

**ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

УДК 004.942

**КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ**

Д. В. Алексеев\*, Г. А. Казунина\*\*, А. В. Чередниченко\*\*

\* *Кемеровский институт (филиал) Российского экономического университета  
им. Г. В. Плеханова, г. Кемерово, Россия*

\*\* *Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева,  
г. Кемерово, Россия*

Построен трёхмерный вероятностный клеточный автомат для моделирования эволюции кластерной структуры элементарных повреждений в нагруженных материалах. Проведено сравнение статистических характеристик временных рядов «число кластеров» и «число элементарных повреждений» трёхмерного и исследованного ранее двумерного клеточных автоматов. Показано, что переход временной автокорреляционной функции случайного процесса «число элементарных повреждений» в область отрицательных корреляций и появление второго линейного участка на статистике нормированного размаха Херста можно интерпретировать как предвестники перехода материала на стадию, непосредственно предшествующую необратимому разрушению. Установлено, что в трёхмерном случае существуют два качественно различных режима эволюции кластерной структуры, контролируемых вероятностью прорастания периметра кластера повреждений.

**Ключевые слова:** *клеточный автомат, кластеры элементарных повреждений, прогнозирование разрушения.*

DOI 10.17223/20710410/28/11

**CELLULAR AUTOMATON SIMULATION OF THE FRACTURE  
PROCESS FOR BRITTLE MATERIALS**

D. V. Alekseev\*, G. A. Kazunina\*\*, A. V. Cherednichenko\*\*

\* *Kemerovo branch of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russia*

\*\* *Kuzbass State Technical University named after T. F. Gorbachev, Kemerovo, Russia*

**E-mail:** dmitriyalekseev@live.ru, gt-kg@yandex.ru, allacherednichenk@rambler.ru

A three-dimensional probabilistic cellular automaton is constructed to simulate the evolution of cluster structure of elementary damages in loaded materials. The comparison of the statistical characteristics of time series “number of clusters” and “number of elementary damages” are made for three-dimensional and two-dimensional cellular automata. It is shown, that the transition of the time autocorrelation function of a random process “number of elementary damages” to the range of negative correlations and the emergence of the second linear portion on the statistics of the normalized Hurst’s range can be interpreted as presages of material transition to the stage preceding to complete destruction. It is found that, for the three-dimensional model based

on the value of probability of damage cluster perimeter germination, there are two qualitatively different modes of damage accumulation.

**Keywords:** *cellular automaton, damage clusters, fracture prediction.*

### Введение

Методы импульсной эмиссии (акустической и электромагнитной) используются в настоящее время как неразрушающие методы контроля прочности твёрдых материалов [1, 2]. При этом выявление тех параметров потока импульсной эмиссии, которые можно интерпретировать как предвестники разрушения материала, остаётся главной задачей и требует дополнительного исследования. Для прогнозирования разрушения главный интерес представляет пространственное распределение элементарных повреждений и их кластерная структура, тогда как характеристики импульсной эмиссии дают о ней только косвенную информацию [1, 2]. Одновременное наблюдение накопления повреждений и образуемой ими кластерной структуры в динамике на современном уровне развития технологии не представляется возможным. Поэтому является актуальным проведение подобного исследования методами компьютерного моделирования. В пользу такого подхода свидетельствует и наличие общих закономерностей на стадии, предшествующей разрушению материала [3]. По данным акустического эксперимента микротрещины, например, в горных породах образуются преимущественно на мезоскопическом уровне, и их средний размер находится в пределах  $(1,4\text{--}28,4) \cdot 10^{-6}$  м. Поэтому процесс перехода разрушения на макроскопический уровень принципиально может быть описан без обращения к подробностям динамики отдельных элементарных актов, а с опорой только на геометрические характеристики рассматриваемой структуры. Простейшими моделями такого рода являются перколяционные модели, в рамках которых переход к макроскопическому разрушению описывается как геометрический фазовый переход.

Поскольку случайный процесс накопления повреждений в хрупких материалах является стохастическим, нелинейным и необратимым, адекватной математической моделью для описания этого процесса является модель вероятностного клеточного автомата, которая успешно используется для анализа сложных пространственно распределённых физико-химических процессов [4–6]. Так, в работах [7, 8] построена двумерная модель накопления повреждений и показано, что перед разрушением формируются степенные распределения дефектов по размерам, наличие которых является одним из признаков состояния самоорганизованной критичности. В работах [9, 10] разработана физическая концепция, математическая модель и комплекс программ для одновременного исследования кинетического процесса накопления повреждений и пространственно-временной эволюции их кластерной структуры в хрупких материалах при помощи нового двумерного вероятностного клеточного автомата. Проведённые модельные эксперименты позволили выявить параметры процесса накопления повреждений, характерные для неравновесных систем, склонных к катастрофам. Предложен новый качественный критерий перехода материала на стадию, непосредственно предшествующую разрушению, основанный на изломе нормированного размаха Херста и переходе выборочной временной корреляционной функции в отрицательную область. Настоящая работа является продолжением работ [9, 10] на трёхмерный случай и посвящена сопоставлению статистических характеристик временных рядов «число кластеров повреждений» и «число элементарных повреждений» для трёхмерного и двумерного клеточных автоматов.

## 1. Физическая концепция модели

Согласно кинетической теории прочности [1], процесс образования элементарных повреждений твёрдых материалов является термоактивационным стохастическим процессом. Поэтому для моделирования накопления повреждений предлагается вероятностный клеточный автомат, работа которого определяется набором вероятностей, характеризующих процессы образования элементарных повреждений по нескольким взаимодополняющим механизмам и генерирующих временные ряды числа элементарных повреждений и числа кластеров элементарных повреждений как результат эволюции пространственной кластерной структуры.

Вероятность образования нового элементарного повреждения на свободном узле решётки (вероятность оккупации)  $p_{occ}$  отображает интенсивность процесса разрушения материала под воздействием механических напряжений, усреднённых в пространственных масштабах, много больших характерного размера элементарного повреждения, и определяется внешними условиями нагружения материала. Вероятность прорастания периметра кластера повреждений  $p_{spr}$  отображает увеличенную интенсивность процесса разрушения материала под действием локальных перенапряжений вблизи уже имеющегося элементарного повреждения (кластера повреждений). Вероятность  $p_{mer}$  слияния кластеров, сблизившихся на критическое расстояние, учитывает взаимное влияние пары кластеров повреждений на их встречный рост. Разработанный клеточный автомат позволяет реализовывать различные сценарии моделирования накопления повреждений. В настоящей работе проводится сравнение однородного статического и динамического внутреннего сценариев, характеристики которых представлены в таблице.

