УДК 517.955.8
DOI 10.17223/19988621/35/4

Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Доказана возможность применения метода пограничных функций для построения равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с особыми точками, причем в этих точках условие теоремы А.Н. Тихонова не выполняется. Получена оценка остаточного члена, т.е. обосновано формальное асимптотическое разложение решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: *асимптотика*, *решение*, *бисингулярное возмущение*, *уравнение эллиптического типа*, *особая точка*, *задача Дирихле*, *обобщенный метод пограничных функций*, *пограничные функции*, *малый параметр*.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического дифференциального уравнения

$$\varepsilon\Delta u - (1-x^2)\, u_y = f(x,y),\ (x,y)\in D = \{(x,y)|\ y > x^2-1,\ y < 0\}; \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \psi(x,y),\ \Gamma = \partial D, \tag{2}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $u = u(x,y,\varepsilon)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(D)$, $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, $\Gamma = \partial D$ – граница области D.

Сначала покажем бисингулярность задачи (1), (2). Первая сингулярность – решение предельного уравнения

$$-(1-x^2)\, u_y = f(x,y)$$

не может удовлетворять граничному условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое ищем в виде

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(x,y),\ \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$-(1-x^2)\frac{\partial \tilde{v}_0(x,y)}{\partial y} = f(x,y),$$

$$(1-x^2)\frac{\partial \tilde{v}_k(x,y)}{\partial y} = \Delta\, \tilde{v}_{k-1}(x,y),\ k\in\mathbf{N}.$$

Отсюда определяем $\tilde{v}_k(x,y)$:

$$\tilde{v}_0(x,y) = -\frac{1}{1-x^2}\int_{x^2-1}^{y} f(x,s)\,ds + \psi\left(x, x^2-1\right),$$

$$\tilde{v}_k(x,y) = \frac{1}{1-x^2}\int_{x^2-1}^{y} \Delta\tilde{v}_{k-1}(x,s)\,ds\,,\ k\in\mathbf{N}.$$

Заметим, что $\tilde{v}_k(x,y)\in C^{(\infty,\infty)}\left(\bar{D}\ \setminus(\pm1,0)\right)$, т.е. в точках (1,0) и (–1,0) все эти функции $\tilde{v}_k(x,y)$ имеют нарастающую особенность вида

$$\tilde{v}_k(x,y) = O(1/(1-x^2)^{1+3k}),\ k = 0,1,2,\ldots .$$

(Термин нарастающая особенность означает, что с увеличением номера k растет и особенность (порядок полюсов) функции $\tilde{v}_k(x,y)$.)

Внешнее решение имеет вид

$$V = \frac{1}{\left(1-x^2\right)}\left(-f(x,y) + \frac{\varepsilon}{\left(1-x^2\right)^2}F_1(x,y) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{\left(1-x^2\right)^3}\right)^m F_m(x,y) + \ldots\right), \text{ при } \varepsilon\to0,$$

где $F_k(x,y)\in C^{(\infty,\infty)}\left(\bar{D}\right)$, $k\in\mathbf{N}$.

Поэтому задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в точках (1,0) и (–1,0). В окрестности этих точек ряд (3) не только не приближает решение $u(x,y,\varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер [1].

Построение формального асимптотического разложения

Для построения формального асимптотического разложения (ФАР) решения задачи (1), (2) применяем модифицированный метод погранфункций [2, 3]. Этим же методом в работах [4, 5] исследованы бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения, в которых предельное уравнение не является дифференциальным уравнением.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x,y,\varepsilon) = V(x,y,\varepsilon) + \Pi(x,\tau,\varepsilon) + W(\eta,y,\mu) + Q(\zeta,y,\mu), \tag{4}$$

где
$$V(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x,y)$$

– регулярное внешнее решение;

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \pi_k(x,\tau)$$

– классическая пограничная функция;

$$W(\eta,y,\mu) = \sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\eta,y)\,,\ Q(\zeta,y,\mu) = \sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k q_k(\zeta,y)$$

– обобщенные пограничные функции; $\tau = y/\varepsilon$, $\eta = (1-x)/\mu$, $\zeta = (1+x)/\mu$, $\varepsilon = \mu^3$.

