ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.6

СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ПРИМИТИВНЫХ ОРГРАФОВ

В. М. Фомичев

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
ООО «Код безопасности», г. Москва, Россия

При $n \geqslant 4$ доказано, что сложность определения всех n-вершинных минимальных примитивных орграфов, являющихся частью заданного примитивного n-вершинного орграфа Γ, совпадает со сложностью распознавания монотонной булевой функции от s переменных, где s — число дуг (i, j) в Γ, таких, что полустепень исхода вершины i и полустепень захода вершины j превышают 1. Установлено, что при $n \geqslant 4$ все примитивные n-вершинные орграфы с числом дуг $n + 1$ являются минимальными и имеются минимальные примитивные n-вершинные орграфы с числом дуг от $n+2$ до $2n-3$. Описаны минимальные примитивные n-вершинные орграфы с числом дуг $n + 1$ и $n + 2$.

Ключевые слова: *примитивная матрица, примитивный орграф, сильносвязный орграф.*

DOI 10.17223/20710410/28/9

PROPERTIES OF MINIMAL PRIMITIVE DIGRAPHS

V. M. Fomichev

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

E-mail: fomichev@nm.ru

It is proved that, for $n \geqslant 4$, the complexity of the determination of all n-vertex minimal primitive digraphs, which are parts of a given n-vertex primitive digraph Γ, coincides with the complexity of the recognition of a monotone Boolean function in s variables where s is the number of arcs (i, j) in Γ such that the vertex i out-degree and the vertex j in-degree exceed 1. It is found that, for $n \geqslant 4$, all the primitive n-vertex digraphs with $n+1$ arcs are minimal graphs and there are minimal primitive n-vertex digraphs with the number of arcs from $n + 2$ to $2n - 3$. Minimal primitive n-vertex digraphs with $n + 1$ and $n + 2$ arcs are described.

Keywords: *primitive matrix, primitive digraph, strongly connected digraph.*

Введение

Запишем основные обозначения, используемые в работе:
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $n, m \in \mathbb{N}$;
$(a_1, \ldots, a_n)$ — наибольший общий делитель натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$;
2^S — булеан множества S;

$M_0(n)$ — множество всех квадратных 0,1-матриц порядка n;
$M_0^P(n)$ — множество всех примитивных матриц из $M_0(n)$;
$M_0^P(n,m)$ — множество всех матриц из $M_0^P(n)$ с числом единичных элементов m;
$\Gamma(n)$ — множество всех орграфов с n вершинами;
$\Gamma^P(n)$ — множество всех примитивных орграфов с n вершинами;
$\Gamma^P(n,m)$ — множество всех примитивных орграфов с n вершинами и m дугами;
M — матрица смежности вершин орграфа Γ;
$[i,j]$ — простой путь в орграфе Γ из вершины i в вершину j.

В коммуникативных системах для исследования связей между элементами применяется матрично-графовый подход. Система из n элементов описывается с помощью n-вершинного орграфа Γ (или матрицы смежности его вершин $M = (m_{ij})$), в котором дуга (i,j) имеется тогда и только тогда, когда в системе i-й элемент влияет определённым образом на j-й элемент. Например, от i-го элемента непосредственно передаются данные j-му элементу, или i-й элемент является переменной величиной, от которой зависит j-й элемент, и пр., $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Сложность реализации системы характеризуется, в частности, числом связей (дуг орграфа Γ). В [1] введено понятие минимальной примитивной матрицы как матрицы, которая после замены любого положительного элемента нулём не является примитивной. В силу естественной биекции между 0,1-матрицами порядка n и n-вершинными орграфами примитивный орграф Γ минимальный, если любая n-вершинная часть графа Γ не является примитивным графом. Минимальные примитивные матрицы и орграфы представляют интерес с точки зрения экономной реализации коммуникативной системы.

В работе продолжено начатое в [1] исследование свойств минимальных примитивных матриц и орграфов. Рассматриваются орграфы без петель и параллельных дуг.

1. Сложность определения минимальных примитивных n-вершинных орграфов, являющихся частями примитивного n-вершинного орграфа Γ

Обозначим: $M^P_{\min}(n)$ — множество всех минимальных примитивных матриц порядка n; $\Gamma^P_{\min}(n)$ — множество всех минимальных примитивных n-вершинных орграфов, являющихся частями примитивного n-вершинного орграфа Γ.

Оценим по Шеннону (то есть для наилучшего алгоритма при наихудших входных данных) сложность определения $\Gamma^P_{\min}(n)$, где элементарная вычислительная операция есть проверка примитивности любого n-вершинного орграфа или любой 0,1-матрицы порядка n.