### Сценарии накопления повреждений

Сценарий	Вероятности, контролирующие процесс
Однородный статический	Постоянные вероятности оккупации $p_{occ}$ , прорастания периметра $p_{spr}$ и слияния кластеров $p_{mer}$
Динамический внутренний	Постоянные вероятности оккупации $p_{occ}$ и слияния кластеров $p_{mer}$ ; зависящая от размера кластера вероятность прорастания периметра $p_{spr}(R) = p_{spr} \cdot e^{\frac{\gamma\sigma\sqrt[4]{R^2}}{kT\sqrt{l}}}$ Здесь $l^{-1/2}\sigma\sqrt[4]{R^2}$ — модельная оценка напряжения, где $l$ — характерный размер элементарного повреждения [9, 10]

После выбора сценария моделирования и ввода входных параметров каждая итерация алгоритма генерации случайного процесса накопления повреждений работает в следующей последовательности. На каждой итерации работы автомата сначала образуются повреждения на неповреждённых узлах решётки, проращиваются периметры существующих кластеров; сливаются кластеры, сблизившиеся на критическое расстояние, проводится маркировка кластеров, что формирует кластерную структуру элементарных повреждений на данной итерации.

Конфигурация кластерной структуры на решётке на каждой итерации задаётся числом кластеров, а также характеристиками каждого кластера, такими, как масса (число элементов в кластере), среднеквадратичный радиус, размахи по строкам, столбцам, слоям. В результате каждая итерация даёт по одной точке в выборки временных рядов «число элементарных повреждений» и «число кластеров элементарных повреждений», по которым вычисляются характеристики этих временных рядов.

На каждой последующей итерации предыдущая кластерная структура заменяется новой кластерной структурой с автоматическим обновлением всех характеристик кластеров, то есть кластерная структура эволюционирует.

Конечной стадией эволюции кластерной структуры считается конфигурация, в которой образуется кластер, соединяющий противоположные грани куба. Образование соединяющего кластера интерпретируется как разрушение системы, а число итераций, необходимых для образования соединяющего кластера, отождествляется с временем до разрушения.

## 2. Формализация 3D-модели

Согласно алгоритму параллельных подстановок (АПП) [4], клеточный автомат (КА) представляем как композицию двух автоматов. Основной автомат №1 действует независимо, моделируя процесс разрушения системы, создаёт фрактальную кластерную структуру. Вспомогательный клеточный автомат №2 выполняет маркировку кластеров после каждой итерации работы основного автомата №1. Такая маркировка необходима для идентификации каждого отдельного кластера и описания кластерной структуры в целом.

Для формализации предложенной выше физической модели накопления повреждений необходимо различать внутренние (оккупированные) клетки и клетки внешнего периметра кластера повреждений. При этом внешний периметр (далее просто периметр) образуют клетки кластера повреждений, которые соприкасаются с неповреждёнными (неоккупированными) клетками. Поэтому алфавит основного КА, описывающий возможные состояния клетки, задаём как множество векторов из двух булевых компонент  $u = (a, b)$ :

$$A_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Здесь первый символ  $a = 0$  ( $a = 1$ ) означает, что клетка свободна (оккупирована). Второй символ  $b = 0$  ( $b = 1$ ) показывает, что клетка не принадлежит (принадлежит) периметру кластера повреждений. В итоге клетка в заданный момент времени может находиться в одном из следующих допустимых состояний  $u$ :

- $(0,0)$  — клетка свободна и не принадлежит периметру;
- $(1,0)$  — клетка оккупирована и не принадлежит периметру (внутренняя клетка кластера повреждений);
- $(0,1)$  — клетка осталась свободной при проверке состояния клеток периметра кластера на предыдущей итерации («мёртвая клетка периметра»);
- $(1,1)$  — клетка оккупирована и является клеткой периметра.

Задавая конечное множество имён (координат) клеток в дискретном пространстве как  $M_1 = \{(i, j, k) : i, j, k = 0, 1, \dots, n\}$ , определяем шаблон соседства

$$T(i, j, k) = \{(i, j, k), \phi_1(i, j, k), \phi_2(i, j, k), \phi_3(i, j, k), \phi_4(i, j, k), \phi_5(i, j, k), \phi_6(i, j, k)\},$$

который указывает для каждой клетки ее ближайших соседей следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_1(i, j, k) &= (i - 1, j, k); & \phi_2(i, j, k) &= (i + 1, j, k); \\ \phi_3(i, j, k) &= (i, j - 1, k); & \phi_4(i, j, k) &= (i, j + 1, k); \\ \phi_5(i, j, k) &= (i, j, k - 1); & \phi_6(i, j, k) &= (i, j, k + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, множество клеток

$$\Omega_1(t) = \{(u, (i, j, k)_1) : i, j, k = 0, 1, \dots, n; u \in A_1\}$$

задаёт клеточный массив КА №1.

Согласно введённым определениям, кластером  $C_n$  называется множество клеток  $((a, b), (i, j, k))$ , каждая из которых имеет хотя бы одного соседа  $\phi_d(i, j, k) \in T(i, j, k)$  в состоянии  $u = (1, b)$ . Если оккупированная клетка находится в состоянии  $u = (1, 1)$ , а все соседи являются неповреждёнными и находятся в состоянии  $u = (0, 0)$ , то клетка считается одиночным кластером и в то же время клеткой прорастающего периметра.

Состояния клетки в КА №1 изменяются под действием локальных операторов, соответствующих следующим действиям:  $\theta_1(i, j, k)$  — оккупация клетки (образование нового элементарного повреждения),  $\theta_2(i, j, k)$  — прорастание периметра кластера и  $\theta_3(i, j, k)$  — слияние кластеров. Эти действия, согласно [4], записываются в общем виде как подстановка

$$\theta(i, j, k) : S(i, j, k) \cup S''(i, j, k) \xrightarrow{p} S'(i, j, k).$$

Здесь  $S(i, j, k)$ ,  $S''(i, j, k)$  и  $S'(i, j, k)$  — локальные конфигурации:

- $S(i, j, k) = \{(v_0(i, j, k), (i, j, k)), \dots, (v_d(i, j, k), \phi_d(i, j, k))\}$  — базовая конфигурация;
- $S''(i, j, k) = \{(w_0(i, j, k), \psi_0(i, j, k)), \dots, (w_d(i, j, k), \psi_d(i, j, k))\}$  — контекст;
- $S'(i, j, k) = \{(v'_0(i, j, k), (i, j, k)), \dots, (v'_d(i, j, k), \phi_d(i, j, k))\}$  — правая часть,

где  $(v_0(i, j, k), (i, j, k))$  — узловая клетка подстановки  $S$ , принимающая допустимое состояние  $u$ ;  $v'_d = f_d(v_0, \dots, v_d, w_0, \dots, w_d)$  — функция переходов. Применение оператора  $\theta(i, j, k)$  к клетке  $(i, j, k) \in M_1$  состоит в замене значений клеток базовой конфигурации  $S(i, j, k)$  на состояния клеток правой части  $S'(i, j, k)$ , вычисленных с помощью функции перехода  $v'_d$ .

