

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2015

№ 4(36)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конец, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.08.2015.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9.03. Уч.-изд. л. 10.11. Тираж 300 экз. Заказ № 24.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1254.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскрыя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2.....	5
Гулько С.П., Титова А.В. Классификация пространств непрерывных S^1 -значных функций на полиэдрах	15
Кайгородов Е.В., Чедушев С.М. Кохопфовы абелевы группы	21
Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц.....	34
Разина А.В. Относительные голоморфы свободных абелевых групп и их нормальные подгруппы.....	41
Фуксон С.Л. Ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$	46

МЕХАНИКА

Дементьев А.А., Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. О влиянии концентрации горючего в гибридной газозвеси на скорость распространения фронта горения.....	55
Добрица Б.Т., Добрица Д.Б. Работоспособность защитных экранов с двойной сеткой при воздействии высокоскоростных частиц.....	64
Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня при наличии препятствий выпучиванию	71
Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенки.....	85
Сухоруков М.П. Численное моделирование собственных частот радиоэлектронной аппаратуры космического аппарата	93
Шваб А.В., Хайруллина В.Ю., Журавлев Е.В., Евсеев Н.С. Моделирование нестационарного и периодического закрученного турбулентного потока с частицами между профилированными дисками.....	101
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	113

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometric modelling of metallic mesh tailoring for axisymmetric reflector. Part 2.....	5
Gulko S.P., Titova A.V. On classification of spaces of continuous S^1 -valued functions on polihydrons	15
Kaigorodov E.V., Chedushev S. M. Co-Hopfian abelian groups	21
Norbosambuev T.D. On sums of diagonal and invertible formal matrices	34
Razina A.V. Relative holomorphs of free abelian groups and their invariant subgroups	41
Fukson S.L. Orthogonalities in $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$	46

MECHANICS

Dement'ev A.A., Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. On the influence of the fuel concentration in a hybrid gas-suspension on the speed of the combustion front propagation.....	55
Dobritsa B.T., Dobritsa D.B. Serviceability of mesh double-bumper shields under the action of high-velocity particles.....	64
Dorogov Yu.I. Stability of a column in the presence of obstacles to buckling	71
Matvienko O.V., Andropova A.O. Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall.....	85
Sukhorukov M.P. Numerical simulation of natural frequencies of the spacecraft radio electronic equipment	93
Shvab A.V., Khairullina V.Yu., Zhuravlev E.V., Evseev N.S. Simulation of an unsteady and periodic swirling turbulent flow with particles between profiled discs	101

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	113
---	------------

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

DOI 10.17223/19988621/36/1

М.С. Бухтяк, А.В. Соломина

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСКРОЯ СЕТЕПОЛОТНА
ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РЕФЛЕКТОРА. ЧАСТЬ 2

Исследована методика раскроя, основанная на использовании плоских клиновидных лепестков для формирования вырезки из параболоида вращения. Решалась следующая задача: указать конфигурацию лепестка, исходя из параметров рефлектора и требования сохранения (насколько это возможно) существенных геометрических характеристик. К ним отнесены длины определенных линий на параболоиде. Обоснована целесообразность прогиба во вне боковых граничных линий лепестка, вычислены параметры прогиба. Для чрезмерно сложных функций, примененных при построении модели, построены аппроксимации и оценена их надежность.

Ключевые слова: *параболическая антенна, сетеполотно, лепесток, прогиб, конфигурация, аппроксимация.*

1. Постановка задачи

Данная работа является продолжением [1]. Как и в указанной публикации, термин «раскрой» означает и «выкройку» листа сетеполотна и некоторый способ прикрепления его к несущим конструкциям. Оптимизация раскроя трактуется как уменьшения локальных деформаций сетеполотна. Как и в [1, 2], определяется *раскрой как точечное соответствие между временно плоским листом и областью на параболоиде*. Вопросы, связанные с СКО (средним квадратичным отклонением реальной поверхности сетеполотна от идеального параболоида), здесь не рассматриваются по соображениям, изложенным в [1].

