ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (31)

УДК 519.872
DOI 10.17223/19988605/31/3

Л.А. Задиранова, С.П. Моисеева

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ MMPP|M|∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Рассматривается система массового обслуживания MMPP|M∞ с повторными обращениями в систему. Найдены аналитические выражения для первого и второго моментов числа повторных обращений в систему за время t, а также асимптотическая характеристическая функция.
Ключевые слова: система массового обслуживания; марковский модулированный поток; метод асимптотического анализа.

В качестве математических моделей социально-экономических и сложных технических систем, в том числе телекоммуникационных систем и систем облачных вычислений, часто используют системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов. Исследование таких систем с пуассоновским входящим и произвольным временем обслуживания можно встретить в работах В.В. Рыкова, П.П. Бочарова, А.В. Печинкина и других авторов [1–4].

Однако применение пуассоновского потока для расчета характеристик качества обслуживания в реальных системах дает большую погрешность. Доказательство адекватности применения марковского модулированного пуассоновского потока для описания информационных потоков в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах приведено в исследованиях W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, V. Paxson, C. Lindemann, M. Lohmann и др. [5, 6].

Основными методами исследования СМО с неограниченным числом приборов, как правило, являются метод вложенных цепей Маркова и метод дополнительной переменной. В последнее время также развиваются матрично-аналитические методы [3, 7–11]. В случаях, когда не удается найти характеристики системы в явном виде, применяют асимптотические методы [12–18].

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями, которые применяются для описания математических моделей, например, страховых или торговых компаний [19]. Кроме того, подобные системы предлагаются в качестве математических моделей распределительных вычислительных сетей [20].

Для аналогичных систем с произвольным временем обслуживания в работе [19] предложен метод предельной декомпозиции, позволяющий свести исследование бесконечно линейной системы массового обслуживания к исследованию совокупности однолинейных систем. К сожалению, данный метод не удается применить для исследования систем с непуассоновским входящим потоком [21].

Данная статья посвящена исследованию потока обращений в системе с повторным обслуживанием заявок и входящим марковским модулированным потоком (MMPP). С помощью метода начальных моментов найдены точные выражение для основных вероятностных характеристик числа повторных обращений в систему. Кроме того, предложено развитие метода асимптотического анализа для исследования потока повторных обращений при условии растущего времени обслуживания заявок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t)$ = 1, 2, …, K, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \left\| q_{ij} \right\|$, i, j = 1, 2, …, K, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ [13].

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором с вероятностью $1 - r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания. Ставится задача исследования потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ повторным обращением.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $n(t)$ – число повторных заявок, обратившихся за время t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t), n(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать трехмерную цепь Маркова $\{k(t), i(t), n(t)\}$.

Для распределения вероятностей $P(k,i,n,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(k,i,n,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,i,n,t) - i\mu P(k,i,n,t) + \lambda_k P(k,i-1,n,t) + \mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,n,t) +$$
$$+\mu irP(k,i,n-1,t) + \sum P(\nu,i,n,t)q_{\nu k}, \; k,\nu = 1, 2, \ldots, K, \; i,n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (1)$$

Введем частичные характеристические функции [23] вида

$$H(k,u,w,t) = \sum_i \sum_n e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial u} = j\sum_i \sum_n i e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t),$$
$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial w} = j\sum_i \sum_n n e^{jui} e^{jwn} P(k,i,n,t),$$

из (1) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial t} + \mu j \frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial u}(-1 + (1-r)e^{-ju} + re^{jw}) =$$
$$= H(k,u,w,t)[\lambda_k(e^{ju} - 1)] + \sum H(\nu,u,w,t)q_{\nu k}.$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t} + j\mu(re^{jw} - 1 + (1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u,w,t)[(e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{H}(u,w,t) = [H(1,u,w,t), H(2,u,w,t), \ldots, H(K,u,w,t)],$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & . & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2K} \\ . & . & . & . \\ q_{K1} & q_{K2} & . & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

2. Нахождение начальных моментов числа повторных обращений

Для нахождения основных вероятностных характеристик процесса, характеризующего среднее число повторных обращений в исследуемую систему за время t, будем использовать дифференциально-матричное уравнение (2).