Отметим некоторые свойства минимальных примитивных матриц [1].

Утверждение 1. Матрицы $A, B \in M_0(n)$, сопряжённые в группе подстановочных матриц:

а) одновременно примитивные или непримитивные;

б) в случае примитивности одновременно минимальные или неминимальные.

Утверждение 2. Множество $M_0(n)$ образует решётку в смысле отношения частичного порядка $\leqslant$, где $A \leqslant B \Leftrightarrow a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для любых $i,j \in \{1,..,n\}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Множество примитивных матриц $M_0^P(n)$ есть верхняя подполурешётка решётки $M_0(n)$, а множество $M^P_{\min}(n)$ — антицепь, состоящая из всех минимальных элементов подполурешётки $M_0^P(n)$.

Далее используем язык теории графов. В n-вершинном орграфе Γ обозначим p_i и q_i соответственно полустепени захода и исхода вершины $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Утверждение 3. Если (i,j) — дуга орграфа Γ, то $\min\{q_i,p_j\}\geqslant 1$.

Пусть E — множество дуг орграфа Γ, $W\subseteq E$. Обозначим через Γ^W часть орграфа Γ, полученную из Γ удалением множества дуг $E\setminus W$.

Утверждение 4. Если Γ и Γ^W — примитивные орграфы, то $\min\{q_i,p_j\}>1$ для любой дуги $(i,j)\in E\setminus W$.

Доказательство. По утверждению 3 $\min\{q_i,p_j\}\geqslant 1$. Если $\min\{q_i,p_j\}=1$ для некоторой дуги $(i,j)\in E\setminus W$, например $q_i=1$, то из вершины i исходит единственная дуга (i,j). После её удаления вершина становится концевой. Следовательно, получается не сильносвязный и не примитивный орграф. Случай $p_j=1$ доказывается аналогично. ■

Утверждение 5. Если $W\subseteq U$, то из примитивности орграфа Γ^W следует примитивность орграфа Γ^U и из непримитивности орграфа Γ^U следует непримитивность орграфа Γ^W.

Для примитивного орграфа Γ подмножество дуг U назовём тупиковым в E, если орграф Γ^U примитивный и для любого собственного подмножества W множества U орграф Γ^W не примитивный. Отсюда следует, что система всех тупиковых в E подмножеств образует антицепь в решётке 2^E и имеется биекция между множеством $\Gamma^P_{\min}(n)$ и антицепью тупиковых в E подмножеств.

В орграфе Γ обозначим через S подмножество всех дуг (i,j) со свойством $\min\{q_i,p_j\}>1$. Согласно утверждению 4, множество дуг $E\setminus S$ принадлежит любому орграфу из $\Gamma^P_{\min}(n)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Всякое тупиковое в E подмножество содержит $E\setminus S$, и имеется биекция между множеством $\Gamma^P_{\min}(n)$ и антицепью подмножеств Z множества S, таких, что $(E\setminus S)\cup Z$ — тупиковое в E подмножество.

Следствие 1. Пусть $|S|=s$, тогда сложность (по Шеннону) определения $\Gamma^P_{\min}(n)$ равна $\binom{s}{\lfloor s/2\rfloor}+\binom{s}{\lfloor s/2\rfloor+1}$; размер необходимой памяти — порядка 2^s битов.

Доказательство. Согласно утверждению 5, задача определения $\Gamma^P_{\min}(n)$ равносильна задаче распознавания монотонной булевой функции $f:2^S\to\{0,1\}$, где $f(Z)=1$ тогда и только тогда, когда $(E\setminus S)\cup Z$ — множество дуг примитивного орграфа. Сложность распознавания монотонной булевой функции от s переменных равна указанной величине [2, с. 83]. ■

2. Описание минимальных примитивных орграфов

При изучении минимальных примитивных матриц и графов возникают следующие вопросы.

- При каких m класс $\Gamma^P(n,m)$ состоит только из минимальных примитивных графов?
- При каких m класс $\Gamma^P(n,m)$ не содержит минимальных примитивных графов?
- Как для данных n и m описать все минимальные примитивные графы из $\Gamma^P(n,m)$?

Решению некоторых из этих вопросов посвящены следующие результаты.

Теорема 2. При $n\geqslant 3$:

а) $P(n,n+1)\subset P_{\min}(n)$;

б) $\Gamma^P(n,m)$ содержит неминимальные матрицы, $n+2\leqslant m\leqslant n(n-1)$;

в) $\Gamma^P(n,m)$ содержит минимальные матрицы при $m=n+1,\ldots,\max\{n+1,2n-3\}$.

