УДК 519.216.3
DOI 10.17223/19988621/34/2

Т.В. Емельянова, В.В. Конев

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ШУМА

Рассматривается задача оценивания коэффициентов тригонометрического сигнала с дискретным временем по наблюдениям с аддитивным шумом, описываемым стационарным процессом авторегрессии с неизвестными параметрами и распределением. Предлагается одноэтапная последовательная процедура, позволяющая оценить среднеквадратическую точность оценок при любых значениях мешающих параметров шума. Получена асимптотическая формула для средней длительности процедуры.

Ключевые слова: *последовательное оценивание, заданная среднеквадратическая точность, тригонометрическая регрессия, момент остановки, авторегрессионный шум.*

В последние годы разработаны различные эффективные методы оценивания параметров сигналов с дискретным и непрерывным временем на фоне аддитивных помех при различных уровнях априорной информации относительно типа сигналов и вида помех [1–3].

В случае дискретного времени проблема выделения сигналов наиболее полно изучена для случая помех, являющихся последовательностью независимых случайных величин. Менее изучена проблема оценивания параметров сигналов при шумах с неизвестными спектральными свойствами. Наличие дополнительных неизвестных (мешающих) параметров шума существенно усложняет задачу вычисления точности оценок параметров сигнала (см., например, [4]). В работе [5] построена последовательная процедура оценивания периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами, обладающая хорошими асимптотическими свойствами и гарантирующая оценивание параметров сигнала с любой заданной среднеквадратической точностью. Эта процедура, однако, может оказаться достаточно сложной для практической реализации в случае многих неизвестных параметров, поскольку она требует построения системы из случайного числа оценок методом наименьших квадратов (МНК), путем сглаживания которых находится последовательная оценка.

В данной работе предлагается одноэтапная последовательная процедура оценивания параметров периодического сигнала при авторегрессионном шуме с неизвестными параметрами, которая дает возможность контролировать среднеквадратическую точность оценок.

Постановка задачи. Построение последовательной процедуры

Рассмотрим задачу оценивания параметров $\mu_1, \mu_2, \beta_{j1}, \beta_{j2}$, $j = 1,...,r$, тригонометрического сигнала

$$S_n = \mu_1 + (-1)^n \mu_2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_{j1} \cos \omega_j n + \beta_{j2} \sin \omega_j n \qquad (1)$$

по наблюдениям $$x_n = S_n + \xi_n, \tag{2}$$

где ξ_n – шум, являющийся устойчивым процессом авторегрессии p-го порядка:

$$\xi_n = \lambda_1\xi_{n-1} + \ldots + \lambda_p\xi_{n-p} + \varepsilon_n. \tag{3}$$

Здесь $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\varepsilon_n = 0, E\varepsilon_n^2 = \sigma^2; \lambda_1,...,\lambda_p$ – неизвестные параметры, такие, что все корни характеристического полинома $P(z) = z^p - \lambda z^{p-1} - \ldots - \lambda_p$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Относительно известных параметров ω_j предположим, что $0 < \omega_j < \pi, \omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$.

Известно, [1, с. 113] что тригонометрическим полиномом (1) может быть описан любой периодический сигнал с целочисленным периодом T, при этом $r = \left[\frac{T-1}{2}\right]$, $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$, $[a]$ обозначает целую часть числа a.

С учетом (1) и (3), наблюдаемый процесс (2) удовлетворяет уравнению

$$x_n = m_1 + (-1)^n m_2 + \sum_{j=1}^{r}\left(\gamma_{j1}\cos\omega_j n + \gamma_{j2}\sin\omega_j n\right) + \sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_{n-k} + \varepsilon_n, n \geq p+1. \tag{4}$$