Оператор  $\theta_1(i, j, k)$  выполняет операцию оккупации свободных клеток с вероятностью оккупации  $p_{occ}$  с одновременным образованием кластеров из одной клетки при условии, что данная клетка окружена только свободными клетками:

$$\theta_1(i, j, k) : \{(0, 0), (i, j, k)\} \cup \{((0, 0), \phi_1(i, j, k)), \dots, ((0, 0), \phi_6(i, j, k)), \} \xrightarrow{p_{occ}} \{v_0, (i, j, k)\},$$

$$\text{где } v_0(i, j, k) = \begin{cases} (1, 1), & \text{если } p_{occ} \leq \text{Rnd}, \\ (0, 0), & \text{если } p_{occ} > \text{Rnd}, \end{cases}$$

Rnd — случайное число, равномерно распределённое в диапазоне  $[0, 1]$ .

Оператор  $\theta_2(i, j, k)$  выполняет операцию проращивания кластеров по периметру, обновляя периметры кластеров следующим образом: ближайшие соседи клеток периметра уже существующих кластеров присоединяются к кластеру с вероятностью  $p_{spr}$ , которая в случае динамического внутреннего сценария моделирования зависит от размера кластера (среднеквадратичного радиуса). Другими словами, если свободная клетка  $((0, 0), (i, j, k))$  является соседней с клеткой периметра, то она с вероятностью  $p_{spr}$  переходит в состояние  $u = (1, 1)$ , то есть становится клеткой нового периметра. Одновременно клетка периметра становится внутренней клеткой кластера, то есть получает состояние  $u = (1, 0)$ . Но если при сканировании ближайших соседей клетка не перешла в состояние  $u = (1, 1)$ , она становится «мёртвой клеткой периметра», переходя в состояние  $u = (0, 1)$ . Заметим, что в дальнейшем росте кластера за счёт проращивания периметра участвуют только клетки в состоянии  $u = (1, 1)$ . Поэтому оператор  $\theta_2(i, j, k)$  имеет вид

$$\theta_2(i, j, k) : \{(0, 0), (i, j, k)\} \cup \{(1, 1), \phi_d(i, j, k)\} \xrightarrow{p_{spr}} \{(v_0, (i, j, k)), (v_d, \phi_d(i, j, k))\},$$

где  $d \in \{1, \dots, 6\}$ ,

$$v_0(i, j, k) = \begin{cases} (1, 1), & \text{если } p_{spr} \leq \text{Rnd}, \\ (0, 1), & \text{если } p_{spr} > \text{Rnd}; \end{cases} \quad v_d(i, j, k) = \begin{cases} (1, 0), & \text{если } p_{spr} \leq \text{Rnd}, \\ (1, 1), & \text{если } p_{spr} > \text{Rnd}. \end{cases}$$

Алгоритм работы КА итерационный. Первой итерацией автомата №1, когда все клетки свободны, является оккупация свободных клеток клеточного массива  $\Omega_1(t)$  с вероятностью  $p_{\text{occ}}$  путём применения оператора  $\theta_1(i, j, k)$ .

Непосредственно после этой итерации основного КА второй клеточный автомат №2 выполняет первую маркировку кластеров: присваивает каждой оккупированной клетке (состояния  $u = (1, 1)$ ) номер кластера, которому она принадлежит. Поэтому алфавит вспомогательного клеточного автомата задаётся как совокупность номеров  $A_2 = \{1, 2, \dots, N_{\text{max}}\}$ , где  $N_{\text{max}}$  — максимальное число кластеров, полученное в данной итерации работы автомата. Множество имён клеток вспомогательного автомата изоморфно множеству имён клеток основного автомата:  $M_1 \sim M_2$ . При этом второй КА №2 функционирует, используя КА №1 как контекст и создавая соответствующий порядок клеточного массива  $(u, (i, j, k)_1) \in \Omega_1(t)$ .

Маркировка кластеров выполняется согласно алгоритму, который подобен алгоритму роста кластеров Хамерсли — Лиса — Александровица [11]. Простейший вариант этого алгоритма на кубической решётке можно описать следующим образом. Создаётся «вспомогательный массив клеток», который в дальнейшем будет использован маркировкой; первоначальные значения его элементов соответствуют номерам оккупированных клеток.

Первая итерация работы КА №2 начинается сканированием клеточного массива  $\Omega_1(t) = \{u, (i, j, k)_1 : i, j, k = 0, 1, \dots, n\}$  и при обнаружении оккупированной клетки (на первой итерации основного КА это состояние  $u = (1, 1)$ ) продолжается созданием кластера, то есть присвоением клетке выбранного кластера определённого номера:

$$\theta_4(i, j, k) : \{(1, 1), (i, j, k)_1\} \cup \{((0, 0), \phi_d(i, j, k)_1), ((0, 1), \phi_l(i, j, k)_1)\} \rightarrow \{z, (i, j, k)_2\},$$

где  $d, l \in \{1, \dots, 6\}$ , причём  $d \neq l$ .

Заметим, что хотя на первой итерации выбранная оккупированная клетка окружена только свободными клетками (состояние  $u = (0, 0)$ ), в последующих итерациях такая первоначально выбранная клетка может иметь в соседях также и «мёртвые клетки периметра» (состояние  $u = (0, 1)$ ).

Следующий шаг — формирование начального периметра кластера путем присоединения к выбранной клетке соседних оккупированных клеток, то есть клеток, находящихся в состояниях  $u = (1, 1)$  или  $u = (1, 0)$ , с присвоением всем клеткам выбранного номера кластера, что можно записать в виде подстановки

$$\theta_5(i, j, k) : \{z, (i, j, k)_2\} \cup \{((1, 1), \phi_d(i, j, k)_1), ((1, 0), \phi_l(i, j, k)_1)\} \rightarrow \{z, (i, j, k)_2\},$$

где  $d, l \in \{1, \dots, 6\}$ , причём  $d \neq l$ .

Такие итерации формирования периметра продолжаются до тех пор, пока новый периметр не оказывается пустым (состояния  $u = (0, 0)$ ,  $u = (0, 1)$ ). При этом все клетки кластера получают номер (первый).

Далее берётся другая оккупированная клетка решётки, не входящая в сформированный кластер, и повторяются все перечисленные итерации с присвоением клеткам кластера другого (второго) номера.

Маркировка заканчивается, как только все оккупированные клетки решётки оказываются присоединёнными к какому-либо кластеру.

На каждой итерации работы основного КА, начиная со второй, выполняются следующие действия:

- 1) Кластеры клеточного массива  $\Omega_1(t)$  проращиваются по периметру при помощи оператора  $\theta_2(i, j, k)$ .

