ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21
DOI 10.17223/19988605/31/1

М.А. Бахолдина

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ И УСЛОВИЯ ЕГО РЕКУРРЕНТНОСТИ

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид плотности вероятностей и совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока. Формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; мертвое время; плотность вероятностей длительности интервала; совместная плотность вероятностей длительностей интервалов; условия рекуррентности потока событий.

Математические модели теории массового обслуживания находят широкое применение при описании реальных физических, технических и других объектов и систем. Стоит отметить, что условия функционирования реальных систем таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, и часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Данные потоки можно охарактеризовать двумя случайностями: первая случайность – это число событий на любом рассматриваемом интервале функционирования потока; вторая случайность – это случайный процесс $\lambda(t)$, называемый интенсивностью потока [1–5].

Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два основных класса: к первому относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [2]; ко второму относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Потоки второго класса наиболее характерны для реальных телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетей связи. Впервые и независимо они были введены в рассмотрение в работах [6, 7]. В современной литературе данные потоки событий наиболее часто называют либо дважды стохастическими потоками, либо MAP-потоками, либо MC-потоками событий [8–13].

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, MC-потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий [14–16]; 2) асинхронные потоки – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [17–19]; 3) полусинхронные потоки – потоки, у которых для одного множества состояний справедливо определение первого типа, а для остальных состояний справедливо определение второго типа [20–22]. Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки возможно представить в виде моделей MAP-потоков событий с определенными ограничениями на параметры последних [23].

Стоит отметить, что интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, P2P-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [24–29]. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [30–33]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [34–37].

Отдельно стоит отметить, что одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживающий прибор, порождает период так называемого мертвого времени [38], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В данной работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [20] и обобщенного полусинхронного потока [39] и относящийся к классу MAP-потоков событий. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [31–33], находятся явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и явный вид совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями 1, 2: $\lambda(t)=\lambda_1$ либо $\lambda(t)=\lambda_2$ $(\lambda_1>\lambda_2\geq 0)$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в первом (втором) состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β (α). Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в первом (втором) состоянии, то на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$, где Δt (здесь и далее) – достаточно малая величина, с вероятностью $\beta\Delta t+o(\Delta t)$ (с вероятностью $\alpha\Delta t+o(\Delta t)$) пребывание процесса $\lambda(t)$ в первом (во втором) состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ перейдет из первого (второго) состояния во второе (первое). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t)=\lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i=1,2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1; переход осуществляется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$; с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии (т.е. сначала наступает событие потока, затем происходит либо не происходит переход процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе). Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \le \delta \le 1)$ дополнительное событие. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\beta) & \beta \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2+\alpha) \end{Vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\beta = 0$, то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [39].

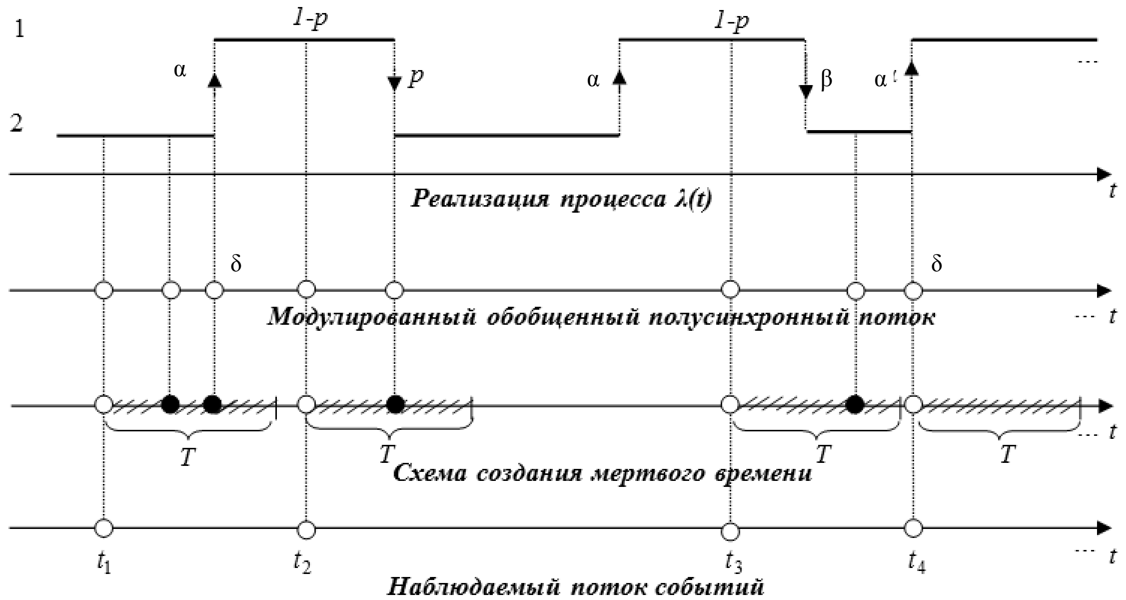

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности *T*, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившие событие снова создает период мертвого времени длительности *T* и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквой δ; периоды мертвого времени длительности *T* помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые t_1, t_2,... – белыми.