Здесь m_1, m_2, γ_{jl} и λ_k – неизвестные параметры, связанные с параметрами сигнала равенствами

$$m_1 = \mu_1\left(1 - \sum_{l=1}^{p}\lambda_l\right), m_2 = \mu_2\left(1 - \sum_{l=1}^{p}(-1)^l\lambda_l\right),$$

$$\gamma_{j1} = \beta_{j1}\left(1 - \sum_{l=1}^{p}\lambda_l\cos\omega_j l\right) + \beta_{j2}\sum_{l=1}^{p}\lambda_l\sin\omega_j l, \tag{5}$$

$$\gamma_{j2} = -\beta_{j1}\left(1 - \sum_{l=1}^{p}\lambda_l\sin\omega_j l\right) + \beta_{j2}\left(1 - \sum_{l=1}^{p}\lambda_l\cos\omega_j l\right).$$

Используя обозначения

$$Y_n = \begin{pmatrix}\Phi_n \\ X_{n-1}\end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-p+1}\end{pmatrix}, \Phi_n = \begin{pmatrix}\varphi_1(n) \\ \vdots \\ \varphi_{2r+2}(n)\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\varphi_1(n) = 1, \varphi_2(n) = (-1)^n, \quad \varphi_k(n) = \cos\omega_{k-2}n \text{ при } 3 \leq k \leq r+2,$$

$$\varphi_k(n) = \sin\omega_{k-r-2} \text{ при } r+3 \leq k \leq 2r+2,$$

запишем это уравнение в векторной форме:

$$X_n = \alpha' Y_n + \varepsilon_n, n \geq p+1, \text{ где } Y_n = \begin{pmatrix}\Phi_n \\ X_{n-1}\end{pmatrix}, \ \alpha \in \Lambda, \tag{7}$$

где $\alpha = (m_1, m_2, \gamma_{11}, \gamma_{12}, ..., \gamma_{r1}, \gamma_{r2})'$ – вектор оцениваемых параметров; Λ – множество всех допустимых значений вектора, учитывающее требования на параметры $\lambda_1,...,\lambda_p$ в (3), штрих обозначает транспонирование.

Оценка по МНК вектора параметров α по наблюдениям процесса (7) имеет вид

$$\alpha(n) = M_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} Y_k x_k \ , \qquad (8)$$

где $M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k Y_k^{'}$ – выборочная информационная матрица Фишера размера $l \times l, l = 2r + 2 + p$. Будем предполагать, что минимальное собственное значение $\lambda_1(M_n)$ матрицы M удовлетворяет с вероятностью единица условию $\lambda_1(M_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Как следует из (7), обратная матрица M_n^{-1} в (8) является случайной. Это создает трудности при анализе среднеквадратической точности оценки вектора параметров α . Чтобы обойти эти трудности, предлагается использовать последовательную оценку МНК со специальным правилом прекращения наблюдений. Выбор такого правила можно осуществить, используя оценку уклонения оценки МНК в модели типа (7), полученную в [6]. Для процесса (7) эта оценка имеет вид

$$\|\alpha(n) - \alpha\|^2 \le \left\|M_n^{-2}\right\| \cdot \|m_n\|^2 \text{, где } m_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \varepsilon_k \ . \qquad (9)$$

Поскольку в силу условия на матрицу M множитель $\left\|M_n^{-2}\right\| = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^{-4}(M_n)$ в правой части (9) монотонно стремится к нулю с ростом объема выборки n , это можно использовать для выбора момента остановки $\tau(h)$ последовательной процедуры.

Для любого положительного h

$$\tau = \tau(h) = \inf\left\{ n \ge 1 : \left\|M_n^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{h} \right\}. \qquad (10)$$

Последовательную оценку МНК $\alpha^*(h)$ параметра α определим равенством

$$\alpha^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k x_k \ , \qquad (11)$$

где
$$\tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} = \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k Y_k^{'}, \quad \beta_k = \begin{cases} 1, \text{ если } k < \tau(h), \\ \nu(h), \text{ если } k = \tau(h), \end{cases}$$

а корректирующий множитель $\nu(h),$ находится из равенства

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} Y_k Y_k^{'} + \nu(h) Y_{\tau(h)} Y_{\tau(h)}^{'} \right)^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} . \qquad (12)$$

В силу монотонности последовательности матриц $(M_n)_{n\ge1}$ имеем $0 < \nu(h) \le 1$.