Учитывая граничное условие (2), имеем

$$V(x,y,\varepsilon)\Big|_{y=x^2-1}=\psi\left(x,x^2-1\right); \qquad (5)$$

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon)|_{\tau=0}=\psi(x,0)-V(x,0,\varepsilon),\ \Pi(x,\tau,\varepsilon)\to 0,\ \text{при}\ \tau\to-\infty; \qquad (6)$$

$$W(0,0,\mu)=0,\ W(\eta,y,\mu)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty; \qquad (7)$$

$$Q(0,0,\mu)=0,\ Q(\zeta,y,\mu)\to 0,\ \text{при}\ \zeta\to+\infty. \qquad (8)$$

Подставляя (4) в (1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\Delta v_k(x,y)-\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}\left(\frac{\partial^2\pi_k(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\pi_k(x,\tau)}{\varepsilon^2\partial\tau^2}\right)-\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial\pi_k(x,\tau)}{\varepsilon\partial\tau}+$$

$$+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k(\eta,y)}{\partial\eta^2}-\eta(2-\mu\eta)\frac{\partial w_k(\eta,y)}{\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 w_k(\eta,y)}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 q_k(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}-\zeta(2-\mu\zeta)\frac{\partial q_k(\zeta,y)}{\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 q_k(\zeta,y)}{\partial y^2}\right)=$$

$$=f(x,y)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(x,y)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}h_k(x,y). \qquad (9)$$

По идее метода, мы в правую часть последнего равенства ввели новую, пока неизвестную функцию $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(x,y)$, функции $h_k(x,y)$ конкретизируются ниже.

Регулярное внешнее решение

Из (5) и (9) для функции $v_k(x,y)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(\Delta v_{k-1}(x,y)-\left(1-x^2\right)\frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y}+h_k(x,y)\right)-$$

$$-\left(1-x^2\right)\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}=f(x,y)-h_0(x,y),$$

$$v_0(x,y)\Big|_{y=x^2-1}=\psi\left(x,x^2-1\right),v_k(x,y)\Big|_{y=x^2-1}=0,\ k\in\mathbf{N}.$$

Отсюда получим

$$-\left(1-x^2\right)\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}=f(x,y)-h_0(x,y),\ v_0(x,y)\Big|_{y=x^2-1}=\psi\left(x,x^2-1\right); \qquad (10)$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y}=\Delta v_{k-1}(x,y)+h_k(x,y),\ v_k(x,y)\Big|_{y=x^2-1}=0,\ k\in\mathbf{N}. \qquad (11)$$

Решения задач (10), (11) имеют соответственно вид

$$v_0(x,y)=-\frac{1}{\left(1-x^2\right)}\int_{x^2-1}^{y}\left(f(x,s)-h_0(x,s)\right)ds+\psi\left(x,x^2-1\right),$$

$$v_k(x,y) = -\frac{1}{\left(1-x^2\right)} \int\limits_{x^2-1}^{y} \left(\Delta v_{k-1}(x,s) + h_k(x,s)\right) ds .$$

Пусть $$g_k(x, y) = -\Delta v_{k-1}(x,y),$$

тогда $$v_k(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}\left(\bar{D}\right),\ k = 0,1,\ldots,$$

при $$h_0(x,y) = (f(1,y)(1+x)+f(-1,y)(1-x))/2,$$

$$h_k(x,y) = (g_k(1,y)(1+x)+ g_k(-1,y)(1-x))/2,\ k\in\mathbf{N}.$$

Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение:

$$V(x,y,\varepsilon) = \psi\left(x, x^2-1\right) + \frac{1}{\left(1-x^2\right)} \left\{ \int\limits_{x^2-1}^{y} \left(\frac{f(1,s)(1+x) + f(-1,s)(1-x)}{2} - f(x,s) \right) ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\int\limits_{x^2-1}^{y} \left(g_k(x,s) - \frac{g_k(1,s)(1+x) + g_k(-1,s)(1-x)}{2} \right) ds \right) \right\}.$$

Классическая пограничная функция

Из (6) и (9) для функции $\pi_k(x,\tau)$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2 \pi_0(x,\tau)}{\partial \tau^2} - \left(1-x^2\right) \frac{\partial \pi_0(x,\tau)}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \pi_1(x,\tau)}{\partial \tau^2} - \left(1-x^2\right) \frac{\partial \pi_1(x,\tau)}{\partial \tau} \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial^2 \pi_k(x,\tau)}{\partial \tau^2} - \left(1-x^2\right) \frac{\partial \pi_k(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \pi_{k-2}(x,\tau)}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$\pi_0(x,0) = \psi(x,0) - v_0(x,0),\ \pi_k(x,0) = -v_k(x,0),\ k\in\mathbf{N};$$