- 2) Оператор слияния  $\theta_3(i, j, k)$  соединяет пару кластеров, разделённых одним узлом (клеткой). Согласно построенной модели, вероятность оккупации свободной клетки  $p_{\text{mer}}$  в этом случае принимает значение, увеличенное по сравнению с вероятностью  $p_{\text{occ}}$ . Действие оператора слияния  $\theta_3(i, j, k)$  происходит следующим образом: если клетка периметра (состояние  $u = (1, 1)$ ) имеет в своём соседстве клетку периметра, принадлежащую другому кластеру, то с вероятностью  $p_{\text{mer}}$  обе клетки становятся клетками одного кластера. Обозначая номера разных кластеров  $X$  и  $Y$ ,  $X \neq Y$ , получим

$$\theta_3(i, j, k) : \{(0, 0), (i, j, k)_1\} \cup \{((1, 1), \phi_d(i, j, k)_1, (X, \phi_d(i, j, k)_2)), ((1, 1), \phi_l(i, j, k)_1, (Y, \phi_l(i, j, k)_2))\} \xrightarrow{p_{\text{mer}}} \{(11, (i, j, k)_1)\},$$

где  $d, l \in \{1, \dots, 6\}$ , причём  $d \neq l$ .

Заметим, что номера кластеров в этом случае заданы согласно маркировке, проведённой на предыдущей итерации.

- 3) Оккупируются свободные клетки при помощи оператора  $\theta_1(i, j, k)$ .  
 4) Формируется новая кластерная структура из оккупированных клеток при помощи маркировки кластеров вспомогательным клеточным автоматом №2.

Таким образом, каждая итерация завершается уничтожением кластерной структуры, образованной на предыдущем шаге, и формированием новой кластерной структуры с автоматическим обновлением всех характеристик кластеров. Конечной стадией изменения во времени (эволюции) кластерной структуры считается конфигурация, в которой образуется кластер, соединяющий противоположные грани куба. Заметим, что приведённый анализ работы автомата позволяет отнести его к асинхронному типу.

### 3. Результаты модельного эксперимента

Моделирование проводилось на кубической решётке  $100 \times 100 \times 100$ . При этом для однородного статического сценария моделирования постоянные вероятности имели значения  $p_{\text{occ}} = p_{\text{spr}} = p_{\text{mer}} = 0,001$ , а для внутреннего динамического сценария  $p_{\text{occ}} = 0,0001$ , начальное значение вероятности прорастания периметра  $p_{\text{spr}} = 0,18$ ,  $p_{\text{mer}} = 0,2$ . Полученные характеристики случайных процессов усреднялись по 10 реализациям. Пример визуализации соединяющего кластера приведён на рис. 1; верхняя грань соединена с нижней и левой гранями.

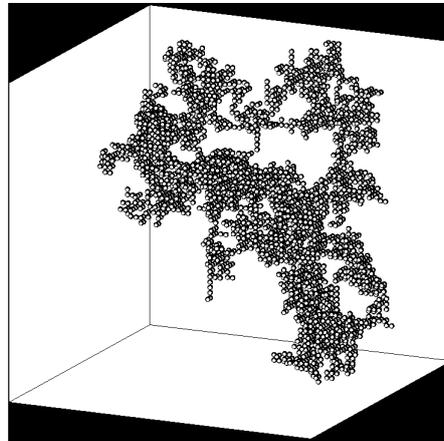


Рис. 1. Вид соединяющего кластера поврежденных для динамического внутреннего сценария моделирования

Конфигурация кластеров повреждений имеет фрактальную структуру, о чём свидетельствует универсальная степенная зависимость (рис. 2) между числом элементарных повреждений в кластере (массой кластера) и его среднеквадратичным радиусом  $M(R) = 3^3 \cdot R^D$ , где  $2,305 < D < 2,336$ .

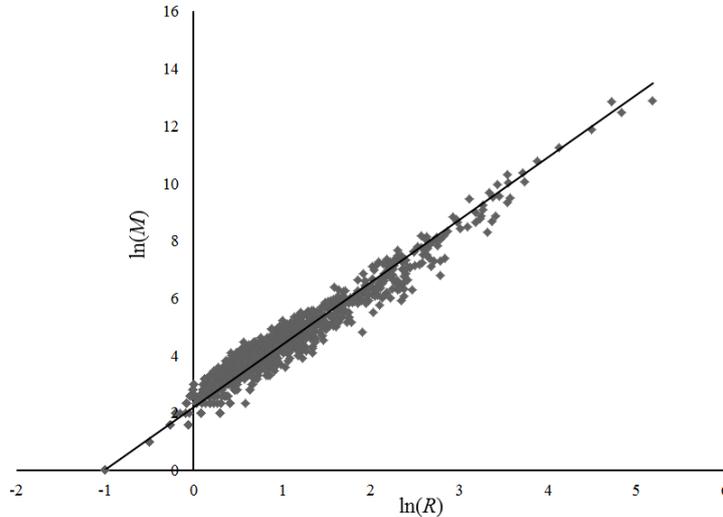


Рис. 2. Связь массы и размера кластеров

Предельная средняя плотность элементарных повреждений, при которой происходит образование соединяющего кластера, составила  $d_{\text{fin}} = 0,27 \pm 0,02$  для однородного статического сценария и  $d_{\text{fin}} = 0,08 \pm 0,02$  для динамического внутреннего сценария, что в 1,2–3 раза меньше порога перколяции на кубической решётке, составляющего  $d_{\text{fin}} = 0,311$  [12].

На рис. 3 представлено сопоставление кинетических кривых числа кластеров элементарных повреждений для двумерного и трёхмерного случаев моделирования при сопоставимых параметрах моделирования. Для сравнения временных рядов числа кластеров при различных сценариях данные представлены в нормированных координатах: отношение числа кластеров к максимальному числу кластеров и отношение числа циклов к числу циклов до образования соединяющего кластера. Как видно из рисунка, накопление числа кластеров на начальной стадии процесса разрушения в случае трёхмерной модели происходит более медленно как для однородного статического, так и для динамического внутреннего сценариев моделирования. Кроме того, для трёхмерной модели отсутствует протяжённый линейный участок на временах  $T/T_{\text{fin}} \geq 0,55$ , характерный для двумерного случая [10]. График кинетической зависимости числа кластеров надёжно аппроксимируется по методу наименьших квадратов квадратичной функцией вплоть до появления соединяющего кластера и разрушения системы:  $N/N_{\text{max}} = -2,79 (T/T_{\text{fin}})^2 + 3,36(T/T_{\text{fin}})$  с коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,99$  для однородного статического сценария и  $N/N_{\text{max}} = -1,91 (T/T_{\text{fin}})^2 + 2,80(T/T_{\text{fin}})$  с коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,99$  для внутреннего динамического сценария. Максимумы числа кластеров для трёхмерного случая смещены в сторону больших значений и достигаются при  $T/T_{\text{fin}} \approx 0,73$ .

Как видно из рис. 4,б, 5,б и 6,б, по характеру изменения автокорреляционных функций во временном ряду «число кластеров» имеют место долговременные корреляции, которые соответствуют виду кинетических кривых и имеют универсальный колебательный характер.

