ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 3(35)

УДК 530.145.65
DOI 10.17223/19988621/35/9

И.П. Попов

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ИДЕНТИЧНЫМИ ЧАСТИЦАМИ С РАЗНЫМИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМИ СКОРОСТЯМИ

Доказаны две теоремы, связывающие групповую скорость волнового пакета, образованного двумя свободными идентичными частицами с разными нерелятивистскими скоростями, с параметрами гармоник.

Ключевые слова: *циклическая частота, волновое число, постоянная Планка, фазовая скорость.*

В ряде задач исследуются квантовые системы, состоящие из двух частиц [1–3]. При этом преимущественно рассматриваются частицы, связанные взаимодействием в большей [1, 2] или меньшей [3] степени. Потенциал взаимодействия существенно влияет на вид волновой функции и в любом случае обусловливает непрерывный спектр ее гармоник. Установление квазиимпульса двухчастичной системы [1] и интерпретация волновой функции как ядра интегрального оператора (Гильберта – Шмидта) [3] предполагают определение групповых скоростей волновых пакетов, что не представляет затруднений в силу непрерывности их спектров.

При движении частиц (не связанных взаимодействием) с неравными фиксированными скоростями частоты волн де Бройля образуют дискретный спектр, в связи с чем для определения групповой скорости волнового пакета формула

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{1}$$

[4] не подходит, поскольку предполагает, по крайней мере, кусочно-непрерывную зависимость $\omega(k)$. Здесь ω – циклическая частота, k – волновое число.

Задача, таким образом, заключается в отыскании формулы групповой скорости для дискретных значений ω и k. Результаты решения этой задачи могут быть применены к классу частиц, не связанных полевыми взаимодействиями, в том числе нейтронам, которые в результате некоторых ядерных реакций образуют двухчастичные квантовые системы, например

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}n .$$

Пусть две частицы образуют квантовую систему в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеют одинаковые массы m и движутся с фиксированными нерелятивистскими скоростями v_1 и v_2. В начальный момент координаты частиц совпадают. Соответствующий им волновой пакет имеет вид

$$\Psi(x,t) = Ce^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + Ce^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}\,, \tag{2}$$

где C определяется из условий нормировки волновой функции.

При этом

$$\omega = \frac{mv^2}{2\hbar}, \tag{3}$$

$$k = \frac{mv}{\hbar}, \tag{4}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \tag{5}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, v_φ – фазовая скорость [4, 5].

Для названных условий имеют место две теоремы, первую из которых предваряет следующая

Лемма. Справедлива формула

$$e^{iz_1} + e^{iz_2} = 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(z_1+z_2)}.$$

Доказательство.

$$e^{iz_1} + e^{iz_2} = \cos z_1 + i\sin z_1 + \cos z_2 + i\sin z_2 =$$

$$= \cos z_1 + \cos z_2 + i\left(\sin z_1 + \sin z_2\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cos\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(z_1+z_2)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Групповая скорость волнового пакета (2) определяется выражением

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}. \tag{6}$$

Доказательство. В соответствии с леммой выражение (2) приводится к виду

$$\Psi(x,t) = 2C\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)e^{-\frac{i}{2}[(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x]}.$$

Модуль волновой функции

$$|\Psi| = 2C\left|\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\right|.$$

Групповая скорость – это скорость перемещения максимума модуля [4], который достигается при условии

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x = 0.$$

За время t максимум модуля перемещается на расстояние x [6]. Таким образом, его скорость, или групповая скорость,

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. (6) можно представить в виде

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Таким образом (1) является предельным случаем (6).

Теорема 2. Групповая скорость волнового пакета (2) равна сумме фазовых скоростей его гармоник

$$v_g = v_{\varphi 1} + v_{\varphi 2} = \frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}.$$

Доказательство. Очевидно тождество

$$\frac{mv_1^2}{2m^2v_1^2} = \frac{mv_2^2}{2m^2v_2^2}.$$

В соответствии с (3) и (4) оно приводится к виду

$$\frac{\hbar\omega_1}{\hbar^2k_1^2} = \frac{\hbar\omega_2}{\hbar^2k_2^2}, \tag{7}$$

$$\omega_1 k_2^2 - \omega_2 k_1^2 = 0,$$

$$\omega_2 k_1 k_2 - \omega_1 k_1 k_2 = \omega_1 k_2^2 - \omega_2 k_1^2 + \omega_2 k_1 k_2 - \omega_1 k_1 k_2,$$

$$k_1 k_2 (\omega_2 - \omega_1) = \omega_1 k_2 (k_2 - k_1) + \omega_2 k_1 (k_2 - k_1),$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\omega_1 k_2 + \omega_2 k_1}{k_1 k_2} = \frac{\omega_1}{k_1} + \frac{\omega_2}{k_2}.$$

Или с учетом (5) и (6)

$$v_g = v_{\varphi 1} + v_{\varphi 2}.$$

Теорема доказана.