В упомянутой первой части речь шла о прикреплении к несущим конструкциям плоского диска, тем или иным способом сшитого из сетеполотна. Решалась вариационная задача: если раскрой именно таков, то каким должно быть соответствие между диском и куском параболоида, чтобы степень равномерности натяжения сетеполотна в различных его точках была как можно более высокой – при дополнительном требовании повышенного внимания к центральной области рефлектора как наиболее важной для улучшения радиофизических характеристик антенны. Применению вариационного подхода предшествовали некоторые соображения не вполне строгого характера, которые, однако, сыграли свою (эвристическую) роль при уточнении вариационной задачи.

В предложенной статье рассмотрена иная схема раскроя, основанная на использовании нескольких одинаковых лепестков сетеполотна, которые сшиваются между собой, а затем прикрепляются к несущим конструкциям рефлектора. Модель строится на основе довольно естественных «эвристических» соображений,

облегчающих постановку вариационной задачи, но размеры статьи заставляют отложить этот вопрос до третьей части.

Действуя как в [1, 3], мы вводим в рассмотрение две параметризованные поверхности

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v).$$

Точки $A = \mathbf{r}_1(u, v)$ и $A' = \mathbf{r}_2(u, v)$ как раз и являются соответствующими. Локальная метрика каждой из поверхностей определяется соответствующим метрическим тензором. Матрицы этих тензоров составлены из коэффициентов первых квадратичных форм

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Сами же первые квадратичные формы [4] имеют вид

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Мерой локального искажения длин (точнее, их квадратов) является величина

$$\lambda = \frac{ds_2^2}{ds_1^2}.$$

Экстремальные значения λ суть совместные инварианты матриц M_1 и M_2 , равные корням уравнения

$$m \equiv \det(M_2 - \lambda M_1) = E_1 G_1 - F_1^2 + \lambda(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + \lambda^2(E_2 G_2 - F_2^2) = 0. \quad (1.1)$$

Важно отметить, что положительная определенность симметричных матриц M_1 и M_2 гарантирует вещественность корней уравнения (1.1). Коэффициенты уравнения (1.1) обозначим

$$a = E_2 G_2 - F_2^2, \quad b = 2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1, \quad c = E_1 G_1 - F_1^2.$$

2. Построение модели

Данная схема составлена в предположении, что сетеполотно слабо подвержено сдвиговым деформациям, и, следовательно, деформации в малой степени нарушают изначальную ортогональность нитей. Принцип раскроя пояснен рис. 1 и 2.

Родительский параболоид принято задавать уравнением

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}.$$

Нас интересует некоторая его осесимметричная часть, для задания которой мы применяем вектор-функцию

$$\mathbf{R} = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad (0 \leq u \leq R), \quad (2.1)$$

Здесь R – радиус вырезающего цилиндра. Ввиду симметрии полагаем, что достаточно изучить один лепесток, симметричный относительно плоскости Oxz . Пусть n – количество лепестков, составляющих рефлектор. Тогда к (2.1) следует добавить

$$\left(-\frac{\pi}{n} \leq v \leq \frac{\pi}{n} \right).$$

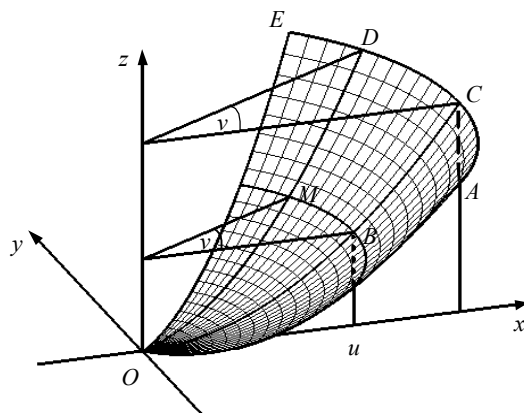


Рис. 1. Геометрический смысл криволинейных координат u, v

Параболоид рассечен плоскостью xOz . В сечении – парабола OBC . Переменному значению u на оси Ox отвечает переменная точка B на параболе. Длина дуги $\widehat{OB}$ параболы обозначена s . Из параболоида вырезается сектор, ограниченный плоскостями $y = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ и $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Положение текущей точки M на лепестке определяется значениями криволинейных координат u и v .