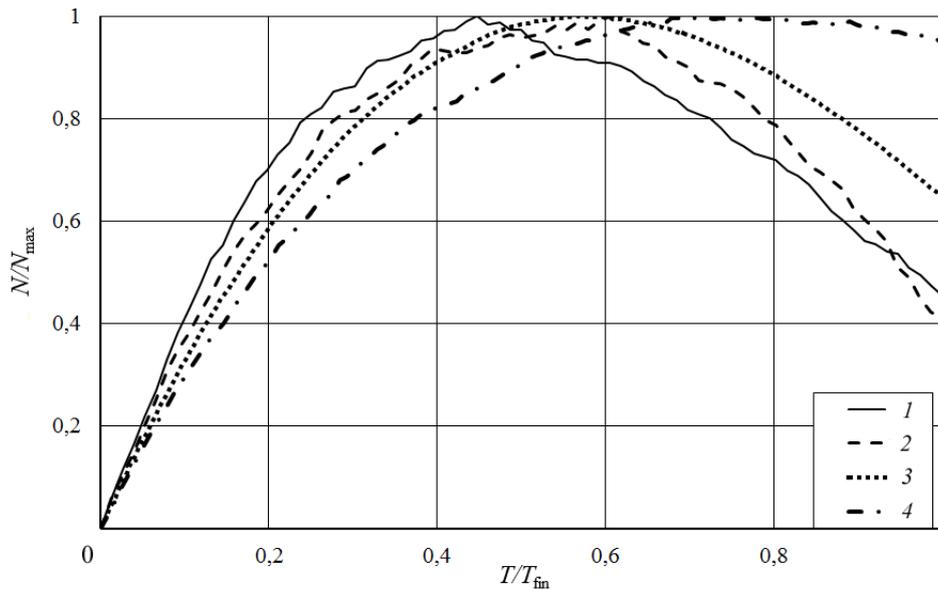


Рис. 3. Кинетическая зависимость числа кластеров элементарных повреждений: кр. 1 — однородный статический сценарий (2D); кр. 2 — динамический внутренний сценарий (2D); кр. 3 — однородный статический сценарий (3D); кр. 4 — динамический внутренний сценарий (3D)

Поведение временного ряда «число элементарных повреждений» существенно зависит от выбора параметров моделирования. Для динамического внутреннего сценария кинетика накопления элементарных повреждений в трёхмерной модели в зависимости от значения вероятности прорастания периметра кластеров повреждений  $p_{\text{spr}}$  показывает два качественно различных режима моделирования. Так, для случая  $p_{\text{spr}} < 0,2$  ( $p_{\text{spr}} = 0,18$ ) временной ряд «число элементарных повреждений», обнаруживая рост на первых шагах эволюции, флуктуирует вблизи практически не подверженного тренду среднего значения. Число кластеров повреждений значительно превосходит число вновь возникающих элементарных повреждений (рис. 4, а). Во временном ряду «число элементарных повреждений» имеют место долговременные корреляции (рис. 4, б) с выходом корреляционной функции в отрицательную область. При значениях  $p_{\text{spr}} = 0,2$  число вновь возникающих элементарных повреждений и число кластеров повреждений совпадают по порядку величины (рис. 5, а). Процесс образования соединяющего кластера ускоряется примерно в 3 раза. Процессы, формирующие временной ряд «число элементарных повреждений», становятся более совпадающими как между собой, так и с процессом формирования кластеров повреждений, что проявляется в поведении корреляционных функций (рис. 5, б). Для значений вероятности прорастания периметров кластеров  $p_{\text{spr}} > 0,2$  ( $p_{\text{spr}} = 0,22$ ) процесс объединения элементарных повреждений и возникновения соединяющего кластера настолько ускоряется, что число вновь возникающих элементарных повреждений в несколько раз превышает число кластеров элементарных повреждений (рис. 6, а), и соответственно число итераций до появления соединяющего кластера существенно сокращается. Процессы, формирующие временной ряд «число элементарных повреждений», и процесс формирования кластеров становятся полностью совпадающими. Корреляционные функции также практически совпадают, что говорит о возникновении сильных долговременных корреляций (рис. 6, б).

Эффективным тестом для проверки того, является ли изучаемый процесс процессом с независимыми приращениями, персистентным или антиперсистентным, является

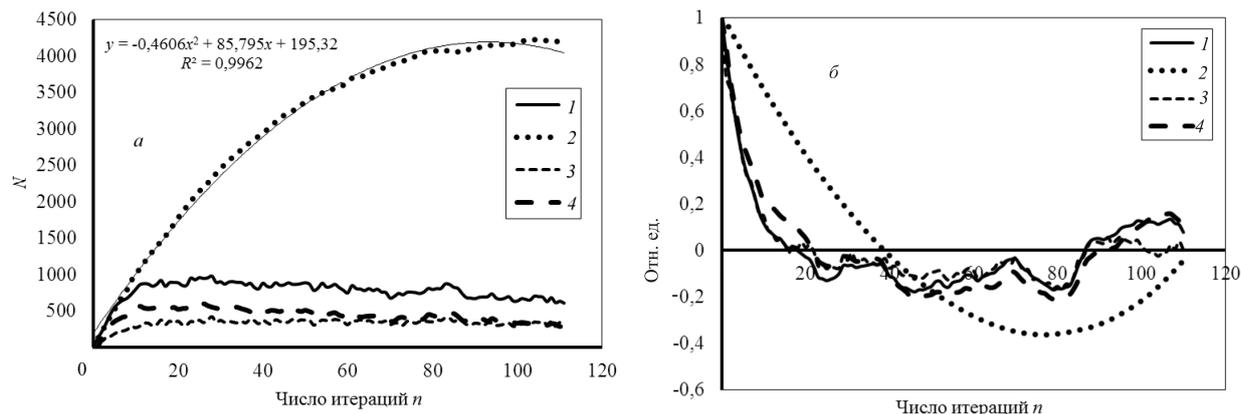


Рис. 4. Кинетические зависимости (а) и автокорреляционные функции (б) временных рядов «число элементарных повреждений» и «число кластеров повреждений» при  $p_{spr} = 0,18$ : кр. 1 — суммарная кривая элементарных повреждений; кр. 2 — число кластеров повреждений; кр. 3 — число одиночных элементарных повреждений; кр. 4 — число периметров кластеров

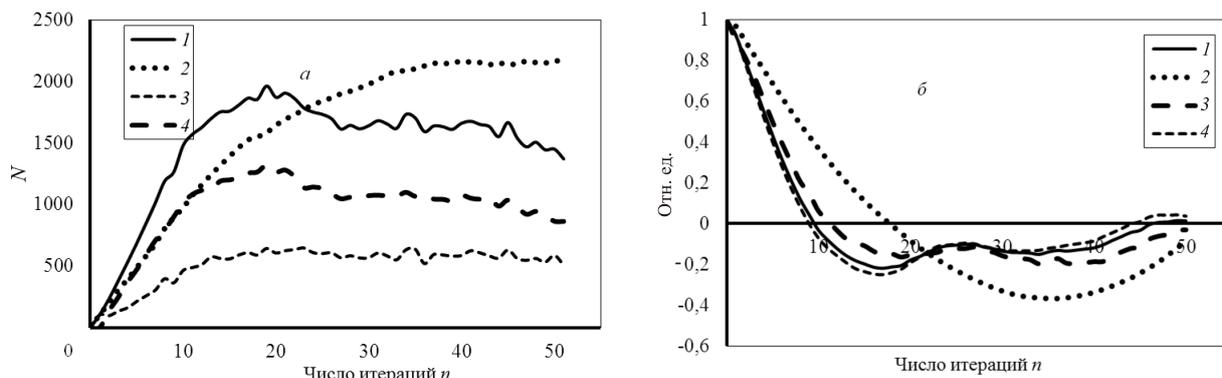


Рис. 5. Кинетические зависимости (а) и автокорреляционные функции (б) временных рядов «число элементарных повреждений» и «число кластеров повреждений» при  $p_{spr} = 0,2$ : кр. 1 — суммарная кривая элементарных повреждений; кр. 2 — число кластеров повреждений; кр. 3 — число одиночных элементарных повреждений; кр. 4 — число периметров кластеров

