ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика и механика № 3(35)

УДК 519.95
DOI 10.17223/19988621/35/2

В.М. Зюзьков

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕРАЗРЕШИМЫХ КОСВЕННО РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Изучаются косвенно рефлексивные предложения в арифметике Пеано (в предположении, что данная теория ω-непротиворечива), говорящие о доказуемости или опровержимости. Доказываются достаточные условия существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений.

Ключевые слова: *арифметика Пеано, косвенная рефлексия, неразрешимые предложения.*

Формула F языка теории первого порядка T называется неразрешимой в T, если ни сама формула F, ни её отрицание $\neg F$ не являются теоремами этой теории. Арифметика Пеано $\boldsymbol{PA}$ является одной из хорошо известных теорий первого порядка и играет важную роль в логике. В теории $\boldsymbol{PA}$ можно построить неразрешимое в этой теории предложение.

Нелогическими символами $\boldsymbol{PA}$ являются константа $\mathbf{0}$, унарный функциональный символ S (который обозначает функцию следования) и два бинарных функциональных символа + и ×. Для любого неотрицательного целого n терм $SS...S\mathbf{0}$ (S повторяется n раз) будем обозначать $\boldsymbol{n}$. Такие термы называются *нумералами*.

Курт Гёдель первым построил неразрешимое предложение для теории $\boldsymbol{PA}$. Он сделал это посредством процедуры, которая сейчас называется арифметизацией.

Пусть U есть объединение трех множеств: множества символов теории T, множества всех выражений (термов и формул) T и множества всех конечных последовательностей выражений T. Пусть $\boldsymbol{N}$ – множество целых неотрицательных чисел и функция g: $U \to \boldsymbol{N}$ инъективна. Функция g называется *арифметизацией* теории T, если выполнены следующие условия:

(1) g эффективно вычисляема;

(2) существует алгоритм, который определяет, принадлежит ли данное положительное целое m множеству значений функции g и, если это так, то алгоритм находит объект $x \in U$ такой, что $g(x) = m$.

Функция g определяется стандартным способом [1, 2]. Число $g(x)$ называется гёделевым номером объекта x. Если $g(x) = n$, мы определяем $\ulcorner x \urcorner$ как нумерал $\boldsymbol{n}$. Это позволяет заменить утверждения о формальной теории эквивалентными теоретико-числовыми предложениями и затем выразить такие предложения в самой формальной теории.

В работе [3] изучались косвенно рефлексивные предложения в $\boldsymbol{PA}$ (в предположении, что данная теория ω-непротиворечива [1]), говорящие о доказуемости и/или опровержимости. Рассматривались некоторые совокупности таких предложений, и доказывалось, что среди них существуют неразрешимые предложения. Настоящая работа является продолжением и обобщением [3]. Мы формулируем общие условия и доказываем, что они достаточны для существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений.

Исходным утверждением является следующая теорема о косвенной рефлексивности, доказанная в [3].

Теорема 1. Пусть m – положительное целое число и $B_1, B_2, \ldots, B_m$ – формулы теории ***PA***, для которых свободные переменные содержатся в списке $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда существуют такие формулы $G_1, G_2, \ldots, G_m$, что

$$\vdash G_1 \sim B_1(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner G_m \urcorner),$$
$$\vdash G_2 \sim B_2(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner G_m \urcorner),$$
$$\ldots$$
$$\vdash G_m \sim B_m(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \ldots, \ulcorner G_m \urcorner)$$

в теории ***PA***.

Как известно [1], отношение $Provable(n, m)$: «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в ***PA*** и ее доказательство имеет номер m» выразимо в ***PA*** некоторой формулой $Pr(x, y)$, т.е.:

1) если $Provable(n, m)$ истинно, то $\vdash Pr(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$,

2) если $Provable(n, m)$ ложно, то $\vdash \neg Pr(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$.

Формула $P(\boldsymbol{n}) \equiv \exists y\, Pr(\boldsymbol{n}, y)$ выражает следующее свойство: «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в ***PA***».

Из теоремы 1 при $m = 1$ получаем известную лемму о рефлексии. Пусть $B(x)$ произвольная формула формальной арифметики, имеющая единственную свободную переменную x. Тогда можно построить замкнутую формулу A, такую, что $\vdash A \sim B(\ulcorner A \urcorner)$. Формула A рефлексивна и «говорит о себе», что она обладает свойством B. В частности, имеется формула G, для которой $\vdash G \sim \neg P(\ulcorner G \urcorner)$, т.е. G «говорит о себе», что она недоказуема в ***PA***. Гёдель, неявно используя лемму о рефлексии, получил формулу G и доказал, что она неразрешима в ***PA*** (предполагая, что ***PA*** является ω-непротиворечивой теорией).