Выкройкой для параболического сектора $(OACE)$ служит плоский лепесток $(OA_1C_1E_1)$ (рис. 2). Соответствие между сектором параболоида и плоским лепестком устанавливается следующим образом.

$$|OM_1| = |\widehat{OM}| = s,$$

В частности,

$$|OB_1| = |\widehat{OB}| = s.$$

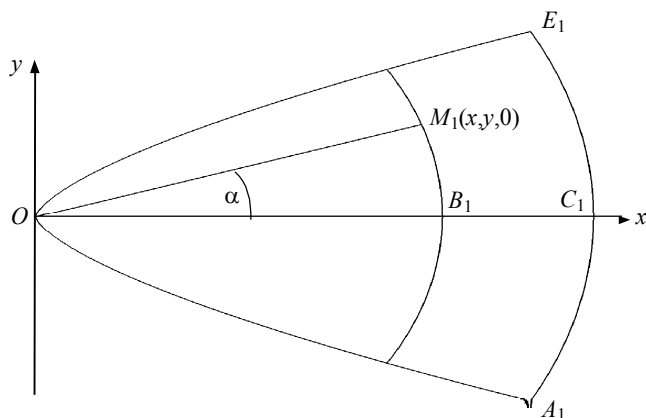


Рис. 2. Геометрический смысл параметризации плоского лепестка сетеполотна

Поскольку s есть длина линии (OB) , то есть куска параболы, то

$$s = \frac{1}{4F} \left(-4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + u\sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln \left(u + \sqrt{4F^2 + u^2} \right) \right).$$

Наибольшая из длин

$$|OC_1| = \frac{1}{4F} \left(-4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + R\sqrt{4F^2 + R^2} + 4F^2 \ln \left(R + \sqrt{4F^2 + R^2} \right) \right).$$

Таким образом, параметрическое задание плоской области имеет вид

$$r = \{x, y, 0\}, \quad (2.2)$$

где $x = s \cdot \cos \alpha$, $y = s \cdot \sin \alpha$, $\alpha = \frac{uv}{s}$,

$$\left(0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v \leq \frac{\pi}{n} \right)$$

Эффект «бочкообразности», видимый на рис. 2, прослеживаем для половины лепестка, отрезав её по оси Ox (рис. 3).

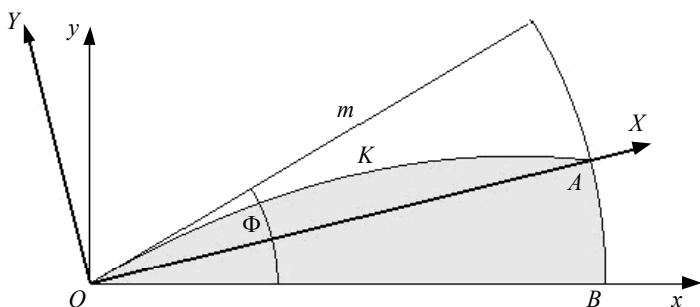


Рис. 3. Эффект «бочкообразности» лепестка

На рис. 3 граничный край лепестка, которым он примыкает к соседнему лепестку – дуга OKA . Прямолинейный отрезок m соответствует такому положению вещей, когда имеется намерение пренебречь «бочкообразностью» лепестка и замостить рефлектор прямолинейными клиньями, вместе составляющими плоский круг. Принимая в качестве новой системы координат XOY , мы можем записать уравнения указанной дуги. Это, однако, задача, которая, хотя в принципе допускает решение в общем (символьном) виде, но оно чрезвычайно громоздко, и приближение формулой Тэйлора не спасает положения. Вместо этого построена Maple-процедура, которая по входным параметрам F и R позволяет записать уравнение граничной линии OKA в системе координат XOY .

Примем для иллюстрации следующие параметры.

Фокальный параметр $F = 2(m)$,

Радиус вырезающего цилиндра $R = 3.3(m)$,

Число лепестков $n = 12$.

Половина угла расхождения лепестка в начале координат в градусах $\varphi = 15^\circ$.

Половина угла расхождения лепестка в начале координат в радианах $\Phi = \frac{\pi}{12}$.

Для этого примера в системе координат XOY получаем изображение граничной линии лепестка (рис. 4).

