

УДК 512.55

ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Ю. Ю. Фролова, О. В. Шулежко

Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

Представлен новый результат, касающийся многообразий алгебр Лейбница. Доказано, что в случае нулевой характеристики основного поля существует ровно два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница. Доказательство носит комбинаторный характер.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Лейбница, почти нильпотентное многообразие, диаграмма Юнга.

DOI 10.17223/20710410/28/3

ALMOST NILPOTENT VARIETIES OF LEIBNIZ ALGEBRAS

Yu. Yu. Frolova, O. V. Shulezhko

*Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia***E-mail:** yuyufrolova@mail.ru, ol.shulezhko@gmail.com

It is proved that there exist exactly two almost nilpotent varieties of Leibniz algebras over a field of zero characteristic.

Keywords: Leibniz algebra, Lie algebra, almost nilpotent variety, Young diagram.

На протяжении всей работы характеристика основного поля Φ равна нулю. Напомним, что векторное пространство над полем Φ называется линейной алгеброй, если на нём задана бинарная билинейная операция. Класс линейных алгебр, в которых выполняется некоторый фиксированный набор тождественных соотношений, называется многообразием. В работе не предполагается ассоциативность, поэтому при более чем двух сомножителях имеет значение расположение скобок. Более того, в случае алгебр Лейбница любое произведение представимо в виде линейной комбинации левонормированных элементов. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $abc = (ab)c$. Все неопределённые в данной работе понятия можно найти в [1, 2].

Хорошо известно, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, и исследование строения полилинейных частей относительно свободной алгебры многообразия даёт полную информацию об этом многообразии.

В свободной алгебре многообразия V со счётным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ рассмотрим множество полилинейных элементов степени n от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они образуют векторное пространство $P_n(V)$, называемое полилинейной компонентой относительно свободной алгебры, размерность которого обозначим $c_n(V)$, $n = 1, 2, \dots$. Известно, что полилинейную компоненту степени n можно рассматривать как модуль над групповым кольцом ΦS_n симметрической группы S_n .

Для этого определим действие перестановки σ следующим образом: $\sigma(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)}\dots x_{\sigma(i_n)} \in S_n$. Это действие симметрической группы S_n превращает полилинейную компоненту P_n в левый ΦS_n -модуль.

Известно, что с точностью до изоморфизма неприводимые ΦS_n -модули можно описывать на языке разбиений и диаграмм Юнга. Разбиением числа n называют набор целых положительных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, при этом $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ и $n = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Разбиение λ числа n обозначают $\lambda \vdash n$. Для каждого такого разбиения λ строится диаграмма Юнга, состоящая из k строк, причём строка с номером i содержит λ_i клеток. Если диаграмму Юнга, соответствующую разбиению λ числа n , заполнить числами от 1 до n , то получим таблицу Юнга, соответствующую данной диаграмме.

Так как характеристика основного поля равна нулю, по теореме Машке полилинейную часть степени n можно разложить в прямую сумму неприводимых подмодулей. Строение модуля $P_n(V)$ можно представить на «языке характеров». Рассмотрим разложение характера модуля $P_n(V)$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_n(V) = \chi(P_n(V)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (1)$$

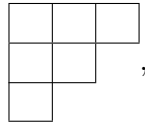
Здесь m_λ — кратность неприводимого характера χ_λ , отвечающего разбиению λ . Асимптотическое поведение размерности $c_n(V)$ пространства $P_n(V)$ определяет рост многообразия. Число слагаемых $l_n(V) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ в сумме (1) называют кодлинной многообразия.

Размерность неприводимого ΦS_n -модуля, построенного по некоторому разбиению λ , которую будем обозначать d_λ , определяется формулой «крюков» (см., например, [1, с. 113])

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j \in d} |h_{ij}|},$$

где длина крюка $|h_{ij}| = (\lambda_i - i) + (\lambda'_j - j) + 1$; λ_i — длина i -й строки; λ'_j — длина j -го столбца диаграммы d .

Например, размерность неприводимого модуля, соответствующего диаграмме



равна $d_{(3,2,1)} = \frac{6!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1} = 16$.