Доказательство.

а) Примитивная матрица M порядка n не имеет нулевых строк и столбцов, значит, число единиц в матрице M не меньше n. Кроме того, любая подстановочная матрица не примитивна. Тогда число единиц в матрице M больше n и любая примитивная матрица из $P(n, n+1)$ минимальная. Заметим, что $P(n, n+1) \neq \varnothing$ при $n \geqslant 3$, пример — матрицы смежности вершин графов Виландта [3, с. 109].

б) Пусть Γ — граф Виландта с множеством вершин $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ и с множеством дуг $\{(n-2, 0)\} \cup \{(i, (i+1) \bmod n) : i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \geqslant 3$. При любом пополнении множества дуг получаем примитивный неминимальный орграф с числом дуг m, где $n + 2 \leqslant m \leqslant n(n-1)$.

в) Для $n = 3$ и для графа Виландта с тремя вершинами теорема выполнена.

Пусть $n \geqslant 4$. Рассмотрим n-вершинный орграф Γ с m дугами, который состоит из объединения r контуров взаимно простых длин $l_1, \ldots, l_r$, где $r, l_1, \ldots, l_r > 1$. Пусть пересечение множеств вершин всех контуров состоит из единственной вершины (обозначим её i), а каждая из остальных вершин орграфа Γ принадлежит ровно одному из контуров. Тогда орграф Γ сильносвязный и примитивный в соответствии с универсальным критерием [4], так как $r > 1$ и $(l_1, \ldots, l_r) = 1$. При $l_1, \ldots, l_r > 1$ удаление любой дуги нарушает сильную связность орграфа Γ и, следовательно, примитивность. Значит, орграф Γ минимальный.

Определим, при каких n и m существует указанный орграф Γ. По условию $m = l_1 + \ldots + l_r$, полустепени захода и исхода всех вершин, кроме i, равны 1, а для вершины i полустепени равны r. По теореме Эйлера m равно полусумме полустепеней захода и исхода всех вершин орграфа Γ, то есть $m = r + n - 1$. В орграфе Γ имеется как минимум два контура взаимно простых длин, следовательно, их наименьшие возможные длины равны 2 и 3 соответственно, отсюда $n \geqslant 4$ и $m \geqslant 5$. При $n \geqslant 4$ наибольшее число контуров r с заданными условиями равно $n - 2$ (один контур длины 3 и $n - 3$ контуров длины 2). Если r пробегает все значения от 2 до $n - 2$, то m пробегает все значения от $n + 1$ до $2n - 3$. ■

В орграфе Γ конкатенацию путей $w = (u, \ldots, i)$ и $w' = (i, \ldots, v)$, то есть путь $(u, \ldots, i, \ldots, v)$, обозначим $w \cdot w'$; вершину i отождествим с простым путём (i, i) длины 0.

Теорема 3. При $n \geqslant 3$ орграф $\Gamma \in \Gamma^P(n, n+1)$ тогда и только тогда, когда Γ есть объединение двух простых контуров взаимно простых длин l и λ, общая часть которых есть путь длины q, где $l > \lambda$; $l + \lambda - q = n + 1$; $0 \leqslant q \leqslant n - 2$; при $q = 0$ общая часть контуров есть вершина.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Gamma \in \Gamma^P(n, n+1)$, тогда Γ не имеет висячих вершин. Значит, в Γ имеется вершина i с полустепенью захода 2, а остальные вершины имеют полустепени захода 1, и имеется вершина j с полустепенью исхода 2, а остальные вершины имеют полустепени исхода 1, где не исключено $i = j$. Согласно утверждению 1, включение $\Gamma \in \Gamma^P(n, n+1)$ инвариантно относительно перенумерации вершин орграфа Γ, поэтому без ограничения общности положим $i = n$.

Если $j = i = n$, то $(p_n, q_n) = (2, 2)$ и $(p_s, q_s) = (1, 1)$ для $s = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, Γ есть объединение двух простых контуров длины l и λ с единственной общей вершиной n. Тогда $q = 0$, $l + \lambda = n + 1$ и $(l, \lambda) = 1$ в соответствии с универсальным критерием примитивности орграфа.