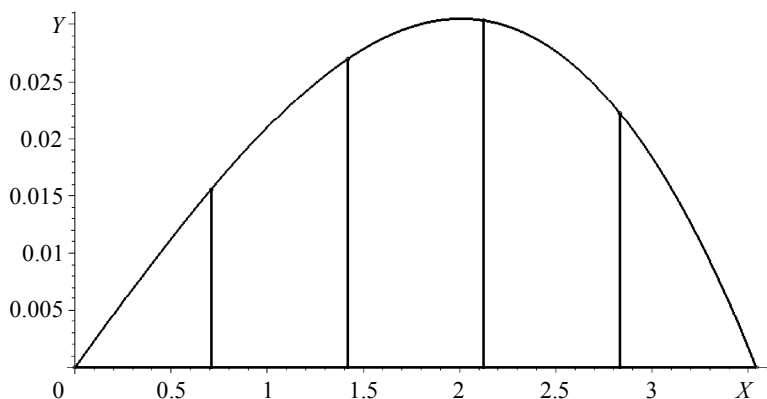


Рис. 4. Граничная линия лепестка в системе координат XOY
(размеры в m)

Уравнение этой линии (приближенно)

$$Y = 0.02286 + 0.0003574X - 0.00641907X^2 + 0.000242556X^3 + 0.000020817X^4.$$

Сам же лепесток имеет вид, показанный на рис. 5.

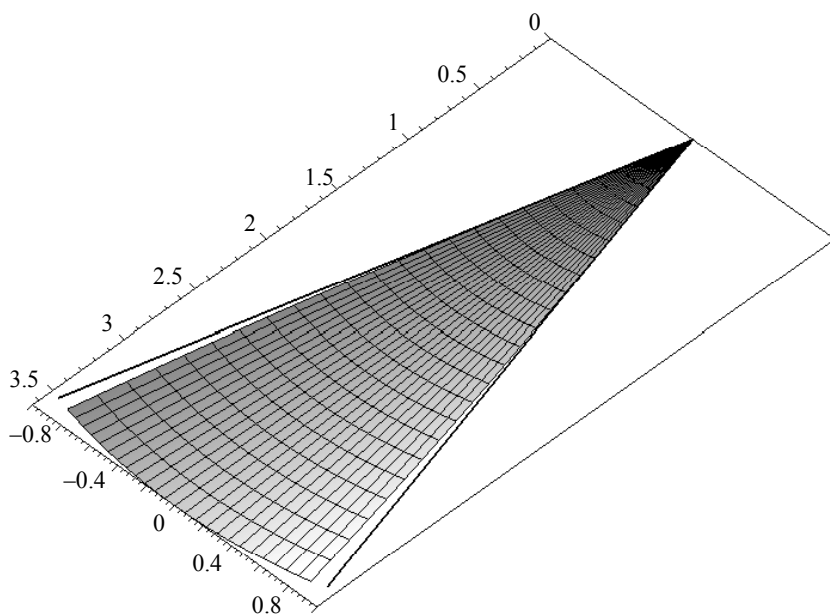


Рис. 5. Лепесток с «бочкообразными» краями.
Видны линии, соответствующие линиям m (рис. 3)

3. Аппроксимация

Для оценки качества раскроя следует вычислить экстремальные значения локальных искажений длин, то есть корни уравнения (1.1). Задача чрезмерно осложняется крайней громоздкостью вектор-функции (2.2). Полиномиальное приближение исправит ситуацию – если оно достаточно надежно. Для x и y из (2.2) применяем формулу Маклорена до 10-го порядка по каждой переменной. Тогда каждая из этих функций аппроксимируется полиномом от u и v . Указанные полиномы допускают матричную запись, приведенную ниже.