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. Среднее число занятых приборов при нестационарном режиме функционирования системы MMPP|M|∞ с повторными обслуживанием определяется выражением

$$M\{i(t)\}=\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{\mu(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t}).$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2) по переменной u:

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t\partial u}-j^2\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2}=\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}]+je^{ju}\mathbf{H}(u,w,t)\mathbf{\Lambda}.$$

Полагая в данном равенстве $u = w = 0$ и обозначив

$$\left.\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\w=0}}=j\mathbf{ms}_1(t),$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\mathbf{ms}_1(t)}{\partial t}+\mu(1-r)\mathbf{ms}_1(t)=\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{Q}+\mathbf{R\Lambda},$$

где $\mathbf{R}=\mathbf{H}(0)$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{RQ}=0$ и удовлетворяющий условию нормировки $\mathbf{RE}=1$.

Суммируя обе части полученной системы, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}}{\partial t}+\mu(1-r)\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}=\mathbf{R\Lambda E},$$

решая которое, имеем

$$\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}=\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{\mu(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t}).$$

Тогда среднее число занятых приборов в системе определяется выражением

$$M\{i(t)\}=\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}=\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{\mu(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t}).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Математическое ожидание числа повторных обращений при нестационарном функционировании системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием за время наблюдений t определяется выражением

$$M\{n(t)\}=rt\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t}).$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2) по переменной w:

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t\partial w}+j^2r\mu e^{jw}\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u\partial w}=\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}]. \quad (3)$$

Полагая $u = w = 0$ и обозначив

$$\left.\frac{\partial\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}\right|_{\substack{u=0\\w=0}}=j\mathbf{mp}_1(t),$$

из (3) получаем следующую систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial\mathbf{mp}_1(t)}{\partial t}+j^2r\mu\mathbf{ms}_1(t)=\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{Q}. \quad (4)$$

Умножая обе части системы (4) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ 1,\ ...,\ 1]^T$, получаем уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{mp}_1(t)}{\partial t}\mathbf{E}-r\mu\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}=0. \quad (5)$$

Решая уравнение (5), получаем

$$\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=r\mu\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}t,$$

где $\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}=\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{\mu(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t})$ – среднее число занятых приборов в системе, полученное выше. Тогда первый момент числа повторных обращений в систему за время t имеет вид

$$M\{n(t)\}=\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=r\mu\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}t=rt\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}(1-e^{-\mu(1-r)t}).$$

Теорема доказана.

Нетрудно показать, что при стационарном функционировании системы среднее число повторных обращений определяется выражением

$$M\{n(t)\}=rt\frac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}.$$

Теорема 2. Смешанный момент числа занятых приборов и повторных обращений при стационарном функционировании системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием определяется выражением

$$M\{i(t)\cdot n(t)\}=\frac{1}{\mu(1-r)}\left(1-e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E\Lambda}+r\mu\mathbf{ms}_2\mathbf{E}\right),$$

где $\mathbf{ms}_2\mathbf{E}=\mathbf{R\Lambda}\{(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}(2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}-\mathbf{I})\}(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{E}$, $\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{E}=rt\dfrac{\mathbf{R\Lambda E}}{(1-r)}$ – соответственно второй момент числа занятых приборов и среднее число повторных обращений за время t при стационаром функционировании системы.