ся метод нормированного размаха Херста ( $R/S$ -анализ) [12–14]. При этом исходные данные — временные зависимости текущего значения размаха выборки  $R$  случайного процесса, нормированного на текущее значение среднеквадратичного отклонения  $S$  ( $R(t)/S(t) \propto |t|^H$ ), приводят в дважды логарифмических координатах к линейной зависимости  $\ln R/S \propto H \cdot \ln |t|$ , угловый коэффициент которой  $H$  и называется показателем Херста. Случайному процессу с независимыми приращениями соответствует значение показателя Херста  $H = 0,5$ . Для персистентного случайного процесса (в будущем поддерживается тенденция, которая была в предшествующие моменты времени) значение показателя Херста  $H > 0,5$ . Как и в случае двумерной модели [14], для всех рассмотренных сценариев моделирования временные ряды «число элементарных повреждений» и «число кластеров элементарных повреждений» являются персистентными (рис. 7–9). На рисунках под временем понимаем число итераций  $n$ . При этом показатель Херста для случайного процесса «число кластеров элементарных повреждений» составляет  $H = 0,98 \pm 0,01$ . Для случайного процесса «число элементарных повре-

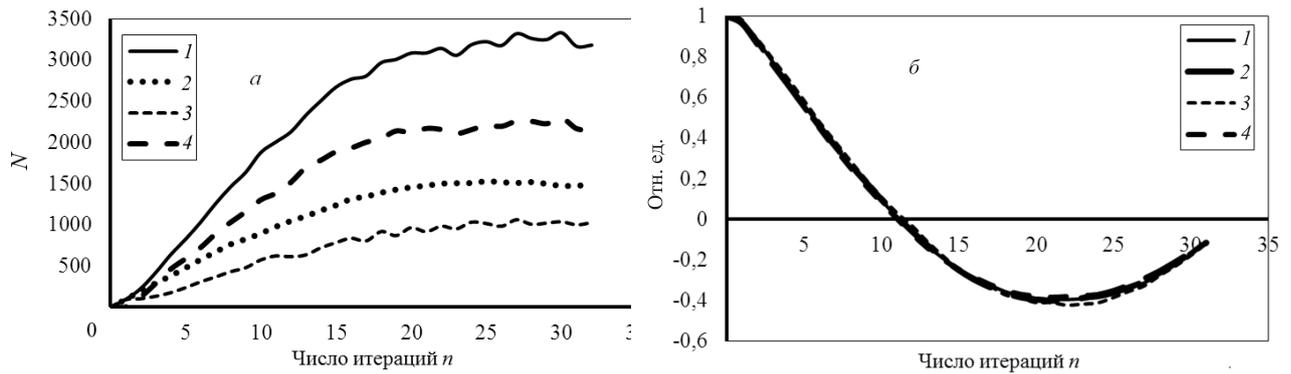


Рис. 6. Кинетические зависимости (а) и автокорреляционные функции (б) временных рядов «число элементарных повреждений» и «число кластеров повреждений» при  $p_{spr} = 0,22$ : кр. 1 — суммарная кривая элементарных повреждений; кр. 2 — число кластеров повреждений; кр. 3 — число одиночных элементарных повреждений; кр. 4 — число периметров кластеров

ждений» на статистике нормированного размаха наблюдаются два линейных участка, при этом второй линейный участок, с увеличенным показателем Херста, начинается на временах, составляющих примерно 60–70% от времени разрушения системы. Исключение составляет случай, когда вероятность прорастания периметра  $p_{spr} > 0,2$ . Этот режим моделирования приводит к сильной корреляции всех случайных процессов, и, как следствие, все линейные зависимости нормированного размаха совпадают.

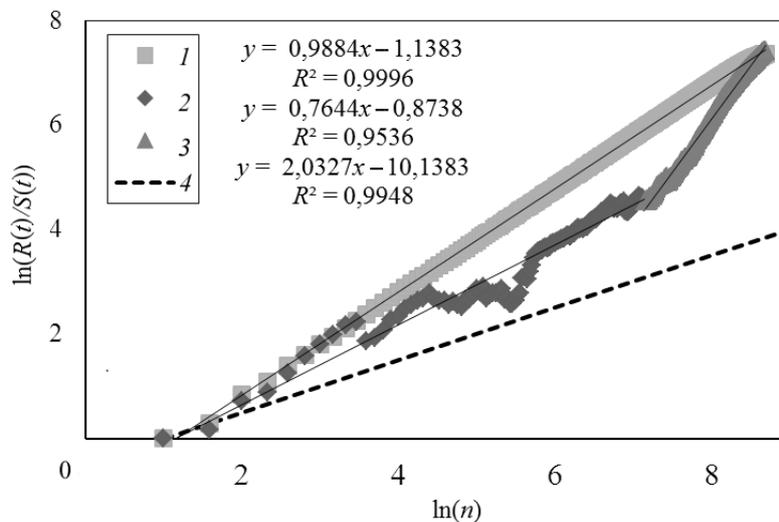


Рис. 7. Зависимость нормированного размаха Херста от числа итераций для базового однородного статического сценария моделирования: кр. 1 — кластеры; кр. 2, 3 — элементарные повреждения (первый и второй участки); кр. 4 — линия, соответствующая значению  $H = 0,5$

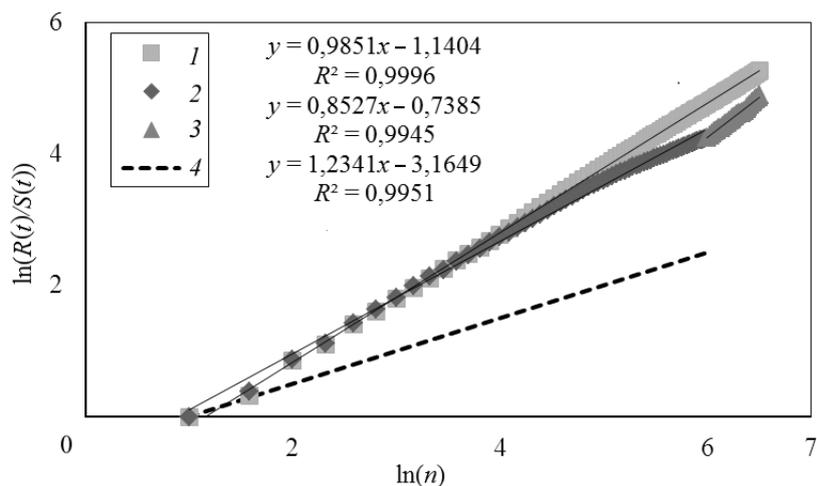


Рис. 8. Зависимость нормированного размаха Херста от числа итераций для динамического внутреннего сценария ( $p_{spr} = 0,18$ ) моделирования: кр. 1 — кластеры; кр. 2, 3 — элементарные повреждения (первый и второй участки); кр. 4 — линия, соответствующая значению  $H = 0,5$