$$x = \begin{pmatrix} u & u^3 & u^5 & u^7 & u^9 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \begin{matrix} -0.50000 & 0.041667 & -0.001389 & 0.000025 \\ 0.020833 & -0.005208 & 0.000289 & -0.72338 \cdot 10^{-5} \\ 0.001649 & 0.000629 & -0.000047 & 0.14769 \cdot 10^{-5} \\ 0.000171 & -0.00008 & 0.71979 \cdot 10^{-5} & -0.265335 \cdot 10^{-6} \\ 0.000021 & 0.000011 & -0.10994 \cdot 10^{-5} & 0.453648 \cdot 10^{-7} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F^2 & F^2 & F^2 & F^2 \\ F^4 & F^4 & F^4 & F^4 \\ F^6 & F^6 & F^6 & F^6 \\ F^8 & F^8 & F^8 & F^8 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^4 \\ v^6 \\ v^8 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$y = \begin{pmatrix} u & u^3 & u^5 & u^7 & u^9 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -0.166667 & 0.008333 & -0.000198 \\ 0 & 0.013889 & -0.001389 & 0.000050 \\ 0 & -0.001389 & 0.000197 & -0.909392 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.000160 & -0.000028 & 0.151237 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -0.000021 & 0.397285 \cdot 10^{-5} & -0.244571 \cdot 10^{-6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F^2 & F^2 & F^2 & F^2 \\ F^4 & F^4 & F^4 & F^4 \\ F^6 & F^6 & F^6 & F^6 \\ F^8 & F^8 & F^8 & F^8 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ v^7 \\ v^9 \end{pmatrix}.$$

Для определения качества приближения построены графики отклонений приближенных значений координат от истинных. В частности, для координаты x получаем следующий график. Ось, градуированная от 0 до 3.3 – ось переменной u , вторая горизонтальная ось – ось переменной v . Вертикальная ось – расхождение в процентах исходной функции $x(u, v)$ и её приближения (3.1). Верхний график получен для $F = 1.9m$, средний – для $F = 2.0m$, нижний – для $F = 2.1m$

Соответственно для координаты y график представлен на рис. 7, и описание его соответствует описанию рис. 6.

Вычисляя корни уравнения (1.1), получаем пространственную диаграмму распределения значений меньшего корня вдоль одного лепестка для значения $F = 2.0m$ (горизонтальная ось, градуированная от 0 до 3.5 – ось Ox , ортогональная ей горизонтальная ось – ось Oy , вертикальная ось – значение меньшего корня).

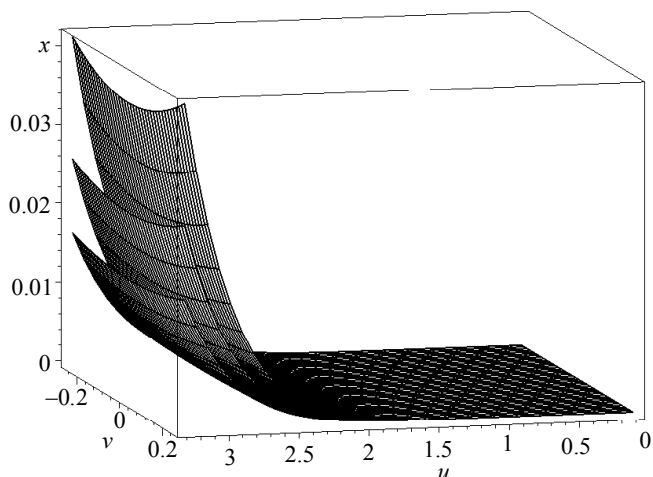


Рис. 6. Отклонения в процентах точного представления функции $x(u, v)$ от полиномиального приближения (3.1) для трех значений фокального параметра F

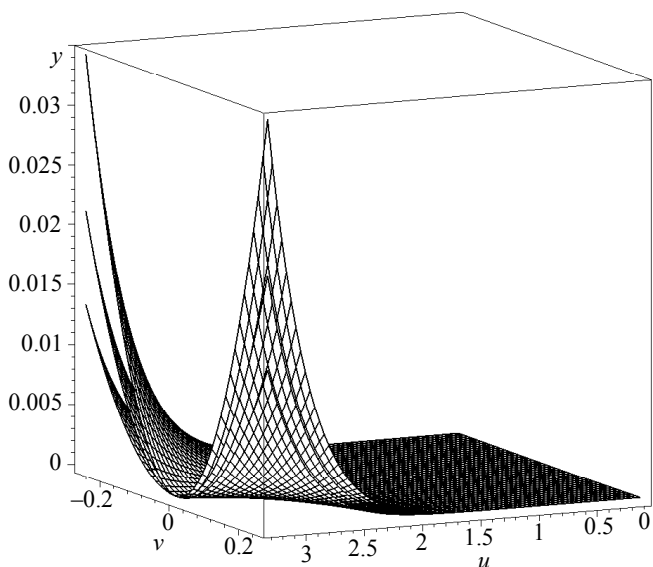


Рис. 7. Отклонения в процентах точного представления функции $y(u, v)$ от полиномиального приближения (3.1) для трех значений фокального параметра F