Доказательство. Для нахождения смешанного момента числа занятых приборов и повторных обращений в систему продифференцируем выражение (2) по u и по w дважды:

$$\frac{\partial^3\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t\partial w\partial u}+j^2r\mu e^{jw}\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2}-j^2\mu(1-r)e^{-ju}\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u\partial w}+j\mu(re^{jw}-1+(1-r)e^{-ju})\frac{\partial^3\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2\partial w}=$$

$$=\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u\partial w}[(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}]+je^{ju}\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}\mathbf{\Lambda}.$$

Полагая $u=w=0$, ведем обозначения

$$\left.\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w^2}\right|_{\substack{u=0\\w=0}}=j^2\mathbf{mp}_2(t),\quad \left.\frac{\partial^2\mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u^2}\right|_{\substack{u=0\\w=0}}=j\mathbf{ms}_2,$$

учитывая которые, имеем

$$\frac{\partial\mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t}+j^2r\mu\mathbf{ms}_2-j^2\mu(1-r)\mathbf{m}_{12}(t)=\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{Q}+\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{\Lambda}. \tag{6}$$

Умножая обе части системы (6) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ 1,\ \ldots,\ 1]^{\mathrm{T}}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{m}_{12}(t)}{\partial t}\mathbf{E}-r\mu\mathbf{ms}_2\mathbf{E}+\mu(1-r)\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}=\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{\Lambda E},$$

где $M\{i^2(t)\}=\mathbf{ms}_2\mathbf{E}=\mathbf{R\Lambda}\{(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}(2\mathbf{\Lambda}+\mu(1-r)\mathbf{I}-\mathbf{I})\}(\mathbf{Q}-\mu(1-r)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{E}$ – второй момент числа занятых приборов при стационарном функционировании системы, который был получен в работе [22]; $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальном условии $\mathbf{m}_{12}(0)=0$, имеем

$$\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}=\frac{1}{\mu(1-r)}\left(1-e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{\Lambda E}+r\mu\mathbf{ms}_2\mathbf{E}\right).$$

Следовательно, смешанный момент числа занятых приборов и повторных обращений в систему имеет вид

$$M\{i(t)\cdot n(t)\}=\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}=\frac{1}{\mu(1-r)}\left(1-e^{-\mu(1-r)t}\right)\left(\mathbf{mp}_1(t)\mathbf{\Lambda E}+r\mu\mathbf{ms}_2\mathbf{E}\right).$$

Теорема доказана.

Результаты теорем 1–2 позволяют сформулировать следующую теорему, доказательство которой проводится аналогично.

Теорема 3. Второй момент числа повторных обращений при стационарном функционировании системы MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием определяется выражением

$$M\{n^2(t)\}=r\mu[\mathbf{ms}_1(t)\mathbf{E}+2\mathbf{m}_{12}(t)\mathbf{E}]t.$$

3. Метод асимптотического анализа

Для более полного исследования применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [14].

Найдем асимптотическую характеристическую функцию числа повторных обращений в системе MMPP|M|∞ за время t в условии растущего времени.

Обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ \mathbf{H}(u,w,t)=\mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon). \tag{7}$$

Перепишем (2) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)}{\partial t}+j(re^{jw}-1+(1-r)e^{-j\varepsilon y})\frac{\partial\mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)}{\partial y}=\mathbf{F}(y,w,t,\varepsilon)\Big[\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{Q}\Big]. \tag{8}$$

Теорема 4. Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon\to 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}(y,w,t)$ решения $\mathbf{F}(y, w, t, \varepsilon)$ уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E}=\exp\left\{r\kappa t(e^{jw}-1)+jy\kappa\right\}, \tag{9}$$

где $\kappa=\frac{1}{1-r}\mathbf{R\Lambda E}$.

Доказательство. Суммируя все уравнения полученной системы (8) и выполняя предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,w,t)}{\partial t}\mathbf{E}+jr(e^{jw}-1)\frac{\partial\mathbf{F}(y,w,t)}{\partial y}\mathbf{E}=0, \tag{10}$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E}=\varphi\left(t+\frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция.