Теоретические свойства последовательной процедуры

При изучении свойств последовательного плана (10), (11) в зависимости от выбора порога h будем предполагать, что вектор неизвестных параметров α в уравнении (7) принадлежит некоторому известному компакту K из параметрического множества Λ.

Результаты анализа последовательного плана (10), (11), относящиеся к средней длительности последовательной процедуры и качеству последовательных оценок неизвестных параметров, сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Пусть $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ – последовательность н.о.р. случайных величин, $E\varepsilon_n = 0,\ E\varepsilon_n^2 = \sigma^2,\ E\varepsilon_n^8 < \infty$, Λ – множество допустимых значений вектора параметров α. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda$

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{\alpha\in K} \left| E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0 ,$$

где предельная матрица F определена в (15).

Теорема 2. Для любого компактного множества $K \subset \Lambda$ среднеквадратическая точность последовательной оценки удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha \left(\left\| \alpha^*(h) - \alpha \right\|^2 \right) \leq \frac{b_K}{h} (1 + o(1)) , \tag{13}$$

где $b_K = \sup\limits_{\alpha\in K} \varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha) = Q(\alpha) \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}}$, где $o(1) \to 0$ при $h \to \infty$, функция $Q(\alpha)$ определена в (43).

Доказательства теорем 1, 2 приводятся в Приложении.

Замечание 1. Теорема 2 позволяет контролировать среднеквадратическую точность последовательной оценки с помощью выбора порога h, с учетом того, что величина b_K может быть вычислена априори. При этом средняя длительность процедуры, согласно теореме 1, растет линейно с ростом h.

Замечание 2. В простейшем случае при оценивании сигнала

$$S_n = \theta \cos n$$

по наблюдениям

$$x_n = S_n + \xi_n ,$$

где ξ_n – шум, являющийся устойчивым процессом авторегрессии первого порядка,

$$\xi_n = \lambda \xi_{n-1} + \varepsilon_n ,$$

предельная матрица F, определенная в (15), будет иметь вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{2} & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} .$$

Зададим компакт K равенством

$$K = \{(\theta,\lambda),\ 0.2 \le \theta \le 0.7,\ -0.6 \le \lambda \le 0.6\}\ .$$

В этом случае $b_K = \sup\limits_K Q(\alpha)\cdot \left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} = 61.964$.

Заключение

В работе построена последовательная процедура оценивания параметров тригонометрического сигнала, наблюдаемого на фоне авторегрессионного шума. Используется специальное правило прекращения наблюдений, определяемое по выборочной информационной матрице Фишера, которое позволяет контролировать заданную среднеквадратическую точность оценок неизвестных параметров.

Результаты работы могут быть использованы в задачах автоматического управления и идентификации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 основывается на предельных свойствах выборочной информационной матрицы Фишера M_N, построенной по N наблюдениям процесса (7). В работе [5] установлено, что последовательность векторов $\{Y_n\}$, определенная в (7) при $\lambda \in \Lambda$, с вероятностью единица удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^{N} Y_n Y_n^{'} = F\ , \tag{14}$$

где F – положительно определенная матрица, имеющая вид

$$F = \begin{Vmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1^{'} & F_0 + DM_0D^{'} \end{Vmatrix},\ \text{в которой}\ M_0 = \operatorname{diag}\left(1,1;\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & (-1)^k & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & V_1(k) & V_2(k) \\ \multicolumn{2}{c}{0} & -V_2(k) & V_1(k) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