Пусть $j \neq n$, тогда $(p_n, q_n) = (2, 1)$, $(p_j, q_j) = (1, 2)$ и $(p_s, q_s) = (1, 1)$ для $s = 1, \ldots, n-1$, $s \neq j$. Следовательно, Γ есть объединение простого пути $[i, j]$ длины $q > 0$ и двух простых путей $[j, i]_1$ и $[j, i]_2$ длин $l - q$ и $\lambda - q$ соответственно, где множества вершин путей попарно не пересекаются, за исключением начальной и конечной вершин. Отсюда Γ есть объединение контуров $[i,j]\cdot[j,i]_1$ и $[i,j]\cdot[j,i]_2$ длин l и λ, общая часть которых есть путь $[i,j]$. Тогда $(l,\lambda)=1$ в соответствии с универсальным критерием примитивности орграфа. Число дуг в Γ есть сумма длин путей $[i,j]$, $[j,i]_1$ и $[j,i]_2$, то есть $l+\lambda-q=n+1$, где $q\leqslant n-2$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть n-вершинный орграф Γ есть объединение двух простых контуров взаимно простых длин l и λ, общая часть которых есть простой путь длины q, где $l+\lambda-q=n+1$, $0\leqslant q\leqslant n-2$, в случае $q=0$ общая часть контуров есть вершина. Тогда в соответствии с универсальным критерием Γ примитивный, так как $(l,\lambda)=1$. Число дуг в Γ есть число различных дуг, составляющих контуры, то есть $m=l+\lambda-q=n+1$. Число вершин в Γ равно n. ■

Для n-вершинного орграфа Γ обозначим $n_{r,s}$ число вершин с полустепенью захода r и полустепенью исхода s, $0\leqslant r,s,n_{r,s}\leqslant n$. Таблицу положительных чисел $\{n_{r,s}\}$ при всех допустимых значениях r и s назовём степенной структурой орграфа Γ, обозначается $D(\Gamma)$. Таблицу $D(\Gamma)$ запишем в виде $D(\Gamma)=\{(r,s)^{n_{r,s}}\}$, при $n_{r,s}=0$ элемент таблицы опускается. Например, степенная структура контура K длины n имеет вид $D(K)=\{(1,1)^n\}$; степенная структура орграфов, рассмотренных в теореме 3, имеет вид $\{(1,1)^{n-1},(2,2)^1\}$ при $j=n$ и $\{(1,1)^{n-2},(1,2)^1,(2,1)^1\}$ при $j\neq n$.

Заметим, что если графы изоморфны, то их степенные структуры совпадают.

Пусть (i,j) — дуга графа $\Gamma\in\Gamma(n)$. Назовём 1-расширением графа Γ орграф $\Gamma^{(i,j)}$ из $\Gamma(n+1)$, полученный добавлением к графу Γ вершины $n+1$ и заменой дуги (i,j) на две дуги: $(i,n+1)$ и $(n+1,j)$. Если Γ_k есть k-расширение графа Γ, то 1-расширение графа Γ_k назовем $(k+1)$-расширением графа Γ, $k\in\mathbb{N}$.

Пусть $\Gamma\in\Gamma^P(n,m)$ и K^* — система контуров в Γ. Система контуров K^* называется примитивной (минимальной примитивной), если натянутый на K^* подграф является примитивным (минимальным примитивным). Дугу (i,j) графа Γ назовем K^*-изолированной, если (i,j) не принадлежит ни одному из контуров системы K^*.

Теорема 4. Если $\Gamma\in\Gamma^P(n,m)$ при некоторых натуральных n и m, K^* — примитивная (минимальная примитивная) система контуров в Γ и в Γ имеется K^*-изолированная дуга (i,j), то при любом натуральном k имеется орграф Γ_k из $\Gamma^P(n+k,m+k)$, являющийся k-расширением графа Γ и содержащий систему K^*. Если при этом орграф Γ минимальный, то имеется k-расширение Γ_k, являющееся минимальным примитивным графом.

Доказательство. Индукция по k. Пусть $k=1$. Заметим, что система K^* содержится не только в Γ, но и в 1-расширении $\Gamma^{(i,j)}$ графа Γ, так как построение $\Gamma^{(i,j)}$ с использованием K^*-изолированной дуги (i,j) не изменяет системы K^*. При этом дуги $(i,n+1)$ и $(n+1,j)$ графа $\Gamma^{(i,j)}$ являются K^*-изолированными. Тогда в соответствии с универсальным критерием примитивности орграф $\Gamma^{(i,j)}$ является примитивным.

Если орграф Γ минимальный, то система контуров K^* минимальная примитивная. Удаление из Γ дуги (i,j) нарушает сильную связность; в силу K^*-изолированности дуги (i,j) невозможно нарушить примитивность при сохранении сильной связности. В силу минимальности орграфа Γ удаление любой из остальных дуг нарушает в Γ либо сильную связность, либо примитивность. Аналогично удаление дуги $(i,n+1)$ (или дуги $(n+1,j)$) из орграфа $\Gamma^{(i,j)}$ нарушает его сильную связность, удаление любой из остальных дуг нарушает в $\Gamma^{(i,j)}$ либо сильную связность, либо примитивность. Значит, орграф $\Gamma^{(i,j)}$ из $\Gamma^P(n+k,m+k)$ является минимальным примитивным.