Заметим, что в определении модулированного обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает дополнительное событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем выводе плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможны два варианта, связанных с наступлением события и переходом процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса $\lambda(t)$, затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. В силу этого при получении численных результатов путем имитационного моделирования наблюдаемого потока событий необходимо учитывать реальную ситуацию.

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока t_1, $t_2,\ldots$. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий t_1, $t_2,\ldots$, $t_k,\ldots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k, $k=1,2,\ldots$. Обозначим через $\tau_k = t_{k+1}-t_k$, $k=1,2,\ldots$, значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала есть $p_T(\tau_k)=p_T(\tau)$, $\tau\ge 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau=0$. Пусть теперь (t_k,t_{k+1}), (t_{k+1},t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $\tau_{k+1}=t_{k+2}-t_{k+1}$. Их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно рассмотреть соседние интервалы (t_1,t_2), (t_2,t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1=t_2-t_1$, $\tau_2=t_3-t_2$; $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$. При этом $\tau_1=0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2=0$ соответствует моменту t_2 наступления события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau)$, $\tau\ge 0$ и явного вида совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$, а также в установлении условий рекуррентности наблюдаемого потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени $(0,\tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Значение длительности данного интервала есть $\tau=T+t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t\ge 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ есть условная вероятность того, что на интервале $(0,t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t)=\lambda_k$ при условии, что в момент времени $t=0$ значение процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda(0)=\lambda_j$, $j,k=1,2$. Соответствующую этой вероятности плотность вероятностей обозначим через $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j,k=1,2$. Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau=0$) в состояние j (момент времени $\tau=T$), $i,j=1,2$, и вероятность $\pi_i(0\,|\,T)$ – условная (финальная) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии i ($i=1,2$) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока, розыгрыш состояний произошел и наступил период мертвого времени длительности T. Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде

$$p_T(\tau)=\begin{cases}0, \quad 0\le\tau<T,\\ \sum_{i=1}^{2}\pi_i(0\,|\,T)\sum_{j=1}^{2}q_{ij}(T)\sum_{k=1}^{2}\tilde{p}_{jk}(\tau-T), \quad \tau\ge T.\end{cases} \tag{1}$$

Найдем явные выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$, $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0\,|\,T)$, $i,j,k=1,2$.

Для вероятностей $p_{jk}(t)$ справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(t)=-(\lambda_1+\beta)p_{11}(t)+\alpha(1-\delta)p_{12}(t), \qquad p'_{12}(t)=-(\lambda_2+\alpha)p_{12}(t)+\beta p_{11}(t);$$
$$p'_{22}(t)=-(\lambda_2+\alpha)p_{22}(t)+\beta p_{21}(t), \qquad p'_{21}(t)=-(\lambda_1+\beta)p_{21}(t)+\alpha(1-\delta)p_{22}(t),$$

с начальными условиями $p_{11}(0)=1$, $p_{12}(0)=0$; $p_{22}(0)=1$, $p_{21}(0)=0$, решая которые, находим

$$\begin{gathered}p_{11}(t)=\frac{1}{z_2-z_1}[(\lambda_2+\alpha-z_1)e^{-z_1t}-(\lambda_2+\alpha-z_2)e^{-z_2t}], \quad p_{12}(t)=\frac{\beta}{z_2-z_1}(e^{-z_1t}-e^{-z_2t}),\\ p_{21}(t)=\frac{\alpha(1-\delta)}{z_2-z_1}(e^{-z_1t}-e^{-z_2t}), \quad p_{22}(t)=\frac{1}{z_2-z_1}[(\lambda_1+\beta-z_1)e^{-z_1t}-(\lambda_1+\beta-z_2)e^{-z_2t}],\\ z_1=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right),\\ z_2=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta+\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right), \quad 0<z_1<z_2.\end{gathered} \tag{2}$$