Определение ω-непротиворечивости [1, с. 158]. Пусть T – теория первого порядка с теми же самыми символами, что и ***PA***. Теория T называется ω-непротиворечивой, если для всякой формулы $\varphi(x)$ этой теории из того, что при любом n выполнено $\vdash_T \varphi(\boldsymbol{n})$, следует невозможность $\vdash_T \exists x\, \neg\varphi(x)$.

Мы говорим, что формула A *опровержима* в ***PA***, если $\neg A$ доказуема в ***PA***. Раймонд Смаллиан обнаружил формулу $R(\boldsymbol{n})$, которая выражает следующее свойство: «отрицание формулы с гёделевым номером n доказуемо в ***PA***». Формула $R(\ulcorner F \urcorner)$ «утверждает» опровержимость формулы F. Лемма о рефлексии дает формулу L, для которой $\vdash L \sim R(\ulcorner L \urcorner)$. Формула Смаллиана L «утверждает» свою собственную опровержимость.. Формула L также неразрешима [4, 3].

Будем считать, что арифметика Пеано является ω-непротиворечивой. Это свойство используется при доказательстве следующей леммы.

Лемма 1 [3]. Для любой формулы F теории ***PA*** выполнено: 1) $\vdash P(\ulcorner F \urcorner)$ тогда и только тогда, когда $\vdash F$; 2) $\vdash R(\ulcorner F \urcorner)$ тогда и только тогда, когда $\vdash \neg F$.

В силу теоремы 1 имеем, что формулы теории ***PA***, «косвенно утверждающие» собственную доказуемость или опровержимость, существуют. И в некоторых конечных множествах таких формул удается доказать существование неразрешимых формул.

Например, формулы A и B, для которых выполнено

$$\vdash A \sim R(\ulcorner B \urcorner),$$
$$\vdash B \sim P(\ulcorner A \urcorner),$$

являются неразрешимыми [3].

Пусть для данных формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 1$, выполнено $\vdash A_i \sim Z_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Причем каждая формула Z_i построена из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Рассмотрим следующую формулу φ пропозициональной логики:

$$(A_1 \sim W_1) \mathbin{\&} (A_2 \sim W_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} (A_n \sim W_n),$$

где каждая формула W_i получена из соответствующей формулы Z_i заменой $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ на A_j и заменой $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ на $\neg A_k$. Символы A_i трактуются в формуле φ как пропозициональные переменные.

Теорема 2 (достаточное условие для неразрешимости). Если формула φ является невыполнимой формулой пропозициональной логики, то, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима.

Для доказательства потребуется две леммы. Введем обозначение. Пусть Z – произвольная формула арифметики Пеано, построенная из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Обозначим через $w(Z)$ формулу, полученную из Z заменой $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ на A_j и заменой $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ на $\neg A_k$.

Лемма 2. Пусть Z – произвольная формула арифметики Пеано, построенная из некоторых формул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$ с помощью пропозициональных связок. Тогда если $\vdash Z$, то $\vdash w(Z)$.

Заметим, что тогда из $\vdash Z$ следует $\vdash Z \sim w(Z)$. Для этого достаточно воспользоваться тавтологией $\alpha \mathbin{\&} \beta \supset (\alpha \sim \beta)$.

Доказательство. Проведем математическую индукцию по построению формулы Z.

Базис индукции. Если формула Z вообще не содержит подформул вида $P(\ulcorner A_j \urcorner)$ и $R(\ulcorner A_k \urcorner)$, то, очевидно, $w(Z) = Z$. И поэтому утверждение леммы в данном случае выполнено. Рассмотрим случаи, когда формула Z есть $P(\ulcorner A_i \urcorner)$ или $R(\ulcorner A_i \urcorner)$. В первом случае $w(P(\ulcorner A_i \urcorner)) = A_i$. По лемме 1, $\vdash P(\ulcorner A_i \urcorner)$ влечет $\vdash A_i$. Если же формула Z есть $R(\ulcorner A_i \urcorner)$, то $w(R(\ulcorner A_i \urcorner)) = \neg A_i$. Отношение $\vdash R(\ulcorner A_i \urcorner)$ влечет $\vdash \neg A_i$, по лемме 1

Отрицание. Пусть формула Z имеет вид $\neg Z_1$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$. Имеем также $w(\neg Z_1) = \neg w(Z_1)$. Из $\vdash \neg Z_1$, используя тавтологию $\neg\alpha \mathbin{\&} (\alpha \sim \beta) \supset \neg\beta$, получаем $\vdash \neg w(Z_1)$.

Конъюнкция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \mathbin{\&} Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \mathbin{\&} Z_2) = w(Z_1) \mathbin{\&} w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$\alpha 1 \mathbin{\&} \alpha 2 \mathbin{\&} (\alpha 1 \sim \beta 1) \mathbin{\&} (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \mathbin{\&} \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \mathbin{\&} Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \mathbin{\&} w(Z_2)$.