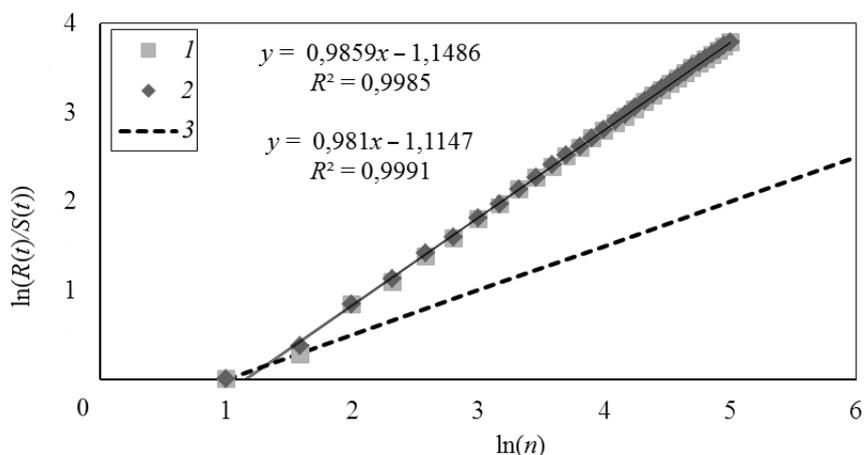


Рис. 9. Зависимость нормированного размаха Херста от числа итераций для динамического внутреннего сценария ( $p_{spr} = 0,22$ ) моделирования: кр. 1 — кластеры; кр. 2 — элементарные повреждения; кр. 3 — линия, соответствующая значению  $H = 0,5$

#### 4. Сравнение модельного и физического эксперимента

Поскольку наблюдение кластеров элементарных повреждений в динамике на современном уровне технологии практически невозможно, данные модельного эксперимента для временного ряда «число элементарных повреждений» сопоставляем с характеристиками потока импульсной эмиссии. При этом поведение автокорреляционных функций числа импульсов эмиссии (как световой, так и электромагнитной) качественно совпадает с поведением автокорреляционной функции временного ряда «число элементарных повреждений» для режима  $p_{spr} = 0,18$  (рис. 10) [15]. С результатами модельного эксперимента также качественно согласуется появление второго линейного

участка на статистике нормированного размаха Херста временного ряда «число импульсов эмиссии» (рис. 11).

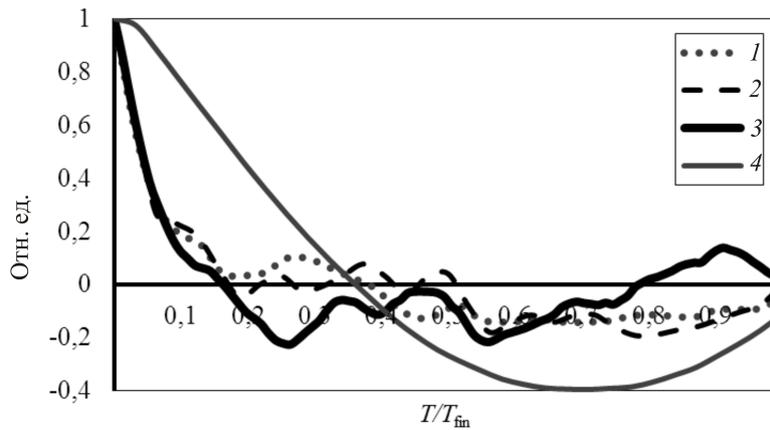


Рис. 10. Автокорреляционные функции временного ряда «число элементарных повреждений»: кр. 1 — кварцевый диорит, электромагнитная эмиссия; кр. 2 — кварцевый диорит, фотонная эмиссия; кр. 3 — внутренний динамический сценарий  $p_{spr} = 0,18$ ; кр. 4 — внутренний динамический сценарий  $p_{spr} = 0,22$

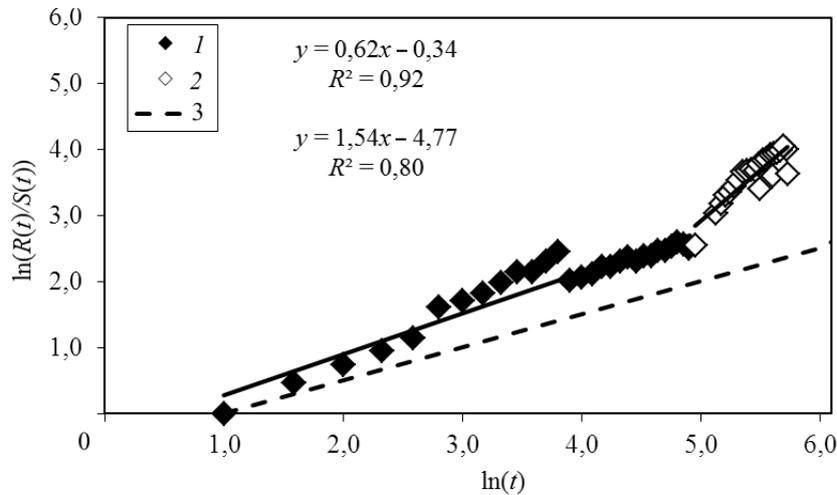


Рис. 11. Статистика нормированного размаха Херста временного ряда «число импульсов электромагнитной эмиссии» для кварцевого диорита: кр. 1 — первый линейный участок; кр. 2 — второй линейный участок ( $T/T_{fin} = 0,70$ ); кр. 3 — линия, соответствующая значению  $H = 0,5$

### Заклучение

Построена и реализована трёхмерная модель накопления элементарных повреждений в хрупких гетерогенных материалах при помощи вероятностного клеточного автомата. Установлено, что в зависимости от значения вероятности прорастания периметра кластера повреждений для трёхмерной модели наблюдается два качественно различных режима процесса накопления повреждений. Для значений  $p_{spr} > 0,2$  процесс перехода к необратимому разрушению существенно ускоряется и, по сравнению