В соответствии с определением модулированного обобщенного полусинхронного потока событий введем вероятность $p_{11}(t)e^{-\beta\Delta t}(1-e^{-\lambda_1\Delta t})(1-p)=p_{11}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t+o(\Delta t)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий потока процесс $\lambda(t)$ перешел на интервале $(0,t)$ из первого состояния в первое ($\lambda(0)=\lambda_1, \lambda(t)=\lambda_1$) и на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$ наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_1, при этом процесс $\lambda(t)$ остался в первом состоянии. Аналогичные совместные вероятности для различных j и k ($j,k=1,2$) примут вид

$$p_{11}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{12}(t)\alpha\delta\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{11}(t)\lambda_1 p\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{12}(t)\lambda_2\Delta t+o(\Delta t);$$
$$p_{21}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{22}(t)\alpha\delta\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{21}(t)\lambda_1 p\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{22}(t)\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

Соответствующие плотности вероятностей выпишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(t)=p_{11}(t)\lambda_1(1-p), \quad \tilde{p}_{11}^{(2)}(t)=p_{12}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{12}^{(1)}(t)=p_{11}(t)\lambda_1 p, \quad \tilde{p}_{12}^{(2)}(t)=p_{12}(t)\lambda_2;$$
$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(t)=p_{21}(t)\lambda_1(1-p), \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(t)=p_{22}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{22}^{(1)}(t)=p_{21}(t)\lambda_1 p, \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(t)=p_{22}(t)\lambda_2.$$

Тогда плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале $(0,t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент времени t процесс $\lambda(t)$ перейдет на этом интервале из состояния j в состояние k, запишутся для различных j и k ($j,k=1,2$) как

$$\begin{gathered}\tilde{p}_{11}(t)=p_{11}(t)\lambda_1(1-p)+p_{12}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{12}(t)=p_{11}(t)\lambda_1 p+p_{12}(t)\lambda_2;\\ \tilde{p}_{21}(t)=p_{21}(t)\lambda_1(1-p)+p_{22}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{22}(t)=p_{21}(t)\lambda_1 p+p_{22}(t)\lambda_2.\end{gathered} \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j,k=1,2$.

Для вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $0\le\tau\le T$, справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$q'_{11}(\tau)=-(p\lambda_1+\beta)q_{11}(\tau)+\alpha q_{12}(\tau), \quad q'_{12}(\tau)=(p\lambda_1+\beta)q_{11}(\tau)-\alpha q_{12}(\tau);$$
$$q'_{21}(\tau)=-(p\lambda_1+\beta)q_{21}(\tau)+\alpha q_{22}(\tau), \quad q'_{22}(\tau)=(p\lambda_1+\beta)q_{21}(\tau)-\alpha q_{22}(\tau)$$

с начальными условиями $q_{11}(0)=1$, $q_{12}(0)=0$; $q_{22}(0)=1$, $q_{21}(0)=0$, решая которые, находим для $\tau=T$

$$
\begin{gathered}
q_{11}(T)=\pi_1+\pi_2 e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}, \quad q_{12}(T)=\pi_2-\pi_2 e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}; \\
q_{21}(T)=\pi_1-\pi_1 e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}, \quad q_{22}(T)=\pi_2+\pi_1 e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}, \\
\pi_1=\frac{\alpha}{p\lambda_1+\beta+\alpha}, \quad \pi_2=\frac{p\lambda_1+\beta}{p\lambda_1+\beta+\alpha}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Перейдем к нахождению вероятностей $\pi_i(0\,|\,T)$, $i=1,2$. Обозначим через π_{ij} переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $\tau=0$ до момента наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации последующего розыгрыша состояний потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i,j=1,2$). Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложенную цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0\,|\,T)$ справедлива следующая система уравнений:

$$
\begin{gathered}
\pi_1(0\,|\,T)=\pi_1(0\,|\,T)\pi_{11}+\pi_2(0\,|\,T)\pi_{21}, \quad \pi_2(0\,|\,T)=\pi_1(0\,|\,T)\pi_{12}+\pi_2(0\,|\,T)\pi_{22}, \\
\pi_1(0\,|\,T)+\pi_2(0\,|\,T)=1.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Введем в рассмотрение вероятность p_{ij} – переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $t=0$ (момента окончания мертвого времени) до момента наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i,j=1,2$). При этом вероятности p_{ij} определяются в виде

$$
p_{ij}=\int_0^\infty \tilde{p}_{ij}(t)dt, \tag{6}
$$

где $\tilde{p}_{ij}(t)$ определены в (3), $p_{ij}(t)$ – в (2) ($i,j=1,2$). Вычисляя интегралы (6) для различных i и j ($i,j=1,2$):