Так как число обслуженных заявок за интервал нулевой длины с вероятностью единица равно нулю, то начальное условие для определения вида функции $\varphi(y)$ имеет вид

$$\mathbf{F}(y,w,0)\mathbf{E}=\Phi(y), \tag{11}$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции распределения числа занятых приборов в системе в условии растущего времени обслуживания заявок, вид которого был получен в работе [22].

$$\Phi(y)=\exp\{jy\kappa\},$$

где $\kappa=\frac{1}{1-r}\mathbf{R\Lambda E}$.

Таким образом, решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию (11),

$$\mathbf{F}(y,w,t)\mathbf{E}=\exp\left\{r\kappa t(e^{jw}-1)+jy\kappa\right\},$$

которое совпадает с равенством (9), что доказывает теорему.

Полагая в (9) y = 0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему за время t для повторного обслуживания, в условии растущего времени обслуживания:

$$h(w,t)=M\{e^{jwn(t)}\}=\mathbf{H}(0,w,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,w,t,\varepsilon)\mathbf{E}\approx\mathbf{F}(0,w,t)\mathbf{E}=\exp\left\{r\kappa t(e^{jw}-1)\right\}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что поток обращений в рассматриваемой системе в условии растущего времени обслуживания и наблюдений имеет распределение Пуассона.

4. Область применения асимптотических результатов

Исследуем область применимости метода асимптотического анализа. Так как выражения для моментов первого порядка числа повторных обращений, полученные асимптотическим и аналитическим методами, совпадают, то используем для сравнения значения дисперсий.

Пример 1. Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток MMPP, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}$. Заявка, поступившая в систему, занимает любой свободный прибор, на котором обслуживается в течение случайного времени, распределенного согласно экспоненциальному закону с параметром $\mu = 0,1$. Время наблюдения за экспериментом $t = 5$. Используя заданные параметры, имеем результат, приведенный в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 5$

Дисперсия *D* \ Вероятность возврата *r*	0,05	0,01	0,005	0,002
Асимптотические результаты	0,1974	0,0379	0,0188	0,0075
Аналитические результаты	0,2610	0,0402	0,0194	0,0076
Относительная погрешность Δ	0,2437	0,0572	0,0309	0,0132

Пример 2. Рассмотрим аналогичный пример с параметрами

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix},\ \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix},\ t = 25,\ \mu = 0,1.$$

Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 25$

Дисперсия *D* \ Вероятность возврата *r*	0,01	0,005	0,002	0,001
Асимптотические результаты	0,1894	0,0942	0,0376	0,0188
Аналитические результаты	0,2574	0,1110	0,0402	0,0194
Относительная погрешность Δ	0,2642	0,1514	0,0647	0,0309

Пример 3. Используем следующие значения параметров:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix},\ \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix},\ t = 50,\ \mu = 0,1.$$

Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $t = 50$

Дисперсия *D* \ Вероятность возврата *r*	0,01	0,005	0,001	0,0005
Асимптотические результаты	0,3789	0,1884	0,0375	0,0188
Аналитические результаты	0,6209	0,2483	0,0399	0,0194
Относительная погрешность Δ	0,3898	0,2412	0,0602	0,0309