Пусть теорема доказана для k-расширения Γ_k орграфа Γ при натуральных числах $1,\ldots,k$. Так как Γ_k удовлетворяет тем же условиям, что и Γ, рассуждения при переходе от Γ_k к Γ_{k+1} можно повторить. ■

Теорема 5. Если минимальный примитивный орграф $\Gamma \in \Gamma^P(n, n+2)$, то $D(\Gamma)$ принадлежит одному из классов, перечисленных в таблице:

№	n	$D(\Gamma)$	№	n	$D(\Gamma)$
1	$\geqslant 5$	$\{(1,1)^{n-1},(3,3)^1\}$	6	$\geqslant 6$	$\{(1,1)^{n-3},(2,1)^2,(1,3)^1\}$
2	$\geqslant 5$	$\{(1,1)^{n-2},(2,1)^1,(2,3)^1\}$	7	$\geqslant 6$	$\{(1,1)^{n-3},(1,2)^2,(3,1)^1\}$
3	$\geqslant 5$	$\{(1,1)^{n-2},(1,2)^1,(3,2)^1\}$	8	$\geqslant 6$	$\{(1,1)^{n-3},(1,2)^1,(2,1)^1,(2,2)^1\}$
4	$\geqslant 5$	$\{(1,1)^{n-2},(2,2)^2\}$	9	$\geqslant 6$	$\{(1,1)^{n-4},(1,2)^2,(2,1)^2\}$
5	$\geqslant 4$	$\{(1,1)^{n-2},(1,3)^1,(3,1)^1\}$			

Доказательство. Если сильносвязный орграф $\Gamma \in \Gamma^P(n, n+2)$, то числа $n_{r,s}$ связаны системой двух диофантовых уравнений, где первое уравнение перечисляет удвоенное число дуг в Γ (в соответствии с теоремой Эйлера), а второе — число вершин в Γ:

$$2n_{1,1}+3n_{1,2}+3n_{2,1}+4n_{1,3}+4n_{2,2}+4n_{3,1}+5n_{1,4}+5n_{2,3}+5n_{3,2}+5n_{4,1}+6n_{1,5}+\ldots$$
$$+nn_{n-1,1}=2n+4,$$
$$n_{1,1}+n_{1,2}+n_{2,1}+n_{1,3}+n_{2,2}+n_{3,1}+n_{1,4}+n_{2,3}+n_{3,2}+n_{4,1}+n_{1,5}+\ldots+n_{n-1,1}=n.$$

Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, получаем

$$\begin{gathered}n_{1,2}+n_{2,1}+2n_{1,3}+2n_{2,2}+2n_{3,1}+3n_{1,4}+3n_{2,3}+3n_{3,2}+3n_{4,1}+4n_{1,5}+\\ \ldots+4n_{5,1}+5n_{1,6}+\ldots+(n-2)n_{n-1,1}=4.\end{gathered} \tag{1}$$

Определим решения уравнения (1) относительно целых неотрицательных чисел $n_{r,s}$ и укажем примитивные графы без петель, соответствующие полученным решениям.

Заметим, что $n_{r,s}=0$ при $r+s>6$, иначе левая часть уравнения (1) больше правой части, следовательно, уравнение (1) равносильно следующему упрощённому уравнению:

$$\begin{gathered}n_{1,2}+n_{2,1}+2n_{1,3}+2n_{2,2}+2n_{3,1}+3n_{1,4}+3n_{2,3}+3n_{3,2}+3n_{4,1}+\\ +4n_{1,5}+4n_{2,4}+4n_{3,3}+4n_{4,2}+4n_{5,1}=4.\end{gathered} \tag{2}$$

Имеется 9 классов решений уравнения (2).

1-й к л а с с. Если $n_{3,3}=1$, то из уравнения (2) имеем

$$n_{1,2}=n_{2,1}=n_{1,3}=n_{2,2}=n_{3,1}=n_{1,4}=n_{2,3}=n_{3,2}=n_{4,1}=n_{1,5}=n_{2,4}=n_{4,2}=n_{5,1}=0.$$

В этом случае Γ есть объединение трёх контуров, пересечение множеств вершин которых состоит из единственной вершины, а любая другая вершина принадлежит только одному из контуров (рис. 1), то есть $D(\Gamma)=\{(1,1)^{n-1},(3,3)^1\}$.