$$
\begin{aligned}
p_{11}&=\int_0^\infty \tilde{p}_{11}(t)dt=\lambda_1(1-p)\int_0^\infty p_{11}(t)dt+\alpha\delta\int_0^\infty p_{12}(t)dt, \\
p_{12}&=\int_0^\infty \tilde{p}_{12}(t)dt=\lambda_1 p\int_0^\infty p_{11}(t)dt+\lambda_2\int_0^\infty p_{12}(t)dt, \\
p_{21}&=\int_0^\infty \tilde{p}_{21}(t)dt=\lambda_1(1-p)\int_0^\infty p_{21}(t)dt+\alpha\delta\int_0^\infty p_{22}(t)dt, \\
p_{22}&=\int_0^\infty \tilde{p}_{22}(t)dt=\lambda_1 p\int_0^\infty p_{21}(t)dt+\lambda_2\int_0^\infty p_{22}(t)dt,
\end{aligned}
$$

находим

$$
\begin{aligned}
p_{11}&=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_1(1-p)(\lambda_2+\alpha)+\alpha\delta\beta], \quad p_{12}=\frac{1}{z_1z_2}[p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta]; \\
p_{21}&=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_1\alpha(1-p+p\delta)+\alpha\delta\beta], \quad p_{22}=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_2(\lambda_1+\beta)+p\lambda_1\alpha(1-\delta)],
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $z_1z_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta$.

Так как процесс $\lambda(t)$ является марковским, то полученные переходные вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{ij}, $i,j=1,2$, позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij}, $i,j=1,2$:

$$
\begin{aligned}
\pi_{11}&=q_{11}(T)p_{11}+q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}=q_{11}(T)p_{12}+q_{12}(T)p_{22}; \\
\pi_{21}&=q_{21}(T)p_{11}+q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}=q_{22}(T)p_{22}+q_{21}(T)p_{12}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$
\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2}\left\{\lambda_1(1-p)(\lambda_2+\alpha)+\alpha\delta\beta-\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]\right\},\\
\pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2}\left\{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]\right\},\\
\pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2}\left\{\alpha\left[\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta\right]+\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]\right\},\\
\pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2}\left\{\lambda_2(\lambda_1+\beta)+p\lambda_1\alpha(1-\delta)-\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Далее, подставляя (9) в (5), находим выражения для $\pi_i(0\,|\,T)$, $i=1,2$:

$$
\begin{aligned}
\pi_1(0\,|\,T) &= \frac{\alpha\left[\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta\right]+\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{\lambda_1\alpha+(p\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\alpha\delta)+\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]},\\
\pi_2(0\,|\,T) &= \frac{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{\lambda_1\alpha+(p\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\alpha\delta)+\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где π_1, π_2 определены в (4).

Подставляя в (1) сначала (3), затем (2), (4) и (10), выполняя при этом достаточно трудоемкие преобразования и учитывая, что $t=\tau-T$, получаем

$$
\begin{aligned}
p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0\le\tau<T,\\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)}+(1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau\ge T,\end{cases}\\
\gamma(T) &= \frac{1}{z_2-z_1}\left[z_2-\lambda_1+(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\pi_2(T)\right],
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_1(T) &= \pi_1+\left[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T},\\
\pi_2(T) &= \pi_2-\left[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где z_i определены в (2); π_i – в (4); $\pi_i(0\,|\,T)$ – в (10), $i=1,2$.

В частности, положив в (12), (11) $T = 0$, получаем формулу для $p(\tau)$, приведенную в [40–42].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1,\tau_2)$

Пусть $\tau_1=T+t^{(1)}$, $\tau_2=T+t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока, при этом $\tau_1=0$ – момент наступления первого события, $\tau_2=0$ – момент наступления второго события. В силу того что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, то в обозначениях раздела 2 совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1,\tau_2)$ принимает вид

