализа инструментов обнаружения паттернов. На данный момент в нем содержится девять Java-фреймворков как источников данных для поиска и четыре инструмента анализа для сравнения.

Заключение

Анализ литературы показал, что тематика DPD достаточно популярна. Написано большое количество печатных работ, предложена масса подходов для поиска не только паттернов, но и различных недостатков. Разработано несколько рабочих решений, позволяющих проводить анализ исходного кода. Также существует решение для анализа UML-диаграмм.

Предложенные исследователями методики имеют как достоинства, так и недостатки. Основным недостатком большинства предложенных подходов является зависимость от конкретного языка программирования. Необходимо проводить работу в области анализа UML-диаграмм и других независимых от языка реализации источников информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gamma E., Helm R., Johnson R., Vlissides J. Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software. Addison-Wesley, 1995.
2. Arcelli Fontana F., Zanoni M. A tool for design pattern detection and software architecture recognition // Information Sciences. 2011. V. 181. P. 1306–1324.
3. Bergenti F., Poggi A. Improving UML Designs Using Automatic Design Pattern Detection // Proc. 12th. International Conference on Software Engineering and Knowledge Engineering. 2000. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.3764>
4. Beyer D., Lewerentz C. CrocoPat: efficient pattern analysis in object-oriented programs // Proceedings of the International Workshop on Program Comprehension (IWPC'03). 2003. P. 294–295.
5. Birkner M. Object-oriented design pattern detection using static and dynamic analysis in java software / MB-PDE Java Software Design Pattern Detection Engine. URL: <https://mb-pde.googlecode.com/files/MasterThesis.pdf>
6. Blewitt A., Bundy A., Stark I. Automatic verification of design patterns in Java // ASE '05 Proceedings of the 20th IEEE/ACM international Conference on Automated software engineering. ACM, New York, 2005. P. 224–232.
7. De Lucia A., Deufemia V., Gravino C., Risi M. Design pattern recovery through visual language parsing and source code analysis // The Journal of Systems and Software. 2009. No. 82. P. 1177–1193.
8. Dietrich J., Elgar C. Towards a web of patterns // Web Semantics: Science, Services and Agents on the World Wide Web. 2007. No. 5(2). P. 108–116.
9. Fabry J., Mens T. Language-independent detection of object-oriented design patterns // Computer Languages, Systems & Structures. 2004. V. 30. P. 21–33.
10. Gueheneuc Y., Hamel S., Kaczor O. Efficient identification of design patterns with bit-vector algorithm // Proceedings of European Conference on Software Maintenance and Reengineering (CSMR'06). Bari, 2006. P. 175–184.
11. Towards pattern design recovery / J. Niere et. al // Proceedings of International Conference on Software Engineering (ICSE'02). Orlando, 2002. P. 338–348.
12. Olsson, R., Shi, N. Reverse engineering of design patterns from java source code // Proceedings of IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering (ASE'06). Tokyo, 2006. P. 123–134.
13. Pande A., Gupta M., Tripathi A.K. A decision tree approach for design patterns detection by subgraph isomorphism // Communications in Computer and Information Science. 2010. V. 101. P. 561–564.
14. Rasool G., Philipow I., Mader P. Design pattern recovery based on annotations // Advances in Engineering Software. 2010. V. 41. P. 519–526.
15. Singh Rao R., Gupta M. Design Pattern Detection by Multilayer Neural Genetic Algorithm // International Journal of Computer Science and Network. 2014. No. 3(1). P. 9–14.
16. Tsantalis N., Chatzigeorgiou A., Stephanides G., Halkidis S.T. Design pattern detection using similarity scoring // IEEE TRANSACTIONS ON SOFTWARE ENGINEERING. 2006. No. 32(11). P. 896–909.
17. Wang W., Tzerpos V. DPVK – an eclipse plug-in to detect design patterns in Eiffel systems // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2004. V. 107. P. 71–86.
18. Riel A.J Object-Oriented Design Heuristics. Addison-Wesley, 1996.
19. Top Down Design in An Object Oriented World // University of SAN FRANCISCO. Department of computer science. URL: <http://www.cs.usfca.edu/~parrt/course/601/lectures/top.down.design.html>
20. Christopoulou A., Giakoumakis E.A., Zafeiris V.E., Soukara V. Automated refactoring to the Strategy design pattern // Information and Software Technology. 2012. No. 54. P. 1202–1214.
21. Dhambri K., Sahraoui H., Poulin P. Visual detection of design anomalies // Software Maintenance and Reengineering. 2008. P. 279–283.
22. Khomh F., Vaucher S., Gueheneuc Y.-G., Sahraoui H. BDTEX: a cgm-based Bayesian approach for the detection of antipatterns // The Journal of Systems and Software. 2011. No. 84. P. 559–572.
23. Marinescu R. Detection strategies: metrics-based rules for detecting design flaws // Software Maintenance. 2004. P. 350–359.
24. Meyer M. Pattern-based reengineering of software systems // WCRE '06: Proceedings of the 13th Working Conference on Reverse Engineering. Washington, 2006. P. 305–306.