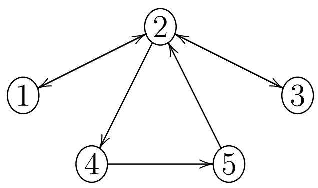

Рис. 1. Граф Γ, $n=5$, $D(\Gamma)=\{(1,1)^4,(3,3)^1\}$

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 1, $K^* = \{(1,2),(2,4,5)\}$, дуга $(2,3)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+4},(3,3)^1\}$, и из минимальности орграфа Γ следует минимальность орграфов Γ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Если $n_{3,3} = 0$ и $n_{2,4} = 1$, то из уравнения (2) имеем

$$n_{1,2} = n_{2,1} = n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = n_{1,4} = n_{2,3} = n_{3,2} = n_{4,1} = n_{1,5} = n_{4,2} = n_{5,1} = 0.$$

В этом случае в Γ имеется вершина i, где $p_i = 2$, $q_i = 4$, то есть имеются дуги (i,a), (i,b), (i,c), (i,d), где i,a,b,c,d различны. Орграф Γ сильносвязный, поэтому в Γ имеются простые пути $[a,i]$, $[b,i]$, $[c,i]$ и $[d,i]$. Так как $p_i = 2$, эти пути сходятся в два пути, то есть в Γ имеется вершина $j \neq i$, где $p_j \geqslant 2$. Тогда $n_{r,1} \geqslant 1$ при $r \geqslant 2$, то есть имеем противоречие.

Аналогичные противоречия получаем в следующих случаях:

а) $n_{3,3} = 0$ и $n_{1,5} = 1$, иначе в Γ имеется вершина, в которой сходятся от двух до четырёх путей, откуда следует $n_{2,1} + n_{3,1} + n_{4,1} \geqslant 1$;

б) $n_{3,3} = 0$ и $n_{5,1} = 1$, иначе в Γ имеется вершина, из которой расходятся от двух до четырёх путей, откуда следует $n_{1,2} + n_{1,3} + n_{1,4} \geqslant 1$;

в) $n_{3,3} = 0$ и $n_{4,2} = 1$, иначе в Γ имеется вершина, из которой расходятся не менее двух путей, то есть $n_{1,r} \geqslant 1$ при $r \geqslant 2$.

Значит, при $n_{3,3} = 0$ имеем $n_{1,5} = n_{2,4} = n_{4,2} = n_{5,1} = 0$ и уравнение (2) упрощается:

$$n_{1,2} + n_{2,1} + 2n_{1,3} + 2n_{2,2} + 2n_{3,1} + 3n_{1,4} + 3n_{2,3} + 3n_{3,2} + 3n_{4,1} = 4. \tag{3}$$

Из (3) следует, что не более чем одна из величин $n_{1,4}$, $n_{2,3}$, $n_{3,2}$, $n_{4,1}$ отлична от нуля.

2-й класс. Если $n_{2,3} = 1$, то из уравнения (3) имеем $n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = n_{1,4} = n_{3,2} = n_{4,1} = 0$, иначе левая часть уравнения (3) больше правой части. В этом случае в Γ имеется вершина i с полустепенью захода 2 и с полустепенью исхода 3, то есть имеются дуги (i,a), (i,b), (i,c), где i,a,b,c различны. Орграф Γ сильносвязный, поэтому в Γ имеются простые пути $[a,i]$, $[b,i]$ и $[c,i]$. Так как $p_i = 2$ и $n_{3,1} = 0$, то в Γ имеется вершина $j \neq i$, в которой сходятся два пути, то есть $n_{2,1} \geqslant 1$. Из уравнения (3) следует, что $n_{2,1} = 1$ и $n_{1,2} = 0$. Тогда Γ есть объединение трёх контуров, они пересекаются в единственной вершине i, и два контура сходятся в вершине $j \neq i$, то есть $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-2},(2,1)^1,(2,3)^1\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 2, $K^* = \{(1,5),(1,3,4)\}$, дуга $(2,3)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3},(2,1)^1,(2,3)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

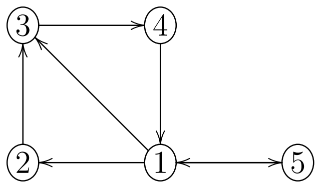

Рис. 2. Граф Γ, $n = 5$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3,(2,1)^1,(2,3)^1\}$