$$
p_T(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} 0, \quad 0\le\tau_1<T, \quad 0\le\tau_2<T,\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\pi_i(0\,|\,T)\sum\limits_{j=1}^{2}q_{ij}(T)\sum\limits_{k=1}^{2}\tilde{p}_{jk}(\tau_1-T)\sum\limits_{s=1}^{2}q_{ks}(T)\sum\limits_{n=1}^{2}\tilde{p}_{sn}(\tau_2-T), \quad \tau_1\ge T, \quad \tau_2\ge T,\end{cases}
\tag{13}
$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1-T)=\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2-T)=\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$ определены в (3), при этом в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(t)$, $i,j=1,2$, необходимо произвести замену t на $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$. Тогда, подставляя в (13) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (3), затем $p_{jk}(t^{(1)})$, $p_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (2) для $t=t^{(1)}$ и $t=t^{(2)}$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, определенные в (4), и, наконец, $\pi_i(0\,|\,T)$, $i=1,2$, определенные в (10), и выполняя достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=0,\quad 0\le\tau_1<T,\quad 0\le\tau_2<T,$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)+e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\gamma(T)[1-\gamma(T)]\frac{\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]}{z_1z_2}\times$$
$$\times\left[z_1e^{-z_1(\tau_1-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_1-T)}\right]\left[z_1e^{-z_1(\tau_2-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_2-T)}\right],\ \tau_1\ge T,\quad \tau_2\ge T, \tag{14}$$

где $z_1z_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta$ и $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (11) для $\tau=\tau_k$, $k=1,2$.

Из (14) следует, что модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях неполной наблюдаемости (наличия мертвого времени), в общем случае является коррелированным потоком. Положив в (14) T = 0, получаем формулу для совместной плотности вероятности $p(\tau_1,\tau_2)$, приведенную в [40, 41].

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями потока, дисперсию и ковариацию:

$$M\tau=T+\frac{\gamma(T)}{z_1}+\frac{1-\gamma(T)}{z_2},\ D\tau=2\left[\frac{\gamma(T)}{z_1^{\ 2}}+\frac{1-\gamma(T)}{z_2^{\ 2}}\right]-\left[\frac{\gamma(T)}{z_1}+\frac{1-\gamma(T)}{z_2}\right]^2,$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\lambda_1\gamma(T)[1-\gamma(T)][\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]\frac{(z_2-z_1)^2}{(z_1z_2)^3}.$$

Отдельно стоит отметить, что в рассматриваемом потоке присутствуют события трех типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2; 3) дополнительные события. Типы событий являются неразличимыми. Введем в рассмотрение вероятности $q_1^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 (событие первого типа) и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из первого состояния в i-е ($i=1,2$); $q_2(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 (событие второго типа); $q_3(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть дополнительное событие (событие третьего типа). Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для введенных вероятностей:

$$q_1^{(1)}(T)=\lambda_1(1-p)\frac{\alpha+[(\lambda_2+\alpha\delta)\pi_1-\alpha\delta]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{z_1z_2-\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}},$$

$$q_1^{(2)}(T)=p\lambda_1\frac{\alpha+[(\lambda_2+\alpha\delta)\pi_1-\alpha\delta]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{z_1z_2-\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}},$$

$$q_2(T)=\lambda_2\frac{p\lambda_1+\beta+\lambda_1(1-p-\pi_1)\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{z_1z_2-\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}},$$

$$q_3(T)=\alpha\delta\frac{p\lambda_1+\beta+\lambda_1(1-p-\pi_1)\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{z_1z_2-\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}}.$$

Тогда стационарная вероятность $q_1(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1, запишется в виде

$$q_1(T)=q_1^{(1)}(T)+q_1^{(2)}(T)=\lambda_1\frac{\alpha+[(\lambda_2+\alpha\delta)\pi_1-\alpha\delta]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{z_1z_2-\lambda_1[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}}.$$

Отметим, что $\pi_1(0\,|\,T)=q_1^{(1)}(T)+q_3(T)$, $\pi_2(0\,|\,T)=q_1^{(2)}(T)+q_2(T)$.

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражения (11), (12) для $\gamma(T)$, $\pi_1(T)$, $\pi_2(T)$ и выражение (10) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, можно показать, что

$$\gamma(T)\left[1-\gamma(T)\right]=\frac{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\left[\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta+p\lambda_1(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[(p\lambda_1+\beta)\pi_1(0)-\alpha\pi_2(0)\right]z_1z_2}{(z_2-z_1)^2\left(p\lambda_1+\beta+\alpha\right)^2\left[z_1z_2-\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\mathrm{e}^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]^2}\times$$
$$\times\left\{z_1z_2-\left[2z_1z_2-(p\lambda_1+\beta+\alpha)(z_1+z_2)\right]\mathrm{e}^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}+\left[z_1z_2-(p\lambda_1+\beta+\alpha)(\lambda_1(1-p)+\lambda_2)\right]\mathrm{e}^{-2(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right\}, \quad (15)$$