$$\pi_k(x,\tau) \to 0 \ \text{ при } \tau \to -\infty,\ \ k = 0,1,2,\ldots .$$

Отсюда $$l\pi_0 \equiv \frac{\partial^2 \pi_0(x,\tau)}{\partial \tau^2} - \left(1-x^2\right) \frac{\partial \pi_0(x,\tau)}{\partial \tau} = 0,$$

$$\pi_0(x,0) = \psi(x,0) - v_0(x,0),\ \pi_0(x,\tau)\to 0, \text{ при } \tau\to-\infty; \tag{12}$$

$$l\pi_1 = 0,\ \pi_1(x,0) = -v_1(x,0),\ \pi_1(x,\tau)\to 0, \text{ при } \tau\to-\infty; \tag{13}$$

$$l\pi_k = -\frac{\partial^2 \pi_{k-2}(x,\tau)}{\partial x^2},\ \pi_k(x,0) = -v_k(x,0),\ \pi_k(x,\tau)\to 0, \text{ при } \tau\to-\infty,\ k>1. \tag{14}$$

Задачи (12) – (14) имеют единственные решения, представимые соответственно в виде

$$\pi_0(x,\tau) = \left(\psi(x,0) - v_0(x,0)\right) e^{\left(1-x^2\right)\tau},$$

$$\pi_1(x,\tau) = -v_1(x,0) e^{\left(1-x^2\right)\tau},$$

$$\pi_k(x,\tau) = e^{\left(1-x^2\right)\tau} \left(-v_k(x,0) + \tau P_k(x,\tau)\right),$$

$k>1$, $P_k(x,\tau)$– ограниченная, гладкая функция.

Обобщенные пограничные функции

Функцию $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(x,y)$ представим в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}h_{1k}(x,y)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}h_{2k}(x,y),$$

где $$h_{1k}(x,y)=f(1,y)-\frac{1-x}{2}f(1,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(g_k(1,y)-\frac{1-x}{2}g_k(1,y)\right),$$

$$h_{2k}(x,y)=f(-1,y)-\frac{1+x}{2}f(-1,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(g_k(-1,y)-\frac{1+x}{2}g_k(-1,y)\right).$$

Из (7) и (9) для функции $w_k(\eta,y)$ имеем

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 w_k(\eta,y)}{\partial\eta^2}-\eta(2-\mu\eta)\frac{\partial w_k(\eta,y)}{\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 w_k(\eta,y)}{\partial y^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}h_{1k}(1-\mu\eta,y),$$

$$w_k(0,0)=0,\ w_k(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty.$$

Отсюда получим

$$Lw_{-1}\equiv\frac{\partial^2 w_{-1}(\eta,y)}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial w_{-1}(\eta,y)}{\partial y}=f(1,y),$$

$$w_{-1}(0,0)=0,\ w_{-1}(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty; \tag{15}$$

$$Lw_0=-\frac{\eta}{2}\frac{\partial^2 w_{-1}(\eta,y)}{\partial\eta^2},$$

$$w_0(0,0)=0,\ w_0(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty; \tag{16}$$

$$Lw_1=-\eta^2\frac{\partial w_0(\eta,y)}{\partial y}-\frac{\partial^2 w_{-1}(\eta,y)}{\partial y^2},$$

$$w_1(0,0)=0,\ w_1(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty; \tag{17}$$

$$Lw_{3k-1}=-\eta^2\frac{\partial w_{3k-2}(\eta,y)}{\partial y}-\frac{\partial^2 w_{3k-3}(\eta,y)}{\partial y^2}+g_k(1,y),$$

$$w_{3k-1}(0,0)=0,\ w_{3k-1}(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N}; \tag{18}$$

$$Lw_{3k}=-\frac{\eta}{2}\left(2\eta\frac{\partial w_{3k-1}(\eta,y)}{\partial y}+g_k(1,y)\right)-\frac{\partial^2 w_{3k-2}(\eta,y)}{\partial y^2},$$

$$w_{3k}(0,0)=0,\ w_{3k}(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N}; \tag{19}$$

$$Lw_{3k+1}=-\eta^2\frac{\partial w_{3k}(\eta,y)}{\partial y}-\frac{\partial^2 w_{3k-1}(\eta,y)}{\partial y^2},$$

$$w_{3k+1}(0,0)=0,\ w_{3k+1}(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N}. \tag{20}$$

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Задачи такого типа встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя [6].