с режимом при  $p_{\text{spr}} < 0,2$ , становится сильно коррелированным. При этом наблюдается соответствие данных модельного и физического экспериментов: рассчитанное по данным физического эксперимента поведение автокорреляционных функций числа импульсов эмиссии (световой, электромагнитной) и поведение статистики Херста качественно совпадают с поведением автокорреляционной функции временного ряда «число элементарных повреждений» для режима моделирования  $p_{\text{spr}} < 0,2$ . Поэтому наблюдаемый в автокорреляционных функциях потоков импульсов эмиссии переход в область отрицательной корреляции, а также появление второго линейного участка на статистике нормированного размаха можно рассматривать как предвестников перехода системы на стадию необратимого разрушения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Куксенко В. С.* Диагностика и прогнозирование разрушения крупномасштабных объектов // ФТТ. 2005. Т. 47. № 5. С. 788–792.
2. *Курленя М. В., Вострецов А. П., Кулаков Г. И., Яковичкая Г. Е.* Регистрация и обработка сигналов электромагнитного излучения горных пород. Новосибирск: СО РАН, 2000. 232 с.
3. *Ботвина Л. Р.* Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука, 2008. 334 с.
4. *Бандман О. Л.* Клеточно-автоматные модели пространственной динамики // Системная информатика. 2006. Вып. 10. С. 59–113.
5. *Бандман О. Л.* Дискретное моделирование физико-химических процессов // Прикладная дискретная математика. 2009. № 3. С. 33–49.
6. *Лобанов А. И.* Моделирование клеточных автоматов // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 3. С. 273–293.
7. *Гильяров В. Л., Варкентин М. С., Корсуков В. Е. и др.* Формирование степенных распределений дефектов по размерам в процессе разрушения материалов // ФТТ. 2010. Т. 52. № 7. С. 1311–1315.
8. *Гильяров В. Л.* Моделирование роста трещин в процессе разрушения гетерогенных материалов // ФТТ. 2011. Т. 53. № 4. С. 707–710.
9. *Алексеев Д. В., Казунина Г. А.* Моделирование кинетики накопления повреждений вероятностным клеточным автоматом // ФТТ. 2006. Т. 48. № 2. С. 255–261.
10. *Алексеев Д. В., Казунина Г. А.* Моделирование эволюции кластерной структуры элементарных повреждений в нагруженных материалах // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 8. С. 10–14.
11. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. Ч. 2. М.: Мир, 1990. 390 с.
12. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 258 с.
13. *Алексеев Д. В., Егоров П. В.* Персистентность накопления трещин при нагружении горных пород и концентрационный критерий разрушения // Доклады АН. 1993. № 1. С. 779–780.
14. *Алексеев Д. В., Казунина Г. А.* Модельное исследование кинетики накопления повреждений методом нормированного размаха Херста // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2006. № 4. С. 69–74.
15. *Казунина Г. А., Малышин А. А.* Исследование кинетики накопления повреждений в нагруженных материалах по импульсной электромагнитной и фотонной эмиссии // Изв. вузов. Физика. 2009. Т. 52. № 6. С. 46–49.

## REFERENCES

1. *Kuksenko V. S.* Diagnostika i prognozirovaniye razrusheniya krupnomasshtabnykh ob"ektov [Diagnosis and prognosis of large-scale objects destruction]. *Fizika Tverdogo Tela*, 2005, vol. 47, no. 5, pp. 788–792. (in Russian)
2. *Kurlenya M. V., Vostretsov A. P., Kulakov G. I., and Yakovitskaya G. E.* Registratsiya i obrabotka signalov elektromagnitnogo izlucheniya gornyykh porod [Register and Processing of the Signals of the Rocks Electromagnetic Radiation]. Novosibirsk, SB RAS, 2000. 232 p. (in Russian)
3. *Botvina L. R.* Razrusheniye: kinetika, mekhanizmy, obshchie zakonomernosti [Destruction: Kinetics, Mechanisms, General Patterns]. Moscow, Nauka Publ., 2008. 334 p. (in Russian)
4. *Bandman O. L.* Kletочно-avtomatnye modeli prostranstvennoy dinamiki [Cellular automata models of spatial dynamics]. *Sistemnaya Informatika*, 2006, no. 10, pp. 59–113. (in Russian)
5. *Bandman O. L.* Diskretnoe modelirovaniye fiziko-khimicheskikh protsessov [Discrete models of physical-chemical processes]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2009, no. 3, pp. 33–49. (in Russian)
6. *Lobanov A. I.* Modelirovaniye kletochnykh avtomatov [Model of cellular automata]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovaniye*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 273–293. (in Russian)
7. *Gilyarov V. L., Varkentin M. S., Korsukov V. E., et al.* Formirovaniye stepennykh raspredeleniy defektov po razmeram v protsesse razrusheniya materialov [Formation of power-law distributions of defects in size during the fracture of materials]. *Fizika Tverdogo Tela*, 2010, vol. 52, no. 7, pp. 1311–1315. (in Russian)
8. *Gilyarov V. L.* Modelirovaniye rosta treshchin v protsesse razrusheniya geterogennykh materialov [Simulation of crack growth in the destruction of heterogeneous materials]. *Fizika Tverdogo Tela*, 2011, vol. 53, no. 4, pp. 707–710. (in Russian)
9. *Alekseev D. V. and Kazunina G. A.* Modelirovaniye kinetiki nakopleniya povrezhdeniy veroyatnostnym kletochnym avtomatom [Modeling the kinetics of damage accumulation of probabilistic cellular automata]. *Fizika Tverdogo Tela*, 2006, vol. 48, no. 2, pp. 255–261. (in Russian)
10. *Alekseev D. V. and Kazunina G. A.* Modelirovaniye evolyutsii klasternoy struktury elementarnykh povrezhdeniy v nagruzhennykh materialakh [Modeling the evolution of the cluster structure of the elementary damage in loaded materials]. *Deformatsiya i Razrusheniye Materialov*, 2009, no. 8, pp. 10–14. (in Russian)
11. *Guld Kh. and Tobochnik Ya.* Komp'yuternoe modelirovaniye v fizike [Computer Modeling in Physics]. P. 2. Moscow, Mir Publ., 1990, 390 p. (in Russian)
12. *Feder J.* *Fractals*. N.Y., Springer, 1988.
13. *Alekseev D. V. and Egorov P. V.* Persistentnost' nakopleniya treshchin pri nagruzhenii gornyykh porod i kontsentratsionnyy kriteriy razrusheniya [Persistence accumulation of cracks during loading of rock and concentration failure criterion]. *Doklady Akademii Nauk*, 1993, no. 1, pp. 779–780. (in Russian)
14. *Alekseev D. V. and Kazunina G. A.* Model'noye issledovaniye kinetiki nakopleniya povrezhdeniy metodom normirovannogo razmakha Khersta [Model study of the damage accumulation kinetics by the Hirst normed span method]. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2006, no. 4, pp. 69–74. (in Russian)
15. *Kazunina G. A. and Mal'shin A. A.* Study of the kinetics of damage accumulation in loaded materials based on impulse electromagnetic and photon emission. *Russian Physics J.*, 2009, no. 6, pp. 598–601.