где $\pi_i(0)$ есть условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии i $(i=1,2)$ при условии, что в этот момент времени событие потока наступило ($\pi_1(0)+\pi_2(0)=1$), и определяется следующими выражениями:

$$\pi_1(0)=\alpha\frac{\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta}{\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta+p\lambda_1(\lambda_2+\alpha\delta)},\quad \pi_2(0)=\frac{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta}{\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta+p\lambda_1(\lambda_2+\alpha\delta)}.$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (15) (обозначим его $f(T)$), после преобразования примет вид

$$f(T)=z_1z_2\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]^2+(p\lambda_1+\beta+\alpha)e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\times\left[z_1+z_2-(\lambda_1(1-p)+\lambda_2)e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]=$$
$$=f_1(T)+f_2(T)=f_1(T)+\varphi_1(T)\varphi_2(T).$$

Нетрудно показать, что для любых $T\ge 0$ имеем $f_1(T)\ge 0$, $\varphi_1(T)>0$ и $\varphi_2(T)>0$ и, следовательно, $f_2(T)>0$. Таким образом, для любых $T\ge 0$ имеем $f(T)>0$. Из (15) вытекает, что:

1) если $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta=0$, то совместная плотность (14) факторизуется: $p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (2) следует, что $z_1=\lambda_1$, $z_2=\lambda_2+\alpha+\beta$; из (11) следует, что $\gamma(T)=1$, и тогда $p_T(\tau_k)=\lambda_1e^{-\lambda_1(\tau_k-T)}$, $\tau_k\ge T$, $k=1,2$, т.е. $p_T(\tau)=\lambda_1e^{-\lambda_1(\tau-T)}$, $\tau\ge T$.

2) если $(p\lambda_1+\beta)\pi_1(0)-\alpha\pi_2(0)=0$, то совместная плотность (14) факторизуется: $p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (2) следует, что $z_1=\lambda_1(1-p+p\delta)+\beta\delta$; из (11) следует, что $\gamma(T)=1$, и тогда $p_T(\tau_k)=z_1e^{-z_1(\tau_k-T)}$, $\tau_k\ge T$, $k=1,2$, т.е. $p_T(\tau)=z_1e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau\ge T$.

Из (14) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1,\tau_2)$: $\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)=0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T)=p;\quad \pi_2(T)=\frac{p\lambda_1+\beta}{p\lambda_1+\beta+\alpha}+\left[p-\frac{p\lambda_1+\beta}{p\lambda_1+\beta+\alpha}\right]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T};\quad p\ne 1.$$

Для $p=1$ из третьего условия факторизации вытекает, что $\delta=0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T)=1;\quad \pi_2(T)=\frac{1}{\lambda_1+\beta+\alpha}\left[\lambda_1+\beta+\alpha e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right].$$

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока t_1, $t_2,\ldots$, t_k, ... есть вложенная цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации либо их комбинаций можно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ для любого *k*. Последнее означает, что для данных ситуаций наблюдаемый поток событий является рекуррентным потоком.

Действительно, пусть $p_T(\tau_1,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей $\tau_1,\ldots,\tau_k,\tau_{k+1}$, где $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $k=1,2,\ldots$. Для $k=2$ имеет место $p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$. Сделаем предположение математической индукции: $p_T(\tau_1,\ldots,\tau_k)=p_T(\tau_1)\ldots p_T(\tau_k)$. Так как моменты наступления событий t_1, $t_2,\ldots$,

t_k, t_{k+1} порождают вложенную цепь Маркова, то поток событий обладает марковским свойством в моменты наступления событий. Тогда $p_T(\tau_1,...,\tau_k,\tau_{k+1}) = p_T(\tau_1,...,\tau_k)p_T(\tau_{k+1} | \tau_1,...,\tau_k) = = p_T(\tau_1,...,\tau_k)p_T(\tau_{k+1} | \tau_k)$, где $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_k,\tau_{k+1}) / p_T(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}), $k = 1,2,...$, местоположение которых на временной оси произвольно, справедливо $p_T(\tau_k,\tau_{k+1}) = p_T(\tau_k)p_T(\tau_{k+1})$, то получаем $p_T(\tau_{k+1} | \tau_k) = p_T(\tau_{k+1})$, что доказывает факторизацию совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1,...,\tau_k,\tau_{k+1})$.

Отметим, что условия факторизации для случая $T = 0$ [40, 41] и $T \neq 0$ идентичны.

Ниже обсуждаются условия рекуррентности, при которых необходимо учитывать результаты, приведенные в [31–33].