Действительно, задачу

$$\frac{\partial^2 w(\eta,y)}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial w(\eta,y)}{\partial y}=\Phi(\eta,y),$$

$$w(0,0)=0,\ w(\eta,y)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to+\infty$$

с помощью преобразования $t = 9y/8$, $z = \eta^{3/2}$ можно привести к уравнению

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}+\frac{1}{3z}\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}-\frac{4}{9\sqrt[3]{z^2}}\Phi(z,t),$$

$$w(0,0)=0,\ w(z,t)\to 0,\ \text{при}\ z\to+\infty,$$

которое имеет решение [6]

$$w(z,t)=-\frac{2}{9}\int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)\frac{z^{1/3}}{t-\tau}e^{-\frac{z^2+\xi^2}{4(t-\tau)}}I_{1/3}\left(\frac{z\xi}{2(t-\tau)}\right)d\xi d\tau,$$

где $I_{1/3}(s)$ – модифицированная функция Бесселя.

Асимптотическое поведение решения задач (15) – (20) при $\eta\to+\infty$, можно определить с помощью ряда:

$$w_{-1}(\eta,y)=\frac{a_1(y)}{\eta}+\frac{a_2(y)}{\eta^2}+\ldots+\frac{a_n(y)}{\eta^n}+\ldots \tag{21}$$

Подставляя (21) в (15), имеем

$$\left\{\frac{2a_1(y)}{\eta^3}+\ldots+\frac{n(n+1)a_n(y)}{\eta^{n+2}}\right\}-2\eta\left\{\frac{a'_1(y)}{\eta}+\ldots+\frac{a'_n(y)}{\eta^n}\right\}=f(1,y).$$

Отсюда

$$w_{-1}(\eta,y)=\frac{a_1(y)}{\eta}+\frac{a_4(y)}{\eta^4}+\ldots+\frac{a_{3n+1}(y)}{\eta^{3n+1}}+\ldots,$$

где $\quad a'_1(y)=-f(1,y)/2,\ a'_{3n+1}(y)=(3n-2)(3n-1)a_{3n-2}(y),$

$$a_{3n-1}(y)\equiv a_{3n}(y)\equiv 0,\ n\in\mathbf{N}.$$

Для решения задач (16) – (20) получим

$$w_0(\eta,y)=O\left(\frac{1}{\eta^3}\right),w_1(\eta,y)=O\left(\frac{1}{\eta^2}\right),w_{3k-1}(\eta,y)=O\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

$$w_{3k}(\eta,y)=O\left(\frac{1}{\eta^3}\right),\ w_{3k+1}(\eta,y)=O\left(\frac{1}{\eta^2}\right),\ k\in\mathbf{N}.$$

Следовательно, справедливо

$$\forall k,\ w_k(\eta,y)\to 0\ \text{при}\ \eta\to+\infty;$$

$$w_k(\eta,y)\in C^\infty(\bar{D}),\ k=-1,0,1,\ldots.$$

Аналогично, из (8) и (9) для функции $q_k(\zeta,y)$ получим

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k+1}\left(\frac{\partial^2 q_k(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}-\zeta(2-\mu\zeta)\frac{\partial q_k(\zeta,y)}{\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 q_k(\zeta,y)}{\partial y^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}h_{2k}(1-\mu\zeta,y),$$

$$q_k(0,0)=0,\ q_k(\zeta,y)\to 0\ \text{при}\ \zeta\to+\infty.$$

Отсюда имеем

$$Pq_{-1} \equiv \frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial\zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial q_{-1}(\zeta, y)}{\partial y} = f(-1, y),$$

$$q_{-1}(0,0) = 0,\ q_{-1}(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty;$$

$$Pq_0 = -\frac{\zeta}{2}\frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial\zeta^2},\ q_0(0,0) = 0,\ q_0(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty;$$

$$Pq_1 = -\zeta^2 \frac{\partial q_0(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{-1}(\zeta, y)}{\partial y^2},\ q_1(0,0) = 0,\ q_1(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty;$$

$$Pq_{3k-1} = -\zeta^2 \frac{\partial q_{3k-2}(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{3k-3}(\zeta, y)}{\partial y^2} + g_k(-1, y),$$

$$q_{3k-1}(0,0) = 0,\ q_{3k-1}(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N};$$

$$Pq_{3k} = -\frac{\zeta}{2}\left(2\zeta \frac{\partial q_{3k-1}(\zeta, y)}{\partial y} + g_k(-1, y)\right) - \frac{\partial^2 q_{3k-2}(\zeta, y)}{\partial y^2},$$

$$q_{3k}(0,0) = 0,\ q_{3k}(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N};$$

$$Pq_{3k+1} = -\zeta^2 \frac{\partial q_{3k}(\zeta, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 q_{3k-1}(\zeta, y)}{\partial y^2},$$

$$q_{3k+1}(0,y) = 0,\ q_{3k+1}(\zeta,y) \to 0, \text{ при } \zeta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N}.$$