причем $V_1(k) = \operatorname{diag}(\cos\omega_1 k,\ldots,\cos\omega_r k)$, $V_2(k) = \operatorname{diag}(\sin\omega_1 k,\ldots,\sin\omega_r k)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ I_{p-1} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{r1} & \gamma_{r2} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$D = \sum_{k\ge 0} A^k \Gamma V(k),\ M_1 = M_0 V^{'}(1) D^{'},\ \ F_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} \zeta_n\zeta_n^{'}\ \text{ п.н.},$$

$$\zeta_n = A\zeta_{n-1} + \eta_n,\ \zeta_p = 0,\ \ \eta_n = (\varepsilon_n, 0, \ldots, 0)'.$$

Заметим, что матрица M_n, удовлетворяющая (14), обладает требуемым свойством $\lambda_{\min}(M_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Кроме свойства (14) нам требуется оценить скорость сходимости матрицы $\frac{M_N}{N}$ к предельному значению F.

Лемма 1. Пусть $(\varepsilon_n)_{n\ge1}$ в (3) последовательность н.о.р. случайных величин с $E\varepsilon_n = 0, E\varepsilon_n^2 = \sigma^2,\ \ E\varepsilon_n^8 < \infty$. Тогда

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha \left\| \frac{M_N}{N} - F \right\|^4 \le \frac{L}{N^2}\ . \tag{18}$$

Доказательство леммы 1 достаточно громоздко и приводится после доказательства теоремы 1.

Используя лемму 1 и схему доказательства теоремы 3.1 из [6], можно показать, что $\lim\limits_{h\to+\infty} \sup\limits_{\alpha\in K} E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} < +\infty$.

Далее имеем оценку

$$\left| E_\alpha \frac{\tau(h)}{h} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| = \left| E_\alpha \left\| \left(\frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} \right)^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| \le \tag{19}$$

$$\le \Delta + E_\alpha \left[\frac{\tau(h)}{h} \chi\left(\left\| \frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \ge \eta \right) \right] + \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} P_\theta \left(\left\| \frac{\tilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \ge \eta \right).$$

Здесь Δ – некоторая положительная постоянная.

Для анализа асимптотического поведения правой части этого неравенства будет использоваться следующий результат из работы [6].

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda$ и произвольного η верно неравенство

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{\theta\in K} P_\theta \left(\left\| \frac{M_{\tau(h)}}{\tau(h)} - F \right\| \ge \eta \right) = 0\ . \tag{20}$$

Используя эту оценку, можно показать, что аналогичное предельное соотношение выполняется и для второго слагаемого в правой части (19). Теорема 1 доказана.

2. Доказательство леммы 1. Учитывая (7), запишем процесс (5) в векторной форме

$$X_n = AX_{n-1} + \Gamma\Phi_n + \eta_n, \quad n \ge p+1, \tag{21}$$

где A, Γ и η_n определены в (17).

I_{p-1} – единичная матрица порядка $p-1$.

Отсюда

$$X_n = A^{n-p} X_p + \zeta_n + W_n,\ n \ge p, \tag{22}$$

где $\zeta_n = A\zeta_{n-1} + \eta_n, \zeta_p = 0, W_n = \sum\limits_{j=0}^{n-p-1} A^j \Gamma\Phi_{n-j}$.

Тогда выборочная информационная матрица Фишера будет иметь вид

$$\frac{M_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}Y_nY_n^{'}=\begin{pmatrix}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=p+1}^{N}\Phi_n\Phi_n^{'} & \frac{1}{N}\sum\limits_{n=p+1}^{N}\Phi_nX_{n-1}^{'}\\ \frac{1}{N}\sum\limits_{n=p+1}^{N}X_{n-1}\Phi_n^{'} & \frac{1}{N}\sum\limits_{n=p+1}^{N}X_{n-1}X_{n-1}^{'}\end{pmatrix}. \quad (23)$$

Отсюда, выделив компакт K из параметрической области Λ с помощью элементарного неравенства, получаем

$$\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\left\|\frac{M_N}{N}-F\right\|^4\le 4^3\left(\|A_N\|^4+\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\|B_N\|^4+2\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\|C_N\|^4\right), \quad (24)$$