Для первого условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность $p_T(\tau)$ экспоненциальная, зависит от предыстории, т.е. от моментов наступления событий $t_1,...,$ t_k наблюдаемого потока. Таким образом, имеется некоторая близость наблюдаемого потока к простейшему. Если к ограничению $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ добавить дополнительное ограничение $\lambda_1(1-p) - \alpha\delta = 0$, то вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не будет зависеть от предыстории, а только от ее значения в момент наступления события наблюдаемого потока t_k, т.е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0) = \alpha\delta / (\lambda_2 + \alpha\delta)$, $k = 1,2,...$, так что здесь имеет место наибольшая близость наблюдаемого потока к простейшему.

Для второго условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность $p_T(\tau)$ экспоненциальная, также зависит от предыстории, т.е. от моментов наступления событий $t_1,...,$ t_k наблюдаемого потока. Таким образом, имеется некоторая близость наблюдаемого потока к простейшему. Для третьего условия факторизации плотность $p_T(\tau)$ определяется формулой (11) и не является экспоненциальной, в связи с этим близости наблюдаемого потока к простейшему не наблюдается.

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценивания неизвестных параметров, задающих модулированный обобщенный полусинхронный поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. Для оценки неизвестных параметров потока можно использовать метод моментов и метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cox D.R.* Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. *Kingman Y.F.C.* On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
3. *Cox D.R., Isham V.* Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
4. *Bremaud P.* Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1981.
5. *Last G., Brandt A.* Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. New York : Springer-Verlag, 1995.
6. *Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A.* Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
7. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
8. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. *Lucantoni D.M., Neuts M.F.* Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
10. *Breuer L.* An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure // Annals of Operations Research. 2002. V. 112. P. 123–138.
11. *Telek M., Horvath G.* A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 1153–1168.

12. *Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S.* Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. P. 1326–1339.
13. *Horvath A., Horvath G., Telek M.* A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues // Performance Evaluation. 2010. V. 67. P. 759–788.
14. *Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
15. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
16. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 24–29.
17. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, Issue 3. P. 283–290.
18. *Горцев А.М., Ниссенбаум О.В.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
19. *Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И.* Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
20. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
21. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
22. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
23. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
24. *Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A.* Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
25. *Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N.* Modelling the mean of a doubly stochastic poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
26. *Centanni S., Minozzo M.* A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.
27. *Dubois J.-P.* Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004. 2004. P. 116–119.
28. *Hossain M.M., Lawson A.B.* Approximate methods in Bayesian point process spatial models // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
29. *Лившиц К.И., Бублик Я.С.* Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 91–101.
30. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovev A.A.* Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
31. *Бахолдина М.А.* Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
32. *Бахолдина М.А., Горцев А.М.* Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.
33. *Bakholdina M.A., Gortsev A.M.* Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
34. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
35. *Васильева Л.А., Горцев А.М.* Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С 179–184.
36. *Горцев А.М., Завгородняя М.Е.* Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
37. *Горцев А.М., Климов И.С.* Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
38. *Normey-Rico J.E.* Control of dead-time processes. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, 2007.
39. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.

40. *Bakholdina M., Gortsev A.* Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
41. *Бахолдина М.А., Горцев А.М.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и условия его рекуррентности // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. им. А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2014. Ч. 2. С. 137–143.
42. *Бахолдина М.А., Горцев А.М.* Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Междунар. науч. конф., посв. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева. Минск, 23–26 фев. 2015 г. / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. Минск : РИВШ, 2015. С. 17–22.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 1 февраля 2014 г.

Bakholdina Maria A. (Tomsk state university, Russian Federation).

Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time and flow recurrence conditions.

Keywords: modulated semi-synchronous integrated flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); constant dead time; probability density; joint probability density; flow recurrence conditions.

DOI 10.17223/19988605/31/1

In this paper, we consider the modulated semi-synchronous integrated flow of events, which is one of the mathematical models for an incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the state 1 $\lambda(t)=\lambda_1$ and in the state 2 $\lambda(t)=\lambda_2$ $(\lambda_1>\lambda_2\ge 0)$. The duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first (second) state is distributed according to the exponential law with parameter β (α). During the time interval when $\lambda(t)=\lambda_i$, a Poisson flow of events with intensity λ_i, $i=1,2$, arrives. Also, at any moment of an event occurrence in state 1 of the process $\lambda(t)$, the process can change its state to state 2 with the probability p $(0\le p\le 1)$ or continue to stay in state 1 with the complementary probability $1-p$. I.e., after an event occurrence the process $\lambda(t)$ can change or not change its state from state 1 to state 2. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 2 to state 1 at the moment of an event occurring in the second state is impossible. At the moment when the state changes from the second to the first state, an additional event is assumed to be initiated with probability δ $(0\le\delta\le 1)$.