Будем говорить, что многообразие V является почти нильпотентным, если V не нильпотентно, но каждое собственное подмногообразие W многообразия V нильпотентно.

Рассмотрим состояние вопроса описания почти нильпотентных многообразий в классах ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Известно, что в классе ассоциативных алгебр единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр AC . По тождеству ассоциативности скобки в полилинейных элементах можно опускать, в силу тождества коммутативности образующие в произведениях можно менять местами. Поэтому полилинейная часть данного многообразия является одномерным пространством ($c_n(P_n(AC)) = 1$), базис которого — любой моном, например $x_1x_2\dots x_n$. Разложение характера имеет вид $\chi_n(AC) = \chi_{(n)}$, кодлина равна 1, то есть $l_n(AC) = 1$ для любого n . Понятно, что тождество $x_1^n \equiv 0$ соответствует разбиению (n) . Так как

поле Φ лежит в многообразии AC , само многообразие AC не является нильпотентным. Однако если рассмотреть любое собственное подмногообразие многообразия всех ассоциативно-коммутативных алгебр AC , то в нём должно выполняться тождество, невыполнимое в AC . Значит, в этом подмногообразии выполняется тождество $x^n \equiv 0$. Тогда по теореме Нагаты — Хигмана [3, с. 152–153] получаем, что оно является нильпотентным. Не претендуя на авторство, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть W — почти нильпотентное ассоциативное многообразие. Тогда $W = AC$.

Доказательство. Пусть многообразие W является почти нильпотентным, но не совпадает с многообразием AC . Понятно, что ненильпотентное многообразие AC не является собственным подмногообразием многообразия W . Отсюда следует, что в многообразии W выполняется тождество $x^n \equiv 0$. По теореме Нагаты — Хигмана получаем, что W является нильпотентным. ■

Напомним, что алгеброй Ли называется алгебра, в которой выполнено тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$ и тождество Якоби $(xy)z + (yz)x + (zx)y \equiv 0$. Введём обозначение Y для оператора умножения справа на элемент y ; запишем $aY = ay$. Тогда $\underbrace{xy \dots y}_m = xY^m$.

Рассмотрим многообразие метабелевых алгебр Ли, которое обозначим A^2 . Это многообразие определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0. \quad (2)$$

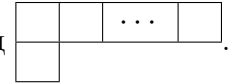
Из тождеств антикоммутативности и Якоби следует, что в многообразии A^2 выполняется следующее тождество:

$$x_1(x_2x_3) = x_1x_2x_3 - x_1x_3x_2. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что в элементах пространства $P_n(A^2)$ образующие, начиная с третьего, можно менять местами: $x_1x_2x_4x_3 \equiv x_1x_2x_3x_4$. Более подробно данное многообразие описано в [1]. Кроме того, в алгебре Ли любой элемент в пространстве P_n можно представить в виде линейной комбинации элементов вида $x_nx_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{(n-1)}}$. Значит, полилинейная часть $P_n(A^2)$ является линейной оболочкой элементов $x_nx_ix_{i_1} \dots x_{i_{(n-2)}}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-2}$.

Размерность полилинейной части многообразия A^2 равна $n - 1$, то есть $c_n(A^2) = n - 1$. Разложение характера неприводимого модуля этого многообразия имеет вид $\chi_n(A^2) = \chi_{(n-1,1)}$, а кодлина многообразия равна единице: $l_n(A^2) = 1$.

Соответствующая разбиению $(n - 1, 1)$ диаграмма Юнга имеет вид



Такой диаграмме соответствует тождество $x_1x_2X_1^{n-2} - x_2x_1X_1^{n-2} \equiv 0$.

Воспользовавшись свойством антикоммутативности, получим, что это тождество эквивалентно так называемому тождеству энгелевости

$$x_2X_1^{n-1} \equiv 0. \quad (4)$$

Заметим, что в случае многообразия алгебр Ли тождество энгелевости имеет вид $xY^m \equiv 0$, а не $xX^m \equiv 0$ ввиду антикоммутативности $x^2 \equiv 0$. Тождество (4) не выполняется в многообразии A^2 , так как в нём лежит метабелева ненильпотентная алгебра с базисом e, h и таблицей умножения $he = -eh = h$, $ee = hh = 0$ [1, с. 173]. Изложим в виде теоремы хорошо известный факт.