25. Moha N., Gueheneuc G., Duchien L., Le Meur A.F. Décor: a method for the specification and detection of code and design smells // Software Engineering, IEEE Transactions on. 2009. No. 36(1). P. 20–36.
26. Travassos G., Shull F., Fredericks M., Basili V.R. Detecting defects in object-oriented designs: using reading techniques to increase software quality / Computer Science. University of Maryland. URL: <http://www.cs.umd.edu/projects/SoftEng/ESEG/papers/oopsla99.pdf>
27. Wieman R. Anti-pattern Scanner: an approach to detect anti-patterns and design violations / The Software Evolution Research Lab. URL: http://swirl.tudelft.nl/wiki/pub/Main/PastAndCurrentMScProjects/Thesis_RubenWieman2011.pdf
28. OMG Unified Modeling Language (OMG UML), Infrastructure / Documents Associated With Unified Modeling Language (UML), V.2.4.1. UML: <http://www.omg.org/spec/UML/2.4.1/Infrastructure/PDF/>
29. Gil J., Maman I. Micro Patterns in Java Code // OOPSLA '05 Proceedings of the 20th annual ACM SIGPLAN conference on Object-oriented programming, systems, languages, and applications. ACM, New York, 2005. P. 97–116.
30. Abstract semantic graph // Wikipedia – free encyclopedia. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Abstract_semantic_graph
31. Basili R., Weiss D.M. A methodology for collecting valid software engineering data // IEEE Transactions on Software Engineering. 1984. No. 10 (6). P. 728–738.
32. Web Ontology Language // Wikipedia – free encyclopedia. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Web_Ontology_Language
33. Arcelli F., Caracciolo A., Zanoni M. A Benchmark for Design Pattern Detection Tools: a Community Driven Approach // Special theme: Evolving Software. 2012. No. 88. P. 32.

Змеев Олег Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: ozmeyev@gmail.com

Иванова Лидия Сергеевна. E-mail: lida@redlg.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14 апреля 2015 г.

Zmeev Oleg A., Ivanova Lidia S. (Tomsk state university, Russian Federation).

Design artifacts detection. Review of the approaches.

Keywords: design pattern; antipattern; data analysis; UML.

DOI 10.17223/19988605/31/9

In this paper, the review of the literature dedicated to the detection of the different artifacts (patterns, defects, errors, antipatterns and etc.) in software source code, documentation and other information sources is given. The systematization of the approaches on several grounds is achieved.

In the study approaches the following artifacts can be used as the purpose for the search:

1. Design patterns.

Patterns detection in the source code is important part of the reverse design. The automation of this process makes it possible to significantly increase the quality of the collected information and to decrease both time and material costs.

