ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (31)

УДК 519.218.72
DOI 10.17223/19988605/31/7

**Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, О.В. Грамотина**

# СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК

В работе получены эффективные условия, при которых многоканальную систему массового обслуживания можно аппроксимировать моделью бесконечно канальной системы, в последнее время часто используемой при моделировании компьютерных сетей. Эти условия основываются на предельной теореме для процесса, описывающего число занятых каналов в бесконечно канальной системе, «моментном» условии Колмогорова–Ченцова и других теоретических результатах.
**Ключевые слова:** многоканальная и бесконечно канальная системы массового обслуживания; винеровский процесс; число занятых каналов.

В последние годы у специалистов по моделированию компьютерных сетей появился большой интерес к использованию систем массового обслуживания с бесконечным числом каналов (см., например, [1]). Этот интерес во многом обусловлен удобством расчета таких систем из-за отсутствия в них очереди и вытекающей отсюда возможности заявкам независимо перемещаться по системе. Однако реальные компьютерные сети содержат конечное число каналов, и потому необходимо обосновывать использование систем с бесконечным числом каналов к их моделированию.

В настоящей работе устанавливаются условия, при которых объединение $n$ одноканальных систем массового обслуживания в многоканальную приводит при $n \to \infty$ к исчезновению очереди (в некотором вероятностном смысле). Эти условия основываются на предельной теореме о сходимости числа занятых каналов в многоканальной системе к числу занятых каналов в системе с бесконечным числом каналов [2] и на предельной теореме о сходимости специальным образом нормированного случайного процесса, описывающего число заявок, пришедших в систему до момента $t$, к некоторому предельному [3], чаще всего винеровскому, процессу. При получении результатов работы использовались «моментное» условие Колмогорова–Ченцова [4], оценка вероятности превышения высокого уровня гауссовским процессом [5] и принцип инвариантности Донскера–Прохорова [6].

В качестве исходной одноканальной системы берется система с пуассоновским или детерминированным входным потоком и групповым поступлением заявок, в том числе система с повторным обслуживанием заявок, особенно часто встречающаяся в приложениях [7].

## 1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим схему серий, в которой характеристики $n$-канальной системы массового обслуживания определяются параметром $n \to \infty$, характеризующим устремляющуюся в бесконечность интенсивность входного потока. Обозначим $e_n(t)$ – количество заявок входного потока, пришедших до момента $t$ включительно, $e_n(0)=0$, $Me_n(t)=nm(t)$, где $m(t)$ – неубывающая функция. Пусть $q_n(t)$ – количество занятых каналов в системе в момент $t$, $q_n(0)=0$; $\tau_j$ – время обслуживания $j$-й заявки, причем $\tau_j$, $j \ge 1$, – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(t)\,(\overline{F}=1-F)$, имеющей непрерывную и ограниченную числом $\overline{f}$ плотность.

**Теорема 1.** Пусть при некоторых $T>0, \sigma>0$ выполняются следующие условия:

1. Последовательность случайных процессов $x_n(t)=\dfrac{e_n(t)-nm(t)}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$ $C$ – сходится на $[0,T]$ к стандартному винеровскому процессу $\xi(t)$, умноженному на $\sigma$.

2. Справедливо неравенство $\int\limits_0^T \overline{F}(t)dm(t)<1.$ Тогда $P\left(\sup\limits_{0\le t\le T} q_n(t)=n\right)\to 0,\ n\to\infty.$

***Доказательство.*** В силу сделанных предположений из [2, гл. II, § 1, теорема 1] следует, что процесс $z_n(t)=\dfrac{q_n(t)-nQ(t)}{\max(\sigma,1)\sqrt{n}}$, где $Q(t)=\int\limits_0^t \overline{F}(u)dm(u)$, при $n\to\infty$ $C$ – сходится к процессу

$$\zeta(t)=\sigma\int\limits_0^e \overline{F}(t-u)d\xi(u)+K\Theta(t),\ 0\le t\le T,$$

где $\Theta(t)$ – центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$ с ковариационной функцией $R(t,t+u)=\int\limits_0^t \overline{F}(v+u)F(v)dm(v).$ Тогда при $0\le t\le t+u\le T$ имеем

$$\varepsilon^2(t,t+u)=M(\varsigma(t)-\varsigma(t+u))^2=K^2\left(R(t,t)+R(t+u,t+u)-2R(t,t+u)\right)+$$
$$+\sigma^2 M\left[\int\limits_0^t \overline{F}(t-u)d\xi(u)-\int\limits_0^{t+u}\overline{F}(t+u-v)d\xi(v)\right]\le uC,\ C=(\sigma^2+K^2a)(2T\overline{f}+1).$$