где $$A_N=\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}\Phi_n\Phi_n^{'}-M_0,\quad B_N=\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}X_{n-1}X_{n-1}^{'}-\left(F_0+DM_0D'\right), \quad (25)$$

$$C_N=\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}X_{n-1}\Phi_n^{'}-M_1^{'}.$$

Покажем, что для A_N, B_N и C_N выполняются неравенства

$$\|A_N\|^4\le\frac{L_1}{N^4}; \quad (26)$$

$$\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\|B_N\|^4\le\frac{L_2}{N^2}; \quad (27)$$

$$\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\|C_N\|^4\le\frac{L_3}{N^2}, \quad (28)$$

где $L_i, i=1,2,3,$ – некоторые положительные постоянные.

Неравенство (26) можно легко проверить, учитывая периодичность компонент вектора Φ в (7) и определение M_0 в (11).

Подставляя X_N в C_N, с помощью элементарного неравенства получим

$$\sup_{\alpha\in K}E_\alpha\|C_N\|^4\le 4^3\sup_{\alpha\in K}\left(E_\alpha G_N+E_\alpha H_N+E_\alpha Q_N\right), \quad (29)$$

где $$G_N=\left\|\frac{1}{N}\sum_{m=p}^{N-1}A^{m-p}X_p\Phi_{m+1}^{'}\right\|^4,$$

$$H_N=\left\|\frac{1}{N}\sum_{m=p}^{N-1}\zeta_m\Phi_{m+1}^{'}\right\|^4,$$

$$Q_N=\left\|\frac{1}{N}\sum_{m=p}^{N-1}W_m\Phi_{m+1}^{'}-M_1^{'}\right\|^4,\ M_1=M_0V'(1)D'.$$

Учитывая оценку $\sum_{m=1}^{\infty}\left\|A^m\right\| \le \sum_{m=1}^{\infty} Cq^m, \quad 0<q<1$, и ограниченность нормы вектора Φ_{m+1}, имеем

$$\sup_{\alpha\in K} G_N \le \frac{C}{N^4} E_\alpha \left\|X_p\right\|^4 \cdot \sum_{m=p}^{N-1}\left\|A^{m-p}\right\|^4 \cdot \left\|\Phi'_{m+1}\right\|' \le \frac{C_1}{N^4}\sum_{m=p}^{N-1} q^{m-p} \le \frac{L}{N^4}. \qquad (30)$$

Меняя порядок суммирования и используя неравенство Бургхольдера для $p=4$, для математического ожидания H_N получим

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha H_N = E_\alpha \left\|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-p-2} A^j \sum_{l=j+1}^{N-p-1} \eta_{l+p-j}\Phi'_{l+p+1}\right\|^4 \le \frac{C(2r+2)B_4^4}{(1-q)N^2} \le \frac{C_1}{N^2}. \qquad (31)$$

Записав W_n в виде

$$W_n = D\Phi_n + \Delta_n, \qquad (32)$$

где $D=\sum_{k\ge 0} A^k \Gamma V(k),\ \Delta_n = -\sum_{k\ge n-p} A^k\Gamma V(k)\Phi_n$, и учитывая, что $\Phi_m = V(1)\cdot\Phi_{m+1}$, оценим Q_N:

$$Q_N \le C\left\|\frac{1}{N} DV(1)\sum_{m=p}^{N-1}\Phi_{m+1}\Phi'_{m+1} - M'_1\right\|^4 + \left\|\frac{1}{N}\sum_{m=p}^{N-1}\Delta_m\Phi'_m\right\|^4 \le \qquad (33)$$

$$\le C\left(\left\|DV(1)\left(\frac{1}{N}\sum_{m=p+1}^{N}\Phi_m\Phi'_m - M_0\right)\right\|^4 + \left\|\sum_{k\ge m} A^k\Gamma V(k)\right\|^4 \left\|\frac{1}{N}\sum_{m=p}^{N-1}\Phi_m\Phi'_m\right\|^4\right) \le \frac{C_1}{N^4}.$$