Дизъюнкция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \vee Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \vee Z_2) = w(Z_1) \vee w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$(\alpha 1 \vee \alpha 2) \mathbin{\&} (\alpha 1 \sim \beta 1) \mathbin{\&} (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \vee \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \vee Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \vee w(Z_2)$.

Импликация. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \supset Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \supset Z_2) = w(Z_1) \supset w(Z_2)$. Используя тавтологию

$$(\alpha 1 \supset \alpha 2) \mathbin{\&} (\alpha 1 \sim \beta 1) \mathbin{\&} (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \supset \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \supset Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \supset w(Z_2)$.

Эквиваленция. Пусть формула Z имеет вид $Z_1 \sim Z_2$ и по индуктивному предположению $\vdash Z_1 \sim w(Z_1)$ и $\vdash Z_2 \sim w(Z_2)$. Имеем также $w(Z_1 \sim Z_2) = w(Z_1) \sim w(Z_2)$.

Используя тавтологию

$$(\alpha 1 \sim \alpha 2) \mathbin{\&} (\alpha 1 \sim \beta 1) \mathbin{\&} (\alpha 2 \sim \beta 2) \supset (\beta 1 \sim \beta 2),$$

из $\vdash Z_1 \sim Z_2$ получаем $\vdash w(Z_1) \sim w(Z_2)$. ■

Лемма 3. Если формула A_i разрешима, то $\vdash A_i \sim Z_i$ влечет $\vdash A_i \sim w(Z_i)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1.Пусть $\vdash A_i$. Тогда, используя тавтологию $\alpha \mathbin{\&} (\alpha \sim \beta) \supset \beta$, получаем $\vdash Z_i$. По лемме 2 имеем $\vdash w(Z_i)$. Воспользуемся тавтологией $\alpha \mathbin{\&} \beta \supset (\alpha \sim \beta)$ и получим $\vdash A_i \sim w(Z_i)$.

2. Пусть $\vdash \neg A_i$. Тогда, используя тавтологию $(\alpha \sim \beta) \supset (\neg\alpha \sim \neg\beta)$, из $\vdash A_i \sim Z_i$ получаем $\vdash \neg A_i \sim \neg Z_i$. Теперь из $\vdash \neg A_i$ и $\vdash \neg A_i \sim \neg Z_i$, с помощью тавтологии $\alpha \mathbin{\&} (\alpha \sim \beta) \supset \beta$, получаем $\vdash \neg Z_i$. По лемме 2, имеем $\vdash \neg w(Z_i)$. Из $\vdash \neg A_i$ и $\vdash \neg w(Z_i)$, воспользовавшись тавтологией $\alpha \mathbin{\&} \beta \supset (\alpha \sim \beta)$, получаем $\vdash \neg A_i \sim \neg w(Z_i)$. И снова, с помощью тавтологии $(\alpha \sim \beta) \supset (\neg\alpha \sim \neg\beta)$, имеем $\vdash A_i \sim w(Z_i)$. ■

Доказательство теоремы 2. От противного допустим, что все формулы A_1, A_2, …, A_n разрешимы. Так как $\vdash A_i \sim Z_i$, то формулы $A_i \sim Z_i$ истинны для всех i. Пусть W_i обозначает формулу $w(Z_i)$. По лемме 3 имеем $\vdash A_i \sim W_i$ для всех i. Если трактовать все A_k, входящие в $A_i \sim W_i$ как пропозициональные переменные, то формула

$$(A_1 \sim W_1) \mathbin{\&} (A_2 \sim W_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} (A_n \sim W_n)$$

является истинной формулой пропозициональной логики, но это противоречит невыполнимости φ. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Введем следующее обозначение: если i – индекс, пробегающий диапазон 1, 2, …, n, то $i+$ обозначает $i + 1$ для $i = 1, \ldots, n - 1$, и $i+ = 1$ для $i = n$. Теперь можем сформулировать следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Допустим, что для $i = 1, \ldots, n$, каждое A_i есть одно из следующих утверждений:

(i) A_{i+} – доказуемо;
(ii) A_{i+} – не доказуемо;
(iii) A_{i+} – опровержимо;
(iv) A_{i+} – не опровержимо.

Пусть количество значений индекса i, для которых A_i утверждает (ii) или (iii), нечетно. Тогда, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть все формулы A_i разрешимы. Переведем исходные условия на точный язык. Для $i = 1, \ldots, n$ каждое A_i удовлетворяет одному из следующих отношений:

(i) $\vdash A_i \sim P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
(ii) $\vdash A_i \sim \neg P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
(iii) $\vdash A_i \sim R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$;
(iv) $\vdash A_i \sim \neg R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$.