Следовательно, минимальное число $N(r)$ шаров радиуса $r$ в метрическом пространстве $([0,T],\varepsilon)$, покрывающих отрезок $[0,T]$ (здесь $\varepsilon(t,t+u)$ – полуметрика на $[0,T]$), удовлетворяет неравенству $N(r)\le\max(1,TCr^{-2})$, и значит, построенный по относительной энтропии $\ln N(r)$ интеграл Дадли $\Psi(T)=\int\limits_0^T(\ln N(r))^{1/2}dr<\infty.$ Тогда из [5] $P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}\varsigma(t)>u\right)\to 0,\ u\to\infty.$

Так как $\dfrac{n}{\sqrt{n}}\to\infty$ при $n\to\infty$, то $P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}\zeta(t)\ge\dfrac{(1-Q(v))n}{\max(\sigma,1)\sqrt{n}}\right)\to 0.$ Из С-сходимости случайного процесса $z_n(t)$ к случайному процессу $\zeta(t)$ при $n\to\infty$ следует, что

$$P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}q_n(t)=n\right)=P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}q_n(t)\ge n\right)\le P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}z_n(t)\ge\frac{(1-Q(v))n}{\max(\sigma,1)\sqrt{n}}\right)\to 0.$$

**Замечание 1.** Утверждение теоремы 1 означает сходимость к нулю виртуального времени ожидания в $n$-канальной системе на отрезке времени $[0,T]$ и, значит, характеризует исчезновение очереди при объединении $n$ одноканальных систем, $n\to\infty$.

## 2. Основные результаты

Пусть $0\le t_1\le t_2\le\ldots$ – пуассоновский поток точек; $N(t)=\max(i:t_i\le t),\ t\ge 0,$ – пуассоновский процесс интенсивности $a>0$. Предположим, что $\eta_1,\eta_2,\ldots$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины с неотрицательными целочисленными значениями, $M\eta_1=f_1,\ D\eta_1=f_2<\infty,$ и рассмотрим обобщенный пуассоновский процесс $S(t)=\sum\limits_{k=1}^{N(t)}\eta_k$. Процесс $S(t)$ описывает поступление $\eta_k$ заявок в момент $t_k,\ k\ge 1,$ тогда входной поток в $n$-канальную систему массового обслуживания определяется равенством $e_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k(t),$ где $S_1(t),\ldots,S_n(t)$ – независимые копии случайного процесса $S(t)$.

**Теорема 2.** Если при некотором $T>0$ выполнено условие 2 теоремы 1, то справедливо соотношение $P\left(\sup\limits_{0\le t\le T}q_n(t)=n\right)\to 0,\ n\to\infty.$

***Доказательство.*** Из первого и второго тождеств Вальда следуют равенства

$$M\sum_{k=1}^{n} S_k(t) = af_1nt,\ D\sum_{k=1}^{n} S_k(t) = af_2nt. \tag{1}$$

В силу равенств (1), независимости приращений процесса $S(t)$ на непересекающихся интервалах и многомерной центральной предельной теоремы получаем, что конечномерные распределения процесса $x_n(t) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S_k(t) - af_1nt}{\sqrt{n}}$ сходятся к конечномерным распределениям винеровского процесса $\sigma\xi(t),\ t \in [0,T]$.

В свою очередь, в силу определения обобщенного пуассоновского процесса

$$\sup_n M(|x_n(t_2) - x_n(t)|^2 \,|x_n(t) - x_n(t_1)|^2) = D(S(t_2) - S(t)) \cdot D(S(t) - S(t_1)) =$$

$$= af_2(t_2 - t) \cdot af_2(t - t_1) \le (af_2(t_2 - t_1))^2,\ 0 < t_1 < t < t_2 < T.$$

Следовательно, при $\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \lambda = 1,\ C = (a\,f_2)\,\hat{}\,2$ выполнено «моментное» условие Колмогорова–Ченцова [4]

$$\sup_n M(|x_n(t_2) - x_n(t)|^\alpha \,|x_n(t) - x_n(t_1)|^\beta) \le C(t_2 - t_1)^{1+\lambda},\ t_1 < t < t_2 < T.$$

Из [3, глава 3, теоремы 6, 7, следствие 1] приходим к $C$-сходимости случайного процесса $x_n(t)$ при $n \to \infty$ к винеровскому процессу $\sigma\xi(t),\ t \in [0,T]$, при $\sigma = \sqrt{af_2}$. Тем самым условие 1 теоремы 1 выполнено, а значит, утверждение 2 полностью доказано.