Подставляя (30), (31), (33) в (29), приходим к (28). Учитывая (22), для B_N, получим следующее неравенство:

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha \left\|B_N\right\|^4 \le C\sum_{i=1}^{6}\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_i(N), \qquad (34)$$

где

$$I_1(N) = \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} A^{n-p-1}X_pX'_p\left(A^{n-p-1}\right)'\right\|^4,\ I_2(N) = 2\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p}^{N}\zeta_n W'_n\right\|^4,$$

$$I_3(N) = 2\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p}^{N}\zeta_n X'_p\left(A^{n-p-1}\right)'\right\|^4,\ I_4(N) = 2\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p}^{N} A^{n-p}X_pW'_n\right\|^4,$$

$$I_5(N) = \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} W_nW'_n - DM_0D\right\|^4,\ I_6(N) = \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=p}^{N}\zeta_n\zeta'_n - F_0\right\|^4.$$

Оценим слагаемые правой части этого неравенства. Первое слагаемое допускает оценку

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_1(N) \le \frac{C}{N^4} E_\alpha \left\|X_p\right\|^8 \sum_{n=p+1}^{N} q^{8N} \le \frac{C_1 E_\alpha \left\|X_p\right\|^8}{N^4}. \quad (35)$$

Записав ζ_n в виде

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{n-p-1} A^m \eta_{n-m}, \quad (36)$$

изменив порядок суммирования, с помощью неравенств Коши и Бургхольдера [7] для второго слагаемого получим неравенство

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_2(N) \le \frac{C}{N^4(1-q)^3} \sum_{m=0}^{N-p} q^m B_4^4 (N-p)^2 < \frac{C_1}{N^2}. \quad (37)$$

Используя аналогичные рассуждения, для $I_3(N)$ имеем оценку

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_3(N) \le \frac{C_2 E_\alpha \left\|X_p\right\|^4}{N^2}. \quad (38)$$

Поскольку норма вектора W_n ограничена, четвертое слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_4(N) \le \frac{C E_\alpha \left\|X_p\right\|^4}{N^4}. \quad (39)$$

Учитывая (22) и (32), для I_5 получаем

$$I_5(N) \le C\left(\left\| \frac{1}{N} D\left(\sum_{n=p}^{N} \Phi_n \Phi_n^{'} - M_0 \right) D^{'} \right\|^4 + 2\left\| \frac{1}{N} \Delta_m \Phi_n^{'} D^{'} \right\|^4 + \frac{1}{N^4} \left\|\Delta_m\right\|^8 \right) \le \frac{C}{N^4}. \quad (40)$$

Как показано в [6], скорость сходимости последнего слагаемого $I_6(N)$ в (34) допускает оценку

$$\sup_{\alpha\in K} E_\alpha I_6(N) = \sup_{\alpha\in K} E_\alpha \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=p}^{N} \zeta_n \zeta_n^{'} - F_0 \right\|^4 \le \frac{L}{N^2}, \quad (41)$$

где L – некоторая положительная постоянная, F_0 определено в (17).

Используя оценки (35), (37) – (41) в (31), получаем утверждение леммы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Оценка $\alpha^*(h)$, определенная в (12), удовлетворяет для любого $h > 0$ неравенству

$$E_\alpha \left\|\alpha^*(h) - \alpha\right\|^2 \le \frac{E_\alpha tr M_{\tau(h)}}{h^2}. \quad (42)$$

Для проверки этого неравенства достаточно применить оценку (9) для уклонения оценки $\alpha^*(h)$ и заменить n на момент остановки $\tau(h)$, определенный в (10).