И количество значений индекса i, для которых A_i удовлетворяют отношениям (ii) или (iii), нечетно. Заменим $P(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$ на A_{i+} и $R(\ulcorner A_{i+} \urcorner)$ на $\neg A_{i+}$. Тогда отношения (i)-(iv) в силу леммы 3 преобразуются в отношения

(I) $\vdash A_i \sim A_{i+}$;
(II) $\vdash A_i \sim \neg A_{i+}$;
(III) $\vdash A_i \sim \neg A_{i+}$;
(IV) $\vdash A_i \sim A_{i+}$.

Причем общее количество выражений вида $A_i \sim \neg A_{i+}$ является нечетным.

Будем рассматривать все A_i как пропозициональные переменные. Чтобы применить теорему 2, рассмотрим формулу φ, которая в данном случае есть

$$(A_1 \sim B_2) \mathbin{\&} (A_2 \sim B_3) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (A_{n-1} \sim B_n) \mathbin{\&} (A_n \sim B_1),$$

где каждое B_k есть A_k или $\neg A_k$. Так как мы предположили, что все формулы A_i разрешимы, то по теореме 2 формула φ должна быть выполнимой.

Удалим из формулы φ все эквивалентности вида $A_i \sim A_{i+}$, причем удаляя каждую такую эквивалентность, будем делать перенумерацию переменных так, чтобы соседние переменные по-прежнему имели последовательные номера.

Полученная формула равносильна φ и имеет вид

$$(A_1 \sim \neg A_2) \mathbin{\&} (A_2 \sim \neg A_3) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (A_k \sim \neg A_1), \tag{1}$$

где k нечетно.

Докажем, что формула (1) не может быть выполнимой. От противного. Пусть формула (1) истинна при некотором распределении истинностных значений переменных $A_1, A_2, \dots, A_k$. При этом распределении все эквивалентности в скобках должны иметь значение *истина*. Рассмотрим два возможных истинностных значения для переменной A_1.

• Пусть A_1 есть *истина*, тогда A_2 – *ложь*, A_3 – *истина*, A_4 – *ложь*, …, A_k – *истина*, так как k нечетно.

• Если же A_1 есть *ложь*, то A_2 – *истина*, A_3 – *ложь*, A_4 – *истина*, …, A_k – *ложь*, так как k нечетно.

В любом случае для выполнимости формулы (1) истинностные значения переменных A_k и A_1 должны совпадать, но тогда последняя эквивалентность $A_k \sim \neg A_1$ имеет ложное значение и формула (1) ложна при любом значении A_1. Поэтому формула (1) невыполнима. Так как формулы (1) и φ равносильны, то формула φ невыполнима. Полученное противоречие доказывает, что, по крайней мере, одна из формул A_i неразрешима. ■

Если в формулировке следствия $n = 1$, то тогда мы имеем одну формулу A_1, для которой выполнено $\vdash A_1 \sim \neg P(\ulcorner A_1 \urcorner)$ или $\vdash A_1 \sim R(\ulcorner A_1 \urcorner)$. И из следствия 1 и леммы 1 сразу получаем

Следствие 2 (после Гёделя). Если $\vdash G \sim \neg P(\ulcorner G \urcorner)$, то формулы G и $P(\ulcorner G \urcorner)$ неразрешимы.

Следствие 3 (после Смаллиана). Если $\vdash L \sim R(\ulcorner L \urcorner)$, то формулы L и $R(\ulcorner L \urcorner)$ неразрешимы.

Замечание. Все чистые теоремы существования неразрешимых косвенно рефлексивных предложений, доказанные в [3], являются частными случаями следствия 1.

Автор благодарит профессора Heinrich Rolletschek (*Research Institute for Symbolic Computation*, *Linz*, *Austria*) *за плодотворное обсуждение результатов из* [3], *вследствие чего появилась настоящая статья.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. *Булос Дж.*, *Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.
3. *Зюзьков В.М.* Неразрешимые косвенно рефлексивные предложения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 21–33.
4. *Smullyan R.M.* Gödel's Incompleteness Theorem. Oxford: Oxford University Press, 1992.

Статья поступила 14.03.2015 г.

Zyuz'kov V.M. SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF UNDECIDABLE INDIRECTLY REFLECTIVE SENTENCES

DOI 10.17223/19988621/35/2

Indirectly reflective sentences in the ω-consistent theory of formal arithmetic are studied. Sufficient conditions for the existence of undecidable indirectly reflective sentences are proved.

Keywords: formal arithmetic, indirect reflexion, undecidable sentences.

ZYUZ'KOV Valentin Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, 1998.
2. Boolos G. Jeffrey R. *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 1974.
3. Zyuz'kov V.M. Nerazreshimye kosvenno refleksivnye predlozheniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2010, no. 1(9), pp. 21–33. (in Russian)
4. Smullyan R.M. *Gödel's Incompleteness Theorem*. Oxford, Oxford University Press, 1992.