Теорема 2. Пусть W — почти нильпотентное многообразие алгебр Ли. Тогда $W = A^2$.

Доказательство. Пусть многообразие W является почти нильпотентным, но не совпадает с многообразием A^2 . Понятно, что ненильпотентное многообразие A^2 не является собственным подмногообразием многообразия W . Так как кратность $m_{(n-1,1)} = 1$ как в самом многообразии A^2 , так и в многообразии всех алгебр Ли, то в W выполняется тождество (4). Тогда из результата Е. И. Зельманова [4] получаем, что в W выполняется тождество нильпотентности $x_1 x_2 \dots x_m \equiv 0$ для некоторого натурального числа m . Значит, W — нильпотентное многообразие. Таким образом, получили, что A^2 — единственное почти нильпотентное многообразие алгебр Ли. ■

Перейдём к изложению основной части работы: к описанию почти нильпотентных многообразий в классе алгебр Лейбница. Напомним, что алгеброй Лейбница над полем Φ называется линейная алгебра, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz).$$

В другом виде получаем

$$x(yz) \equiv xyz - xzy. \quad (5)$$

Отметим, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$, то (5) эквивалентно тождеству Якоби. Значит, любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница, и многообразие алгебр Ли A^2 также является почти нильпотентным многообразием алгебр Лейбница.

Из тождества (5) следует, что любой элемент может быть представлен в виде линейной комбинации левонормированных элементов. Поэтому определение нильпотентной алгебры следующее: алгебра называется нильпотентной алгеброй ступени c , если в ней выполняется тождество $x_1 x_2 \dots x_{c+1} \equiv 0$ с левонормированной расстановкой скобок, но не выполняется тождество $x_1 x_2 \dots x_c \equiv 0$. В многообразии N_c нильпотентных алгебр Лейбница ступени c коразмерность $c_n(N_c)$ равна нулю при $n > c$. Рассмотрим многообразие алгебр Лейбница ${}_2N$, в котором выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Полное описание этого многообразия приведено в [5]. Для многообразия ${}_2N$ справедливо следующее разложение для характера: $\chi_n({}_2N) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$.

Кроме того, в работе [5] получено, что соответствующие неприводимые модули порождаются полной линеаризацией следующих элементов:

$$g_{(n)} = x_1 X_1^{n-1}, \quad g_{(n-1,1)} = x_2 x_1 X_1^{n-2} - x_1 x_2 X_1^{n-2}.$$

Пусть A — некоторая алгебра Лейбница. В работе [5] показано, что линейная оболочка квадратов элементов алгебры является идеалом, который обозначим I .

Утверждение 1. Для любого элемента b из алгебры A и любого элемента c из идеала I выполняется равенство $bc = 0$, то есть идеал является правым аннулятором алгебры. В частности, идеал I является алгеброй с нулевым умножением.

Доказательство. Элемент вида $ab + ba$ принадлежит множеству I , так как $ab + ba = (a + b)^2 - a^2 - b^2$. Пусть b — элемент алгебры A , тогда произведение $a^2 b = (ab)a + a(ab)$ принадлежит множеству I . Поэтому I является правым идеалом. Из тождества $b(aa) \equiv 0$ следует, что произведение ba^2 является нулевым и поэтому также принадлежит идеалу.

Рассмотрим произведение $(a + I)(a + I) = a^2 + I = I$. Значит, в фактор-алгебре A/I выполняется тождество антикоммутативности, по модулю которого тождество (3) эквивалентно тождеству Якоби, то есть фактор-алгебра A/I является алгеброй Ли. ■

В работе [6, с. 39 (следствие 2.3)] доказано, что в классе разрешимых алгебр Лейбница существует ровно два описанных выше почти нильпотентных многообразия. Основной целью данной работы является обобщение этого результата на случай всех алгебр Лейбница.

Теорема 3. В случае нулевой характеристики основного поля существует ровно два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница. Это многообразие метабелевых алгебр Ли A^2 и многообразие левонильпотентных ступени не выше двух алгебр Лейбница ${}_2N$.