The registration of the flow events is considered in condition of a constant dead time (of incomplete observability). The dead time period of a constant duration *T* begins after every registered at the moment t_k, $k\ge 1$, event. During this period, no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of dead time of duration *T* and so on.

Then, we obtain explicitly the expressions for the probability density $p_T(\tau)$, $\tau\ge 0$, and joint probability density $p_T(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$, of the intervals length between neighboring flow events:

$$p_T(\tau)=\begin{cases}0, & 0\le\tau<T,\\ \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)}+(1-\gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau\ge T,\end{cases}$$

$$\gamma(T)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[z_2-\lambda_1+(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\pi_2(T)\right],\quad \pi_2(T)=\pi_2-\left[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T},$$

$$\pi_2(0\,|\,T)=\frac{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]}{\lambda_1\alpha+(p\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\alpha\delta)+\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\right]},\quad \pi_2=\frac{p\lambda_1+\beta}{p\lambda_1+\beta+\alpha},$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}\right),\quad 0<z_1<z_2.$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=0,\quad 0\le\tau_1<T,\quad 0\le\tau_2<T,$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)+e^{-(p\lambda_1+\beta+\alpha)T}\gamma(T)\left[1-\gamma(T)\right]\frac{\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]}{z_1z_2}\left[z_1e^{-z_1(\tau_1-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_1-T)}\right]\times$$
$$\times\left[z_1e^{-z_1(\tau_2-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_2-T)}\right],\ \tau_1\ge T,\quad \tau_2\ge T.$$

The recurrence conditions of the observable flow of events are found.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. 17. pp. 129-164.
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Phylosophical Society*. 60 (4). pp. 923-930.
3. Cox, D.R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
4. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
5. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
6. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication net-works for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73.
7. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
10. Breuer, L. (2002) An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure. *Annals of Operations Research*. 112. pp. 123-138. DOI: 10.1023/A:1020981005544
11. Telek, M. & Horvath, G. (2007) A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method. *Performance Evaluation*. 64. pp. 1153-1168. DOI: 10.1016/j.peva.2007.06.001
12. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 17. pp. 1326-1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
13. Horvath, A., Horvath, G. & Telek, M. (2010) A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues. *Performance Evaluation*. 67. pp. 759–788. DOI: 10.1109/QEST.2008.26
14. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69 (9). pp. 1517–1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a synchronous alternating flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. Appendix. pp. 232-239.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. Appendix. pp. 24-29.
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21 (3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
18. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 10. pp. 35–49. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y
19. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) States estimation of the MC flow of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46 (6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
21. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous doubly stochastic flow of events in condition of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13 (1). pp. 31-41. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23. (In Russian).
23. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) On relationship ofMC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21.
24. Adamu, A., Gaidamaka Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science*. Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. St. Petersburg, Russia. 23rd to 25th August. pp. 428-439.
25. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*. 50(10). pp. 2655-2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
26. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*. 101. pp. 1582-1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
27. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes. *Proceedings of the International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. pp. 116-119.
28. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1016/j.csda.2008.05.017

29. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2012) Distribution of the conditional time to ruin of an insurance companyunder double stochastic insurance premium and insurance payment flows. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 91-101. (In Russian).
30. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73 (8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
31. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal estimation of the states of modulated semi-syncronous integrated flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
32. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal estimation of the states of modulated semi-syncronous integrated flow of events in condition of a constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13–24.
33. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9 (29). pp. 1433-1451.
34. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti «mertvogo vremeni» i intensivnostey sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Estimation of the dead time period and intensity of synchronous doubly stochastic flow of events]. *Radiotekhnika*. 10. pp. 8-16.
35. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 3. pp 179-184. DOI: 10.1023/A:1014718921138
36. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Estimation of the parameters of a partially observed alternating flow of events]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10 (3). pp. 273–280.
37. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3-7.
38. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes*. London: Springer-Verlag.
39. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2010) Optimal states estimation of integrated semi-syncronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
40. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
41. Bakholdina, M.A. & Gortsev A.M. (2014) [Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2014)* [Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2014)]. Proc. of the 13th International Scientific and Practical Conference. Tomsk. 20th to 22nd November. Tomsk: Tomsk State University. pp. 137-143. (In Russian).
42. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density of the interval length between neighboring events of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of the International Scientific Conference. Minsk. 23rd to 26th February. Minsk: RIVSh. pp. 17-22. (In Russian).