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что на асимптотические результаты влияет как величина периода наблюдения t, так и вероятность r возвращения заявки в систему. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации, равную значению 0,03, можно считать, что допустимо применение асимптотических результатов при $r \cdot t < 0{,}025$.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания заявок в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием, определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число повторных обращений и асимптотическое приближение характеристической функции потока в рассматриваемой системе, определена область применимости полученных результатов и проиллюстрирована тремя примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кёнинг Д., Рыков В., Штоян Д.* Теория массового обслуживания. М. : Московский институт нефтехимической и газовой промышленности, 1979. 112 с.
2. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. М. : Изд-во РУДН, 1995. 520 с.
3. *Parulekar M., Makowski A.M.* Tail probabilities for M/G/∞ input processes (I): Preliminary asymptotics // Queueing Systems. 1997. V. 27, Issue 3–4. P. 271-296.
4. *Baltzer J.C.* On the fluid limit of the M/G/∞ queue // Queueing systems: Theory and applications. August 2007. V. 56, Issue 3–4. P. 255–265.
5. *Leland W.E., Willinger W., Taqqu M.S., Wilson D.V.* On the self-similar nature of Ethernet traffic // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 1995. V. 25. P. 202-213.
6. *Klemm A., Lindemann C., Lohmann M.* Modeling I.P. Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extendend version) // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 149–173.
7. *Baum D.* The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the international conference “Probabilistic analysis of rare events”. Riga, Latvia, 1999. P. 136–142.
8. B*reuer L., Baum D.* The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue // Proceedings 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001). Aachen, Germany, 2001. P. 209–223.
9. *Jayawardene A.K., Kella O.* M/G/∞ with alternating renewal breakdowns // Queueing Systems. 1996. V. 22, Issue 1–2. P. 79–95.
10. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2005. С. 228.
11. *Фёдорова Е.А.* Вычисление моментов в RQ-системе MMPP|M|1 // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 4 (29). С. 41–50.
12. *Iglegart D.L.* Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem // J. Appl. Prob. 1965. V. 2. P. 429–441.
13. *Reynolds J.F.* Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue // Oper. Res. 1968. V. 16. 186 p.
14. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
15. *Назаров А.А., Семенова И.А.* Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 85–96.
16. *Судыко Е.А., Назаров А.А.* Исследование математической модели сети случайного доступа методом асимптотических семиинвариантов третьего порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 52–64.
17. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
18. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Исследование системы массового обслуживания HIGI|GI|∞ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 75–83.
19. *Моисеева С.П., Захорольная И.А.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. 2011. Т. 47, № 6. С. 51–58.
20. *Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А.* Исследование потоков в системе M|GI|∞ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–66.
21. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 75 с.
22. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 53–62.
23. *Artalejo J.R., Gómez-Corral A.* Retrial queueing systems: A computational approach. Springer, Berlin. 2008. 318 p.

Задиранова Любовь Александровна. E-mail: zhidkovala@mail.ru
Моисеева Светлана Петровна, канд. техн. наук. E-mail: smoiseeva@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 30 марта 2015 г.

Zadiranova Lyubov A., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University, Russian Federation)
Asymptotic analysis of the flow of repeated requests in system MMPP|M|∞ with repeated requests.
Keywords: Queueing system with repeated requests; Markov modulated process, method of asymptotic analysis; a flow of repeated requests.

DOI 10.17223/19988605/31/3

In this article, the Queueing system with unlimited number of facility is considered. The Markov modulated process, controlled by the Markov chain $k(t)$ with infinitesimal generator $Q = \|q_{ij}\|$, enters into the input of such system.

Every customer comes into any of the vacant server, where he is served during a stochastic time distributed according to the exponential law with the parameter μ. After service, the customer leaves the system with probability r–1, and with probability r the customer comes back in it for repeated service

The problem is to study the flow of repeated requests to the system during the time t. Using the method of initial moments, analytical expressions are found for the first and the second moments of the number of repeated requests to the system during the time t.

For more detailed research of this process, the method of asymptotic analysis is proposed in a condition of a growing service time. It is shown that asymptotic characteristic function of a number of repeated requests into the system during the time t has the Poisson distribution with the following parameters:

$$a = M\{i(t)\} = r\kappa t,$$

$$\sigma^2 = M\{(i(t)-a)^2\} = r\kappa t,$$

where κ is defined as

$$\kappa = \frac{1}{1-r}\mathbf{R\Lambda E},$$

$\mathbf{E}$ is an unit column vector, and the row vector $\mathbf{R}$ is determined by the system $\begin{cases}\mathbf{RQ} = 0\\ \mathbf{RE} = 1\end{cases}$.

On the basis of numerical experiments, the range of applicability of the asymptotic algorithm is determined. Also, it is shown that there is an influence on asymptotic results both the probability of return to the system and the value of the observation period t.