Доказательство. Пусть U — новое почти нильпотентное многообразие. Предположим, что все тождества, которые выполнены в U , выполняются и в ${}_2N$. Тогда ${}_2N \subseteq U$, но многообразие U почти нильпотентно, а значит, ${}_2N = U$. Таким образом, в U выполнены какие-то тождества, которые не выполняются в ${}_2N$. Возможны два случая, отвечающие разбиениям (n) и $(n - 1, 1)$.

Тождество, соответствующее разбиению $(n) \vdash n$, имеет вид $x_1 X_1^{n-1} \equiv 0$.

Разбиению $(n - 1, 1) \vdash n$ соответствуют тождества вида

$$\sum_{s=0}^{n-2} \alpha_s \overline{x_1} X_1^s \overline{x_2} X_1^{n-s-2} \equiv 0. \quad (6)$$

Левая часть тождества является линейной комбинацией элементов, соответствующих стандартным таблицам Юнга. Стандартная таблица для (6) выглядит следующим образом:

1	2	...	$\widehat{s+2}$	...	n
$s+2$					

Соответствующий этой таблице элемент имеет вид $\overline{x_1} X_1^s \overline{x_2} X_1^{n-s-2}$. Более подробно о теории представлений симметрической группы можно найти в [2].

Пусть в (6) $\alpha = \sum \alpha_s = 0$. В многообразии ${}_2N$, согласно тождествам $x(yz) \equiv \equiv xyz - xzy$ и $x(yz) \equiv 0$, сомножители, начиная со второго, можно менять местами. Поэтому (6) по модулю тождеств многообразия ${}_2N$ имеет вид $\alpha \overline{x_1} \overline{x_2} X_1^{n-2} \equiv 0$. Таким образом, оно выполняется в этом многообразии вопреки предположению. Получили противоречие, следовательно, $\alpha = \sum \alpha_s \neq 0$. Подставив в это тождество вместо x_2 элемент x_1^2 , получим $-\alpha x_1 X_1^n \equiv 0$.

Итак, в обоих рассматриваемых случаях получили, что в многообразии U выполнено тождество $x_1 X_1^m \equiv 0$ для некоторого натурального m ($m = n - 1$ или $m = n$).

Подставим в последнее тождество вместо x_1 сумму $y + x^2$. Так как все слагаемые вида $y \dots (x^2) \dots$ равны нулю, в качестве следствия получаем тождество вида $x^2 Y^m \equiv 0$ или эквивалентные ему частичные линеаризации:

$$xyY^m \equiv -yxY^m; \quad (7)$$

$$x^2 f(Y_1, \dots, Y_m) \equiv 0, f(Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{p \in S_m} Y_{p(1)} \dots Y_{p(m)}. \quad (8)$$

Рассмотрим алгебру Лейбница L из многообразия U и множество элементов

$$I_f = \{a \in L : af(Y_1, \dots, Y_m) = 0 \text{ для любых } y_1, \dots, y_m \in L\}.$$

Докажем, что I_f является правым идеалом.

Пусть $a \in I_f$, значит, $af(Y_1, \dots, Y_m) = 0$ для любых $y_1, \dots, y_m \in L$. Умножим на $b \in L$ справа: $af(Y_1, \dots, Y_m)b = 0$, но, с другой стороны, дифференцируя при помощи элемента b по тождеству Лейбница, получим

$$abf(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_{s=1}^m af(Y_1, \dots, [Y_s, B], \dots, Y_m) = 0,$$

где $[Y_s, B] = Y_s B - B Y_s$ — коммутатор линейных операторов.

По определению множества I_f каждое слагаемое суммы отдельно равно нулю. В качестве примера рассмотрим случай $m = 2$. Тогда многочлен имеет вид $f(Y_1, Y_2) = Y_1 Y_2 + Y_2 Y_1$, получаем, что $ay_1 y_2 + ay_2 y_1 = 0$. Умножим последнее равенство на b справа и, используя правило дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} aby_1 y_2 + a(y_1 b)y_2 + ay_1(y_2 b) + aby_2 y_1 + a(y_2 b)y_1 + ay_2(y_1 b) = \\ = abf(Y_1, Y_2) + af([Y_1, B], Y_2) + af(Y_1, [Y_2, B]) = 0. \end{aligned}$$

Так как два последних слагаемых по определению множества I_f равны нулю, получаем, что $abf(Y_1, Y_2) = 0$ для любых элементов y_1, y_2 из алгебры L .