3-й класс. Аналогично 2-му классу, при $n_{3,2} = 1$ имеем $n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = n_{1,4} = n_{2,3} = n_{4,1} = 0$. Кроме того, $n_{1,2} = 1$ (из некоторой вершины расходятся два пути) и $n_{2,1} = 0$. В этом случае Γ — объединение трёх контуров, пересечение множеств их вершин состоит из единственной вершины i, и два контура расходятся в вершине $j \neq i$, то есть $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-2}, (1,2)^1, (3,2)^1\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 3, $K^* = \{(1,5), (1,4,3)\}$, дуга $(3,2)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3}, (1,2)^1, (3,2)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

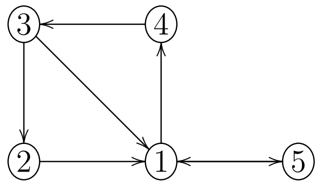

Рис. 3. Граф Γ, $n = 5$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3, (1,2)^1, (3,2)^1\}$

Если $n_{1,4} = 1$, то $n_{2,3} = n_{3,2} = n_{4,1} = 0$. Тогда в Γ имеется вершина i, где $p_i = 1$, $q_i = 4$, то есть имеются дуги (i,a), (i,b), (i,c), (i,d), где i,a,b,c,d различны. Орграф Γ сильносвязный, поэтому в Γ имеются простые пути $[a,i]$, $[b,i]$, $[c,i]$ и $[d,i]$. Так как $p_i = 1$ и $n_{4,1} = 0$, в Γ имеются либо две вершины, в которых сходятся соответственно два и три пути, либо три вершины, в которых сходятся по два пути. Следовательно, либо $n_{3,1} + n_{2,1} \geqslant 2$, либо $n_{2,1} \geqslant 3$. В обоих случаях левая часть уравнения (3) больше правой части.

Аналогичное противоречие получается при $n_{4,1} = 0$ и $n_{1,4} = n_{2,3} = n_{3,2} = 0$. Таким образом, при $n_{2,3} = n_{3,2} = 0$ имеем $n_{1,4} = n_{4,1} = 0$, и уравнение (3) равносильно упрощённому уравнению

$$n_{1,2} + n_{2,1} + 2n_{1,3} + 2n_{2,2} + 2n_{3,1} = 4. \tag{4}$$

Из (4) следует, что из величин $n_{1,3}$, $n_{2,2}$, $n_{3,1}$ не более чем две отличны от нуля и не более чем одна равна 2.

Если $n_{1,3} = 2$, то $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{2,2} = n_{3,1} = 0$. Тогда в Γ имеется вершина i, где $p_i = 1$, $q_i = 3$, и дуги (i,a), (i,b), (i,c), где i,a,b,c различны, и простые пути $[a,i]$, $[b,i]$ и $[c,i]$. Так как $p_i = 1$ и $n_{3,1} = 0$, в Γ имеются две вершины, в которых сходятся по два пути. Следовательно, $n_{2,1} = 2$ — имеем противоречие. Аналогичные рассуждения отвергают следующие случаи:

— $n_{3,1} = 2$, $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{1,3} = n_{2,2} = 0$;
— $n_{2,2} = n_{3,1} = 1$, $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{1,3} = 0$;
— $n_{1,3} = n_{2,2} = 1$, $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{3,1} = 0$;
— $n_{1,3} = 1$, $n_{1,2} = 2$, $n_{2,1} = n_{2,2} = n_{3,1} = 0$;
— $n_{3,1} = 1$, $n_{2,1} = 2$, $n_{1,2} = n_{1,3} = n_{2,2} = 0$;
— $n_{1,2} = 3$, $n_{2,1} = 1$, $n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = 0$;
— $n_{1,2} = 1$, $n_{2,1} = 3$, $n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = 0$.

В остальных случаях уравнение (4) имеет ещё шесть классов решений.

4-й к л а с с. Если $n_{2,2} = 2$, то $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{1,3} = n_{3,1} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-2}, (2,2)^2\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 4, $K^* = \{(1,2,3), (1,2,3,4)\}$, дуга $(1,5)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3}, (2,2)^2\}$, $k \in \mathbb{N}$.