2. Antipatterns, design principle violations, code defects.

Antipatterns and other design defects detection makes it possible to increase the quality of developed applications.

3. Micro pattern is traceable patterns, which are limited by the one class/interface. Their detection creates foundation for determining more complex constructions.

Secondly, the classification of approaches is based on the data source for conducting the analysis. There are 3 types of the analysis in the literature:

1. The static analysis is the analysis of the source code and documentation.

Programming languages Java and C++ are the most popular for source code writing. Also, some researchers use UML-diagrams as documentation for analysis.

2. The dynamic analysis is that of application in runtime. Java-bytecode is used as the source data.

3. The combined analysis is combination of static and dynamic analysis. The static analysis of the source code is used for the detection of “candidates”, dynamic analysis is used for checking “candidates” if they correspond to one or another design pattern.

The following detection strategies are proposed in the study approaches:

1. Metrics.

2. Graphs.

3. Visual analysis.

4. Bayesian Belief Networks.

5. Java-annotations.

6. Predicates.

7. Bit arrays operations.

8. Analysis of textual representation of visual language.

Besides those enumerated above, researchers proposed the different methods of the manual detection of artifacts.

The corresponding realizations were developed by authors on the base of several described approaches. The most of them are IDE Eclipse plugins and analyses Java source code. Open source code of popular frameworks (JHotDraw and etc.) is used for testing such plugins.

Approaches for antipatterns detection so have several realizations.

Besides plugins for source code analysis, the approach realization for design patterns refactoring in UML-diagrams is accessible in the Internet.

The analysis of literature showed that the DPD issue is sufficiently popular. The procedures proposed by researchers have both advantages and disadvantages. The main disadvantage in the majority of the approaches proposed is dependence on the concrete programming language. It is necessary to perform work in the domain of the analysis of UML- diagrams and others language information sources, which are independent of the realization.