В предыдущих выкладках мы использовали тот факт, что в алгебрах Лейбница выполняется равенство $x(yz) = ayz - azy = a[Y, Z]$. Таким образом, $abf(Y_1, \dots, Y_m) = 0$ для любых $y_s \in L$. Следовательно, $ab \in I_f$.

Из тождества (7) следует, что $abX^m = -baX^m \equiv 0$, а значит, произведение ba принадлежит идеалу I_f и, следовательно, идеал является двусторонним. Заметим, что в идеале I_f справедливо тождество $zf(Y_1, \dots, Y_m) \equiv 0$, которое эквивалентно тождеству $zX^m \equiv 0$, то есть выполняется энгелевость, и по теореме из работы [7] идеал I_f является нильпотентным. Из тождества (8) следует, что для любого элемента a из алгебры L квадрат этого элемента a^2 принадлежит идеалу I_f , следовательно, в факторалгебре L/I_f выполняется тождество $x^2 \equiv 0$, а значит, L/I_f является алгеброй Ли.

Рассмотрим два случая:

- 1) Фактор-алгебра L/I_f не является нильпотентной алгеброй Ли. В этом случае, так как L/I_f принадлежит многообразию U , A^2 является ненильпотентным подмногообразием U . По теореме 2 в этом случае $U = A^2$.
- 2) Фактор-алгебра L/I_f является нильпотентной некоторой степени s . По определению идеала I_f в алгебре L выполняется тождество $y_1 y_2 \dots y_{s+1} X^m \equiv 0$. Следовательно, выполняется также тождество энгелевости, и по теореме из работы [7] многообразие U является нильпотентным. Это противоречит условию теоремы.

Таким образом, ${}_2N$ и A^2 — единственные почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница. ■

Авторы выражают благодарность С. П. Мищенко за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
2. Giambruno A. and Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. American Mathematical Society Providence, RI, 2005. 352 p.
3. Ширшов А. И. и др. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 432 с.
4. Зельманов Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 265–268.

5. *Drensky V. and Cattaneo G. M. P.* Varieties of metabelian Leibniz algebras // J. Algebra Appl. 2002. V. 1. No. 1. P. 31–50.
6. *Череватенко О. И.* Некоторые эффекты роста тождеств линейных алгебр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2008. 69 с.
7. *Фролова Ю. Ю.* О нильпотентности энгелевой алгебры Лейбница // Вестник Московского государственного университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 3. С. 63–65.

REFERENCES

1. *Bakhturin Yu. A.* Tozhdestva v algebrakh Li [Identities of Lie Algebras]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 448 p. (in Russian)
2. *Giambruno A. and Zaicev M.* Polynomial identities and asymptotic methods. American Mathematical Society Providence, RI, 2005. 352 p.
3. *Shirshov A. I. et al.* Kol'tsa, blizkie k assotsiativnym [Rings that are Nearly Associative]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 432 p. (in Russian)
4. *Zel'manov E. I.* Ob engelevykh algebrakh Li [On Engel Lie algebras]. Reports USSR Academy of Sciences, 1987, vol. 292, no. 2, pp. 265–268. (in Russian)
5. *Drensky V. and Cattaneo G. M. P.* Varieties of metabelian Leibniz algebras. J. Algebra Appl., 2002, vol. 1, no. 1, pp. 31–50.
6. *Cherevatenko O. I.* Nekotorye efekty rosta tozhdestv lineynykh algebr [Some Effects of Linear Algebra Identities Increase.] PhD Thesis, Ul'yanovsk, 2008. 69 p. (in Russian)
7. *Frolova Yu. Yu.* O nil'potentnosti engelevoy algebrы Leybnitsa [On the nilpotency of Engel Leibniz algebra.] MSU Bulletin. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. 2011, no. 3, pp. 63–65. (in Russian)