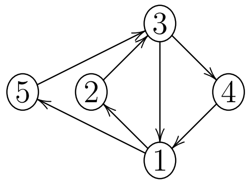

Рис. 4. Граф Γ, $n = 5$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3, (2,2)^2\}$

5-й к л а с с. Если $n_{1,3} = n_{3,}1 = 1$, то, согласно уравнению (4), $n_{1,2} = n_{2,1} = n_{2,2} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-2}, (1,3)^1, (3,1)^1\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 5, $K^* = \{(1,3), (1,2,3)\}$, дуга $(1,4)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+2}, (1,3)^1, (3,1)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

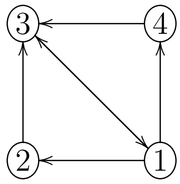

Рис. 5. Граф Γ, $n = 4$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^2, (1,3)^1, (3,1)^1\}$

6-й к л а с с. Если $n_{1,3} = 1$, $n_{2,1} = 2$, то, согласно уравнению (4), $n_{1,2} = n_{3,1} = n_{2,2} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-3}, (2,1)^2, (1,3)^1\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 6, $K^* = \{(1,2,5), (1,2,3,4)\}$, дуга $(2,6)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3}, (2,1)^2, (1,3)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

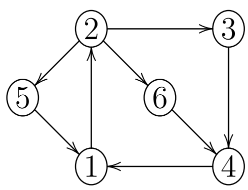

Рис. 6. Граф Γ, $n = 6$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3, (2,1)^2, (1,3)^1\}$

7-й к л а с с. Если $n_{3,1} = 1$, $n_{1,2} = 2$, то, согласно уравнению (4), $n_{2,1} = n_{2,2} = n_{1,3} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-3}, (1,2)^2, (3,1)^1\}$.

Для орграфа Γ, изображённого на рис. 7, $K^* = \{(1,2,5), (1,2,3,4)\}$, дуга $(6,1)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Γ, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3}, (1,2)^2, (3,1)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

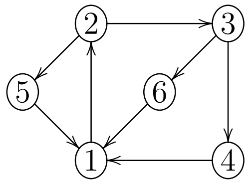

Рис. 7. Граф Г, $n = 6$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3, (1,2)^2, (3,1)^1\}$

8-й к л а с с. Если $n_{2,2} = n_{1,2} = n_{2,1} = 1$, то, согласно уравнению (4), $n_{1,3} = n_{3,1} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-3}, (1,2)^1, (2,1)^1, (2,2)^1\}$.

Для орграфа Г, изображённого на рис. 8, $K^* = \{(1,2,3,4), (1,5,2,3,4)\}$, дуга $(6,4)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Г, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+3}, (1,2)^1, (2,1)^1, (2,2)^1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

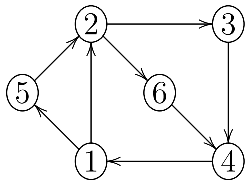

Рис. 8. Граф Г, $n = 6$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^3, (1,2)^1, (2,1)^1, (2,2)^1\}$

9-й к л а с с. Если $n_{1,2} = n_{2,1} = 2$, то, согласно уравнению (4), $n_{1,3} = n_{2,2} = n_{3,1} = 0$ и $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-4}, (1,2)^2, (2,1)^2\}$.

Для орграфа Г, изображённого на рис. 9, $K^* = \{(1,2,5), (5,4,3,2)\}$, дуга $(3,6)$ является K^*-изолированной. Тогда по теореме 4 имеется минимальное примитивное k-расширение Γ_k орграфа Г, где $D(\Gamma_k) = \{(1,1)^{k+2}, (1,2)^2, (2,1)^2\}$, $k \in \mathbb{N}$.

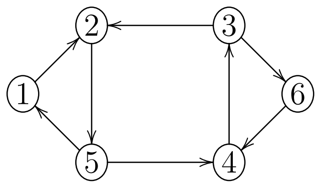

Рис. 9. Граф Г, $n = 6$, $D(\Gamma) = \{(1,1)^2, (1,2)^2, (2,1)^2\}$

В силу полноты выполненного перебора вариантов не существует минимальных примитивных графов из $\Gamma^P(n, n+2)$ с другими степенными структурами. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бар-Гнар Р. И., Фомичев В. М.* О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 7–9.
2. *Варфоломеев А. А., Фомичев В. М.* Информационная безопасность. Математические основы криптологии. Ч. I. М.: МИФИ, 1995. 114 с.
3. *Фомичев В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 101–112.

4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.

REFERENCES

1. *Bar-Gnar R. I., Fomichev V. M.* O minimal'nykh primitivnykh matritsakh [About the minimal primitive matrices]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2014, no. 7, pp. 7–9. (in Russian)
2. *Varfolomeev A. A., Fomichev V. M.* Informatsionnaya Bezopasnost'. Matematicheskie Osnovy Kriptologii [Information Security. Mathematical Foundations of Cryptology]. Part I. Moscow, MEPhI Publ., 1995. 114 p. (in Russian)
3. *Fomichev V. M.* Otsenki eksponentov primitivnykh grafov [The estimates of exponents for primitive graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2(12), pp. 101–112. (in Russian)
4. *Harary F.* Graph Theory. AW, 1969.