REFERENCES

1. Kening, D., Rykov, V. & Stoyan, D. (1979) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Moscow Institute of Oil and Gas.
2. Bocharov, P.P. & Pechinkin, A.V. (1995) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Russian University of Peoples' Friendship.
3. Parulekar, M. & Makowski, A.M. (1997) Tail probabilities for M/G/∞ input processes (I): Preliminary asymptotics. *Queueing Systems*. 27 (3–4). pp. 271-296. DOI: 10.1023/A:1019122400632
4. Friker, C. & Raouf Jaibi, M. (2007) On the fluid limit of the M/G/∞ queue. *Queueing systems: Theory and applications*. 56 (3–4). pp. 255-265. DOI: 10.1007/s11134-007-9041-x
5. Leland, W.E., Willinger, W., Taqqu, M.S. & Wilson, D.V. (1995) On the self-similar nature of Ethernet traffic. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review.* 25. pp. 202-213. DOI: 10.1145/205447.205464
6. Klemm, A., Lindemann, C. & Lohmann M. (2003) Modeling I.P. Traffic Using the Batch Markovian Arrival Process (extendend version). *Performance Evaluation*. 54. pp. 149-173. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00067-1
7. Baum, D. (1999) The infinite server queue with Markov additive arrivals in space. *Probabilistic analysis of rare events*. *Proc. of the International Conference*. Riga. pp. 136-142.
8. Breuer, L. & Baum, D. (2001) The Inhomogeneous BMAP/G/infinity queue. *Proc.of the 11th GI/ITG Conference on measuring, modelling and evaluation of computer and communication systems (MMB 2001)*. Aachen. pp. 209-223.
9. Jayawardene, A.K. & Kella O. (1996) M/G/∞ with alternating renewal breakdowns. *Queueing Systems*. 22 (1-2). pp. 79-95. DOI: 10.1007/BF01159394
10. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2005) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Tomsk: NTL.
11. Fedorova, E.A. (2014) Calculation of moments in retrial queueing system MMPP|M|1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (29). pp. 41-50. (In Russian).
12. Iglehart, D.L. (1965) Limit diffusion approximations for the many server queue and the repairman problem. *Journal of Applied Probability*. 2. pp. 429-441. DOI: 10.2307/3212203
13. Reynolds, J.F. (1968) Some results for the bulk-arrival infinite-server Poisson queue. *Operation Research*. 16. 186 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/opre.16.1.186

14. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analyze on Queueing Theory]. Tomsk: NTL.
15. Nazarov, A.A. & Semenova, I.A. (2010) Analysis of the RQ-systems by the asymptotic semi invariants methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3 (12). pp. 85-96. (In Russian).
16. Sudyko, E.A. & Nazarov A.A. (2009) Investigation of mathematical model of the network random access by method of asymptotic semi-invariants of the third order. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). pp. 52-64. (In Russian).
17. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2013) Mathematical model of consumer traffic in two – commoditty commercial company in the form of queueing system with repeated block access. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 322 (6). pp. 5-9. (In Russian).
18. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2013) Investigation of the queueing system HIGI|GI|∞. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (23). pp. 75-83. (In Russian).
19. Moiseeva, S.P. & Zakhorol'naya, I.A. (2011) Mathematical model of parallel retrial queueing of multiple requests. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47 (6). pp. 51-58. DOI: 10.3103/S8756699011060276
20. Moiseeva, S.P., Ananina, I.A. & Nazarov, A.A. (2009) Research of streams in system M|GI|∞ with repeated references the method of limiting decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3 (8). pp. 56-66. (In Russian).
21. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queuing systems with correlated streams]. Minsk: BGU.
22. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2014) Investigation of the queueing system MMPP|M|∞ with repeated service. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 53-62. (In Russian).
23. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial queueing systems: A computational approach*. Berlin: Springer.