REFERENCES

1. Gamma, E., Helm, R., Johnson, R. & Vlissides, J. (1995) *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software*. Addison-Wesley.
2. Arcelli Fontana, F. & Zanoni, M. (2011) A tool for design pattern detection and software architecture recognition. *Information Sciences*. 181. pp. 1306-1324. DOI : 10.1016/j.ins.2010.12.002
3. Bergenti, F. & Poggi, A. (2000) Improving UML Designs Using Automatic Design Pattern Detection. *Proc. 12th. International Conference on Software Engineering and Knowledge Engineering*. 2000. [Online] Available from: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.3764>
4. Beyer, D. & Lewerentz, C. (2003) CrocoPat: efficient pattern analysis in object-oriented programs. *Proceedings of the International Workshop on Program Comprehension (IWPC'03)*. pp. 294-295.
5. Birkner, M. Object-oriented design pattern detection using static and dynamic analysis in java software. MB-PDE Java Software Design Pattern Detection Engine. [Online] Available from: <https://mb-pde.googlecode.com/files/MasterThesis.pdf>.
6. Blewitt, A., Bundy, A. & Stark, I. (2005) Automatic verification of design patterns in Java. *ASE '05 Proceedings of the 20th IEEE/ACM international Conference on Automated software engineering*. ACM New York. pp. 224-232.
7. De Lucia, A., Deufemia, V., Gravino, C. & Risi, M. (2009) Design pattern recovery through visual language parsing and source code analysis. *The Journal of Systems and Software*. 82. pp. 1177-1193. DOI: 10.1016/j.jss.2009.02.012
8. Dietrich, J. & Elgar, C. (2007) Towards a web of patterns. *Web Semantics: Science, Services and Agents on the World Wide Web*. 5(2). pp. 108-116. DOI: 10.1016/j.websem.2006.11.007
9. Fabry, J. & Mens, T. (2004) Language-independent detection of object-oriented design patterns. *Computer Languages, Systems & Structures*. 30. pp. 21-33. DOI: 10.1016/j.cl.2003.09.002
10. Gueheneuc, Y., Hamel, S. & Kaczor, O. (2006) Efficient identification of design patterns with bit-vector algorithm. *Proceedings of European Conference on Software. Maintenance and Reengineering (CSMR'06)*. Bari. pp. 175-184.
11. Niere, J. et.al. (2002) Towards pattern design recovery. *Proceedings of International Conference on Software Engineering (ICSE'02)*. Orlando. pp. 338-348.
12. Olsson, R. & Shi, N. (2006) Reverse engineering of design patterns from java source code. *Proceedings of IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering (ASE'06)*. Tokyo. pp. 123-134.
13. Pande, A., Gupta, M. & Tripathi, A.K. (2010) A decision tree approach for design patterns detection by subgraph isomorphism. *Communications in Computer and Information Science*. 101. pp. 561-564. DOI: 10.1007/978-3-642-15766-0_95
14. Rasool, G., Philipow, I. & Mader P. (2010) Design pattern recovery based on annotations. *Advances in Engineering Software*. 2010. 41. pp. 519-526. DOI: 10.1016/j.advensoft.2009.10.014
15. Singh Rao, R. & Gupta, M. (2014) Design Pattern Detection by Multilayer Neural Genetic Algorithm. *International Journal of Computer Science and Network*. 3(1). pp. 9-14.
16. Tsantalis, N., Chatzigeorgiou, A., Stephanides, G. & Halkidis, S.T. (2006) Design pattern detection using similarity scoring. *IEEE TRANSACTIONS ON SOFTWARE ENGINEERING*. 32(11). pp. 896-909. DOI: 10.1109/TSE.2006.112
17. Wang, W. & Tzerpos, V. (2004) DPVK – an eclipse plug-in to detect design patterns in Eiffel systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 107. pp. 71-86. DOI: 10.1016/j.entcs.2004.02.049
18. Riel, A.J. (1996) *Object-Oriented Design Heuristics*. Addison-Wesley.
19. *Top Down Design in An Object Oriented World*. University of San Francisco. Department of computer science. [Online] Available from: <http://www.cs.usfca.edu/~parrr/course/601/lectures/top.down.design.html>.
20. Christopoulou, A., Giakoumakis, E.A., Zafeiris, V.E. & Soukara, V. (2012) Automated refactoring to the Strategy design pattern. *Information and Software Technology*. 54. pp. 1202-1214. DOI: 10.1016/j.infsof.2012.05.004
21. Dhambri, K., Sahraoui, H. & Poulin, P. (2008) Visual detection of design anomalies. *Proc. of the 12th European Conference on Software Maintenance and Reengineering*. pp. 279-283. DOI: 10.1109/CSMR.2008.4493326
22. Khomh, F., Vaucher, S., Gueheneuc, Y.-G. & Sahraoui, H. (2011) BDTEX: a cgm-based Bayesian approach for the detection of antipatterns. *The Journal of Systems and Software*. 84. pp. 559-572.
23. Marinescu, R. (2004) Detection strategies: metrics-based rules for detecting design flaws. *Proc. of the 20th IEEE International Conference on Software Maintenance*. pp. 350-359. DOI: 10.1109/ICSM.2004.1357820
24. Meyer, M. (2006) Pattern-based reengineering of software systems. *WCRE '06: Proceedings of the 13th Working Conference on Reverse Engineering*. Washington. pp. 305-306. DOI: 10.1109/WCRE.2006.42
25. Moha, N., Gueheneuc, G., Duchien, L. & Le Meur, A.F. (2009) Décor: a method for the specification and detection of code and design smells. *Software Engineering, IEEE Transactions on*. 36(1). pp. 20-36. DOI: 10.1109/TSE.2009.50
26. Travassos, G., Shull, F., Fredericks, M. & Basili, V.R. (1999) Detecting defects in object-oriented designs: using reading techniques to increase software quality. *Proc. of the 14th ACM SIGPLAN conference on Object-oriented programming, systems, languages,*