Далее нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $(\varepsilon_n)_{n\ge 1}$ – н.о.р. случайные величины, $E\varepsilon_n = 0,\ E\varepsilon_n^2 = \sigma^2 < +\infty$. Тогда для любого $h > 0$

$$E_\alpha \operatorname{tr} \tilde{M}_\tau \le Q(\alpha) E_\alpha \tau + m\sqrt{E_\alpha \tau} + U\ , \tag{43}$$

где
$$Q(\alpha) = \operatorname{tr} F_0 + 2r + 2 + (2r+2)^2 \left(\|D\|^2 + \frac{c}{1-q} \right),$$

$$m = \frac{c\sigma}{1-q}(2r+2)(\|D\| + \|\Gamma\|)\ ,\ U = \frac{c}{1-q}((2r+2)\|D\| + 2)\, E_\alpha \left\| X_p \right\|.$$

Доказательство. Поскольку

$$\operatorname{tr} M_N = \operatorname{tr} \sum_{h=p+1}^{N} \left(\Phi_n \Phi_n' \right) + \operatorname{tr} \sum_{h=p+1}^{N} X_{n-1} X_{n-1}', \tag{44}$$

то учитывая (22), получим

$$\operatorname{tr} M_N \le (N-p-1)(2r+2) + \sum_{k=1}^{6} I_k, \text{ где} \tag{45}$$

$$I_1 = \operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} A^{n-p-1} X_p X_p' (A^{n-p-1})',\ I_2 = 2\operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} \zeta_{n-1} X_p' (A^{n-p-1})',$$
$$I_3 = 2\operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} A^{n-p-1} X_p W_{n-1}',\ I_4 = \operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} W_{n-1} W_{n-1}',$$
$$I_5 = \operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} \zeta_{n-1} \zeta_{n-1}',\ I_6 = 2\operatorname{tr} \sum_{n=p+1}^{N} \zeta_{n-1} W_{n-1}'.$$

Оценим математическое ожидание $I_k,\ k = \overline{1,6}$. Учитывая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| A^k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} c q^k$, где $0 < q < 1$, получим

$$E_\alpha I_1 \le E_\alpha \left\| X_p \right\| \cdot \frac{c q^{2(p+1)}}{1-q^2}. \tag{46}$$

Учитывая, что

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{n-p-1} A^m \eta_{n-m}\ , \tag{47}$$

имеем

$$EI_2 \le \sum_{m=0}^{N-p-1} \left\| A^m \right\| \cdot \left\| \sum_{l=m+1}^{N-p} \eta_{l+p-m} X_p' (A')^{l-1} \right\| \le \frac{c\sigma^2}{(1-q)^2} E_\alpha \left\| X_p \right\|. \tag{48}$$

Используя (32), для математического ожидания I_3 получим неравенство

$$E_\alpha I_3 \le \frac{c}{1-q}(\|D\| \cdot \|\Phi_n\| + 1)\, E_\alpha \left\| X_p \right\|. \tag{49}$$

Подставляя (32) в выражение для I_4, имеем

$$I_4 \le (N-p-1)\Big[(2r+2)^2\cdot\|D\|\Big] + c\cdot\frac{q^{2(n-p)}}{1-q^2} + (2r+2)\sum_{k\ge1} tr\Big(A^k\Gamma V(k)\Big) = \\ = (N-p-1)\cdot L(r), \qquad (50)$$

где $L(r)$ – некоторая положительная постоянная.