**Замечание 2.** Утверждение теоремы 2 сохранится, если определить случайным процесс $e_n(t)$ равенством $e_n(t) = e_1(nt)$.

**Замечание 3.** Утверждение теоремы 2 сохранится, если исходный пуассоновский поток $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$ заменить пуассоновским потоком с интенсивностью $a(t) \ge 0$, где $a(t)$ – непрерывная, ограниченная функция. В этом случае процесс $x_n(t)$ при $n \to \infty$ $C$-сходится к случайному процессу $\sigma\xi(m(t)),\ m(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau,$ где $\xi(t)$ – стандартный винеровский процесс.

**Замечание 4.** Утверждение теоремы 2 сохранится, если исходный пуассоновский поток $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$ заменить детерминированным потоком интенсивности 1, а случайный процесс $e_n(t)$ заменить на $\sum_{k=1}^{[nt]} \eta_k$ и воспользоваться принципом инвариантности Донскера–Прохорова [6]. Тем самым, входной поток становится детерминированным с групповым поступлением заявок.

## Заключение

В реальных технических приложениях большой интерес вызывают системы с повторными вызовами [7]. Полученные в работе результаты могут быть распространены на один из известных классов таких систем. Пусть заявка поступает в многоканальную систему и после ожидания в очереди начинает обслуживаться на одном из приборов. По окончании обслуживания может возникнуть необходимость повторного обслуживания, которое может начаться на том же приборе, если в этот момент очереди нет. В противном случае заявка становится в очередь и дожидается освобождения одного из приборов и т.д. Чтобы к такой системе применить теорему 2, необходимо заменить функцию распределения времени обслуживания $F(t)$ на функцию распределения суммарного времени обслуживания заявки во всех повторных вызовах. Однако остается открытым вопрос для систем обслуживания с повторными вызовами, работающими по другим протоколам, и для многоканальных систем обслуживания в случайной среде.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Жидкова Л.С., Моисеева С.П.* Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 49–54.
2. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М. : Наука, 1980. 381 с.
3. *Боровков А.А., Могульский А.А., Саханенко А.И.* Предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1995. Т. 82. С. 5–194.
4. *Ченцов Н.Н.* Слабая сходимость случайных процессов без разрывов второго рода // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, вып. 1. С. 154–161.
5. *Дмитровский В.А.* Условие ограниченности и оценки распределения максимума случайных полей на произвольных множествах // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 2. С. 271–274.
6. *Прохоров Ю.В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 177–238.
7. *Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С.* Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 35. С. 88–92.



***Цициашвили Гурами Шалвович,*** д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: guram@iam.dvo.ru
Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет
***Осипова Марина Анатольевна,*** канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: mao1975@list.ru
Институт прикладной математики ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет
***Грамотина Ольга Викторовна.*** E-mail: helga13d25@mail.ru
Институт прикладной математики ДВО РАН


Поступила в редакцию 16 марта 2014 г.



*Tsitsiashvili Gurami. Sh., Osipova Marina. A., Gramotina Olga. V.* **(**Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Far Eastern Federal University. Vladivostok, Russian Federation).

**Synergetic effects in multichannel queuing systems with group arrivals of customers.**

**Keywords:** multichannel and infinite channel queuing systems; Wiener process; a number of busy channels.

DOI 10.17223/19988605/31/7



In recent years, experts in a modelling of computer networks have shown great interest to an application of queuing systems with an infinite number of channels. This interest mainly is determined by a convenience of such systems calculations because of a queue absence and so a possibility for customers to choose channels freely. But real computer networks contain finite numbers of channels. So, it is necessary to establish an application of systems with infinite number of channels for their modelling.