- and applications. University of Maryland. [Online] Available from: <http://www.cs.umd.edu/projects/SoftEng/ESEG/papers/oopsla99.pdf>. DOI: 10.1145/320384.320389
27. Wieman, R. (2011) *Anti-pattern Scanner: an approach to detect anti-patterns and design violations*. Master's Thesis. The Software Evolution Research Lab. [Online] Available from: [http://swel.tudelft.nl/twiki/pub/Main/PastAndCurrentMScProjects / Thesis_RubenWieman2011.pdf](http://swel.tudelft.nl/twiki/pub/Main/PastAndCurrentMScProjects/Thesis_RubenWieman2011.pdf).
 28. *OMG Unified Modeling Language (OMG UML), Infrastructure. Documents Associated With Unified Modeling Language (UML), V.2.4.1*. Available from: <http://www.omg.org/spec/UML/2.4.1/Infrastructure/PDF/>
 29. Gil, J. & Maman, I. (2005) Micro Patterns in Java Code. *OOPSLA '05 Proceedings of the 20th annual ACM SIGPLAN conference on Object-oriented programming, systems, languages, and applications*. ACM New York. pp. 97-116. DOI: 10.1145/1094811.1094819
 30. Wikipedia – free encyclopedia. *Abstract semantic graph*. [Online] Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/ Abstract_semantic_graph](http://en.wikipedia.org/wiki/Abstract_semantic_graph).
 31. Basili, R. & Weiss, D.M. (1984) A methodology for collecting valid software engineering data. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 10(6). pp. 728-738. DOI: 10.1109/TSE.1984.5010301
 32. Wikipedia – free encyclopedia. *Web Ontology Language*. [Online] Available from: [http://en.wikipedia.org/wiki/ Web_Ontology_Language](http://en.wikipedia.org/wiki/Web_Ontology_Language).
 33. Arcelli, F., Caracciolo, A. & Zanoni, M. (2012) A Benchmark for Design Pattern Detection Tools: a Community Driven Approach. *Special theme: Evolving Software*. 88. pp. 32.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии факультета информатики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail.ru

БАХОЛДИНА Мария Алексеевна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

ГЛАЗКОВА Анна Валерьевна – аспирантка кафедры программного обеспечения Тюменского государственного университета. E-mail: anya_kr@aol.com

ГРАМОТИНА Ольга Викторовна – инженер лаборатории вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: helga13d25@mail.ru

ЗАДИРАНОВА Любовь Александровна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: zhidkova@mail.ru

ЗМЕЕВ Олег Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой программной инженерии факультета информатики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ozmeyev@gmail.com

ИВАНОВА Лидия Сергеевна – аспирантка кафедры программной инженерии факультета информатики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: lida@redlg.ru

КЕЛЛЕР Юрий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры исследования операций факультета прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kua1102@rambler.ru

МОИСЕЕВА Светлана Петровна – кандидат технических наук, доцент кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: smoiseeva@mail.ru

ОСИПОВА Марина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа ДВФУ, научный сотрудник лаборатории вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: mao1975@list.ru

СЕМЁНОВА Мария Александровна – аспирантка кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: vedernikova.m.a@gmail.com

СИРОТИНА Мария Николаевна – аспирантка факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mashuliagol@mail.ru

ЧИМИТОВА Екатерина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: chimitova@corp.nstu.ru

ЦИЦИАШВИЛИ Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, управления и программного обеспечения ДВФУ, заведующий лабораторией вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: guram@iam.dvo.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2015. № 2 (31)

Редактор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 08.06.2015 г. Формат 60х84¹/₈.

Гарнитура Times.

Печ. л. 11,5; усл. печ. л. 10,7.

Тираж 250 экз. Заказы № 1083, 1083/1.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Телефон 8+(382-2)–53-15-28