Асимптотическое поведение решения этих задач при $\zeta\to+\infty$ имеет вид

$$q_{3k-1}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right),\ q_{3k}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta^3}\right),\ q_{3k+1}(\zeta, y) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Обоснование ФАР решения задачи (1), (2)

Пусть $$R(x,y,\varepsilon) = u(x,y,\varepsilon) - u_n(x,y,\varepsilon),$$

где $$u_n(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x, y) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \pi_k(x, \tau) + \sum_{k=-1}^{3n} \mu^k w_k(\eta, y) + \sum_{k=-1}^{3n} \mu^k q_k(\zeta, y),$$

$R(x,y,\varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(x,y,\varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon\Delta R - (1-x^2)R_y = O(\varepsilon^{n+2/3}),\ R|_\Gamma = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Из принципа максимума следует, что

$$R = O(\varepsilon^{n+1/3}).$$

Нами доказана

Теорема. Если $f(x,y)\in C^{(\infty,\infty)}(\bar{D})$, $f(\pm1,y)\neq0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} w_k\left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, y\right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} q_k\left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, y\right)$$

при $\varepsilon\to0$.

Заключение

Построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничными особыми точками, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет простые точки поворота на границе области. Главный член асимптотики решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Построенная равномерная асимптотика решения поставленной задачи не улучшаемая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
2. *Alymkulov K.* Analog of method of boundary layer function for the solution of the Lighthill's model equation with the regular singular point // American Journal Math. & Statistics. 2013. V. 3. No. 1. P. 53–61.
3. *Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф.* Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 484–487.
4. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 37–44.
5. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
6. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Статья поступила 27.10.2014 г.

Tursunov D.A., *Erkebaev U.Z.* ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF A PERTURBED ELLIPTIC EQUATION WHEN THE LIMIT EQUATION HAS SINGULAR POINTS

DOI 10.17223/19988621/35/4

The classical method of boundary functions is used to construct asymptotic expansions of solutions of perturbed Prandtl–Tikhonov type equation in the case of the exponential asymptotic stability of solutions of the equation in the fast variable, i.e. when the condition of A.N. Tikhonov's theorem is satisfied. When this condition is not satisfied, the boundary functions method cannot be applied directly. For this reason, in such cases, many researchers previously used the Van Dyke matching principle. But the disadvantage of the method of matching is that the formal asymptotic expansion of the solution constructed by matching cannot be justified is all cases. We have proved the possibility of applying the method of boundary functions for constructing a uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for the bisingular perturbed elliptic equation when the limit equation is the first order differential equation with singular points, and the condition of A.N. Tikhonov's theorem is not satisfied at these points. An estimate of the remainder term has been obtained, i.e., the formal asymptotic expansion solution of the problem has been justified. The uniform asymptotic expansion of the solution of the problem we have constructed consists of four solutions: the regular (smooth) external solution, the classical boundary layer solution, and two generalized boundary layer solution. The regular external part of the solution satisfies the boundary condition, and this solution has no singularities, i.e. is an everywhere smooth function. The classical boundary layer solution satisfies the second part of the boundary condition, and tends exponentially to zero outside the border inside the area. The generalized boundary functions satisfy the boundary condition at the singular points, and have the power damping property outside the singular points inside the region.

Keywords: asymptotic, solution, bisingular perturbed, elliptic type equation, singular point, Dirichlet problem, generalized method of boundary functions, boundary function, small parameter.

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physics and Mathematics,
Ural State Pedagogical University, Yekaterinburg, Russian Federation)
E-mail: d_osh@rambler.ru

ERKEBAEV Ulukbek Zairbekovich (Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)
E-mail: uluk3188@mail.ru

REFERENCES

1. Il'in A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach*. Moskow, Nauka Publ., 1989. 334 p. (in Russian)
2. Alymkulov K. Analog of method of boundary layer function for the solution of the Lighthill's model equation with the regular singular point. *American Journal Math. & Statistics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 53–61.
3. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogranfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka. *Matematicheskie zametki*, 2013, vol. 94, no. 4, pp. 484–487. (in Russian)
4. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 6(26), pp. 37–44. (in Russian)
5. Tursunov D.A. Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Cluchay osoboy tochki na granitse. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 31–35. (in Russian)
6. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki*. Moskow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (in Russian)