In this paper, we establish conditions, in which an aggregation of *n* oneserver systems into multiserver system for $n \to \infty$ reduce to a queue disappearance. These conditions are based on limit theorems on a convergence of a number of busy channels in multiserver system to a number of busy channels in a system with the infinite number of channels and on a convergence of specially normed random process, described a number of customers arrived into a system up to a moment *t* to some limit the Wiener process. To obtain these results, we used the «moment» Kolmogorov-Chencov condition, an upper bound for a probability that a Gaussian process exceeds a high level and the Donsker-Prokhorov invariance principle.

We take as initial a oneserver queuing system with a Poisson or deterministic input flow and group arrivals of customers including retrial queuing systems widely used in applications.

In this paper, a model of *n* - server queuing system is considered, in which $e_n(t)$ is a number of customers, arrived in the system up to the moment $t$ inclusively, $e_n(0) = 0$, $Me_n(t) = nm(t)$, where $m(t)$ is a non decreasing function, $q_n(t)$ is the number of busy servers at the moment $t$, $q_n(0) = 0$, $\tau_j$ is the service time of $j$ -th customer, $\tau_j$, $j \ge 1$, is the sequence of independent and identically distributed random variables with the distribution function $F(t)$ ( $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$ ), which has a continuous and bounded by some positive number density.

Assume that $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$ is a Poisson flow, $N(t) = \max(i : t_i \le t)$, $t \ge 0$, is a Poisson process with the intensity $a > 0$, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ are independent and identically distributed random variables with integer and positive values, $M\eta_1 = f_1$, $D\eta_1 = f_2 < \infty$ and $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k$ is the generalized Poisson process describing an arrival of $\eta_k$ customers at the moment $t_k$, $k \ge 1$. Then, input flow into the *n* channel queuing system is defined by the equality $e_n(t) = \sum_{k=1}^{n} S_k(t)$, where $S_1(t), \ldots, S_n(t)$ are independent copies of the process $S(t)$. A main result of this paper is the following statement.

**Theorem.** If for some $T > 0$ the inequality $\int_0^T \overline{F}(t)dm(t) < 1$ is hold, then $P\left(\sup_{0 \le t \le T} q_n(t) = n\right) \to 0$, $n \to \infty$.

In manifold technical applications, there is a large interest to queuing systems with retrial calls. Results obtained in this paper may be spread onto one of some known classes of such systems. Assume that a customer arrives in a multichannel system and after a waiting begins to be served at some channel. After the end of this service, it is possible to appear a necessity for this customer to repeat a service again. This service may be realized at some free channel if it is possible. In opposite case the customer waits for a disposal of some channel and so on. To apply Theorem to such system it is necessary to replace the distribution function $F(t)$ by a distribution function of a summary service time. But there is a problem how to analyze queuing systems with repeated services which works using another protocols and multichannel queuing systems in a random environment.

## REFERENCES


1. Zhidkova, L.S. & Moiseeva, S.P. (2011) Investigation of parallel serving system with simplest flow of fold customers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 49-54. (In Russian).
2. Borovkov, A.A. (1980) Asimptoticheskie metody v teorii massovogo obsluzhivaniya [Asymptotic methods in queuing theory]. Moscow: Nauka.
3. Borovkov, A.A., Mogul'skiy, A.A. & Sakhanenko, A.I. (1995) Limit theorems for random processes. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. 82. pp. 5-194. (In Russian).
4. Chentsov, N.N. (1956) Slabaya skhodimost' sluchaynykh protsessov bez razryvov vtorogo roda [Weak convergence of random processes without discontinuities of second order]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 1 (1). pp. 154-161.
5. Dmitrovskiy, V.A. (1980) Uslovie ogranichennosti i otsenki raspredeleniya maksimuma sluchaynykh poley na proizvol'nykh mnozhestvakh [Condition of boundedness and estimates of maximum distribution for random fields on arbitrary sets]. *DAN SSSR*. 253 (2). pp. 271-274.
6. Prokhorov, Yu.V. (1956) Skhodimost' sluchaynykh protsessov i predel'nye teoremy teorii veroyatnostey [Convergence of random processes and limit theorems of probability theory]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 1 (2). pp. 177-238.
7. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Issledovanie SMO s povtornym obrashcheniem i neogranichennym chislom ob-sluzhivayushchikh priborov metodom predel'noy dekompozitsii [Investigation of retrial queuing systems with unbounded number of servers my method of limit decomposition]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational technologies*. 35. pp. 88-92.