По лемме 3.1 из [6] математическое ожидание I_5 при замене N на $\tau(h)$ удовлетворяет неравенству

$$I_5 \le (\operatorname{tr} F_0) E_\alpha \tau + \sum_{j\ge0} \operatorname{tr} A^j E_\alpha \zeta_p \zeta_p' \left(A'\right)^j. \qquad (51)$$

Подставляя (22) в выражение для I_6 и учитывая (29), получим $I_6 = 2J_1 + 2J_2$, где $J_1 = \operatorname{tr}\sum_{k=p+1}^{N-p} \zeta_k \Phi_k' D'$, $J_2 = -\operatorname{tr}\sum_{k=p+1}^{N-p} \zeta_k \Phi_k' \Delta_k$. Замечая, что $\Phi_{n-k} = V(k)\Phi_n$, и используя (42), имеем

$$J_1 \le \sum_{l=0}^{N-2p-1} \left\|A^l\right\|\cdot\left\|V^{-1}(l)\right\|\cdot\|D\|\cdot\left\|\sum_{m=p+1}^{N-p} \eta_m \Phi_m\right\| \le L\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{2r+2}\left(\sum_{m=p+1}^{N-p} \varepsilon_m \left\langle \Phi_m \right\rangle_j\right)^2}, \qquad (52)$$

где $L = \dfrac{c\left\|V^{-1}(l)\right\|\cdot\|D\|}{1-q}$.

Так как Δ_k – остаток сходящегося ряда, то J_2 допускает аналогичную оценку.

Заменяя N на $\tau(h)$, переходя к усечённым моментам и используя лемму Фату для математического ожидания I_6, получим

$$E_\alpha I_6 \le L\sigma\sqrt{E_\alpha \tau(h)}. \qquad (53)$$

Подставляя (46), (48) – (51), (53) в (45), получаем утверждение леммы.

Лемма 3 доказана.

Используя лемму 3 в (42) и применяя теорему 1, приходим к утверждению теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
2. *Ибрагимов И.А.*, *Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
3. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. *Konev V.*, *Pergamenshchikov S.* On guaranteed estimation of the mean of an autoregressive process // Ann. Statist. 1997. V. 25. No. 5. P. 2127–2163.
5. *Конев В.В.*, *Пергаменщиков С.М.* Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 3. Вып. 4.
6. *Galtchouk L.*, *Konev V.* On Sequential Least Squares Estimates of Autoregressive Parameters // Sequential Analysis. 2005. V. 24. No. 4. P. 335–364.
7. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 11.02.2015 г.

Emelyanova T.V., *Konev V.V.* ON SEQUENTIAL ESTIMATION OF A PERIODIC SIGNAL ON THE BACKGROUND OF AN AUTOREGRESSIVE NOISE

DOI 10.17223/19988621/34/2

We consider the problem of estimating coefficients of a trigonometric signal in a discrete time from observations with an additive noise described by a stationary autoregressive process with unknown parameters and unknown distribution. A one-step sequential procedure to estimate signal coefficients is proposed, which provides a given root-mean-square accuracy of estimates for any values of the nuisance parameters. An asymptotic formula for the mean duration of the procedure is constructed.

Keywords: sequential estimation, given root-mean-square accuracy, trigonometric regression, stopping time, autoregressive noise.

EMELYANOVA Tatiana Veniaminovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: tv_em@mail.ru

KONEV Viktor Vasil'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Anderson T.W. *The statistical analysis of time series*. New York, John Wiley & Sons, 2011.
2. Ibragimov I.A., Khasminsky R.Z. *Asymptotic estimation theory*. New York, Springer-Verlag, 1981.
3. Liptser R., Shiryaev A.N. *Statistics of Random Processes*. New York, Springer, 2001.
4. Konev V., Pergamenshchikov S. On guaranteed estimation of the mean of an autoregressive process. *Ann. Statist.*, 1997, vol. 25, no. 5, pp. 2127–2163.
5. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Garantirovannoe otsenivanie periodicheskogo signala na fone avtoregressionnykh pomekh s neizvestnymi parametrami. *Problemy peredachi informatsii*, 1997, vol. 3, no. 4. (in Russian)
6. Galtchouk L., Konev V. On Sequential Least Squares Estimates of Autoregressive Parameters. *Sequential Analysis*, 2005, vol. 24, no. 4, pp. 335–364.
7. Shiryaev A.N. *Probability*. New York, Springer, 1996.