В [7–9] показано, что

$$\omega = \frac{mv^2}{\hbar}. \tag{8}$$

При этом вместо (7) следует записать

$$\frac{\hbar\omega_1}{2\hbar^2k_1^2} = \frac{\hbar\omega_2}{2\hbar^2k_2^2}.$$

Дальнейшие рассуждения не изменяются и теорема 2 справедлива также при условии (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лакаев С.Н.*, *Алладустов Ш.У.* Положительность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178. № 3. С. 390–402.

2. *Бутлицкий М.А.*, *Зеленер Б.Б.*, *Зеленер Б.В.*, *Маныкин Э.А.* Двухчастичная матрица плотности и псевдопотенциал электрон-протонного взаимодействия для ультранизких температур // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 1. С. 154–158.
3. *Хренников А.Ю.* Интегральная интерпретация двухчастичной волновой функции и представление квантовых корреляций с помощью случайных полей // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 164. № 3. С. 386–393.
4. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
5. *Фейнман Р.*, *Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
6. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 4. Оптика. М.: Наука, 1980. 752 с.
7. *Попов И.П.* Об одном проявлении инертности // Естественные и технические науки. 2013. № 1(63). С. 23–24.
8. *Попов И.П.* О влиянии инертности частицы на ее волновое представление // Вестник Забайкальского государственного университета. 2013. № 04(95). С. 90–94.
9. *Попов И.П.* О волновой энергии инертной частицы // Зауральский научный вестник. 2013. № 1(3). С. 60–61.

Статья поступила 29.07.2013 г.

Popov I.P. THE GROUP VELOCITY OF A WAVE PACKET FORMED BY TWO FREE IDENTICAL PARTICLES WITH DIFFERENT NON-RELATIVISTIC VELOCITIES

DOI 10.17223/19988621/35/9

Two theorems relating the group velocity of a wave packet formed by two identical free particles with different non-relativistic velocities with the parameters of harmonics are proved.

Keywords: angular frequency, wave number, Planck's constant, phase velocity.

POPOV Igor Pavlovich (Government of the Kurgan region, Kurgan, Russian Federation)
E-mail: ip.popow@yandex.ru

REFERENCES

1. Lakaev S.N., Alladustov Sh.U. Polozhitel'nost' sobstvennykh znacheniy dvukhchastichnogo operatora Shredingera na reshetke. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2014, vol. 178, no. 3, pp. 390–402. (in Russian)
2. Butlitskiy M.A., Zelener B.B., Zelener B.V., Manykin E.A. Dvukhchastichnaya matritsa plotnosti i psevdopotentsial elektron-protonnogo vzaimodeystviya dlya ul'tranizkikh temperatur. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2008, vol. 48, no. 1, pp. 154–158. (in Russian)
3. Khrennikov A.Yu. Integral'naya interpretatsiya dvukhchastichnoy volnovoy funktsii i predstavlenie kvantovykh korrelyatsiy s pomoshch'yu sluchaynykh poley. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2010, vol. 164, no. 3, pp. 386–393. (in Russian)
4. Blokhintsev D.I. *Osnovy kvantovoy mekhaniki*. Moskow, Nauka Publ., 1976. 664 p. (in Russian)
5. Feynman R., Khibs A. *Kvantovaya mekhanika i integraly po traektoriyam*. Moskow, Mir Publ., 1968. 384 p. (in Russian)
6. Sivukhin D.V. *Obshchiy kurs fiziki. Vol. 4. Optika*. Moskow, Nauka Publ., 1980. 752 p. (in Russian)
7. Popov I.P. Ob odnom proyavlenii inertnosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 1(63), pp. 23–24. (in Russian)
8. Popov I.P. O vliyanii inertnosti chastitsy na ee volnovoe predstavlenie. *Vestnik Zabaykal'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 04(95), pp. 90–94. (in Russian)
9. Popov I.P. O volnovoy energii inertnoy chastitsy. *Zaural'skiy nauchnyy vestnik*, 2013, no. 1(3), pp. 60–61. (in Russian)