Если из 12 «бочкообразных» лепестков смонтирован рефлектор, то каждый лепесток испытывает локальные искажения длин, отраженное на диаграмме рис. 8. Спроецировав четвертую часть рефлектора на плоскость xOy , мы получаем контурную карту, изолинии которой показывают значения меньшего корня уравнения (1.1). Карта представлена на рис. 9. Толстые черные линии изображают проекции лепестков на горизонтальную плоскость.

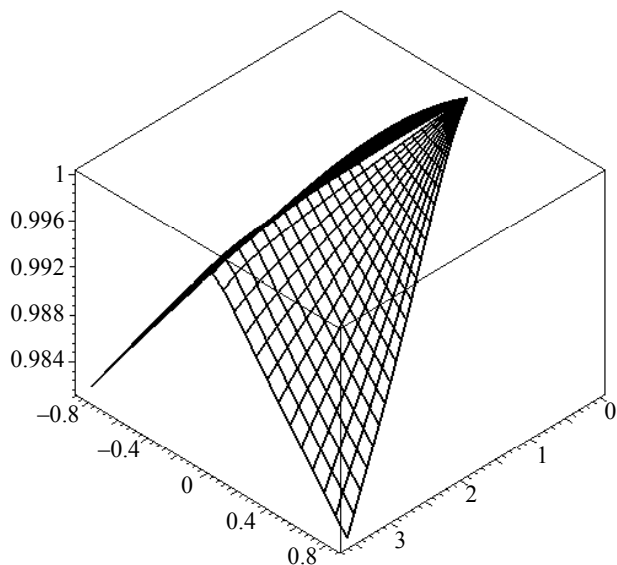


Рис. 8. Диаграмма распределения значений
меньшего корня уравнения (3.1)

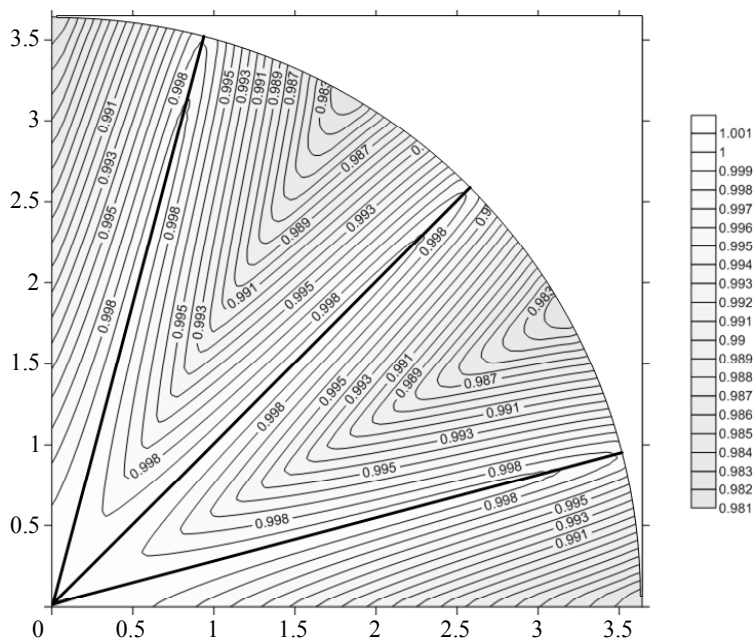


Рис. 9. Карта изолиний меньшего корня уравнения (3.1)
в проекции на горизонтальную плоскость

Соответственно для искажений локальных длин в большую сторону получаем рис. 10. Наконец, диаграмма искажений локальных площадей (то есть произведение корней уравнения (3.1)) представлена на рис. 11.

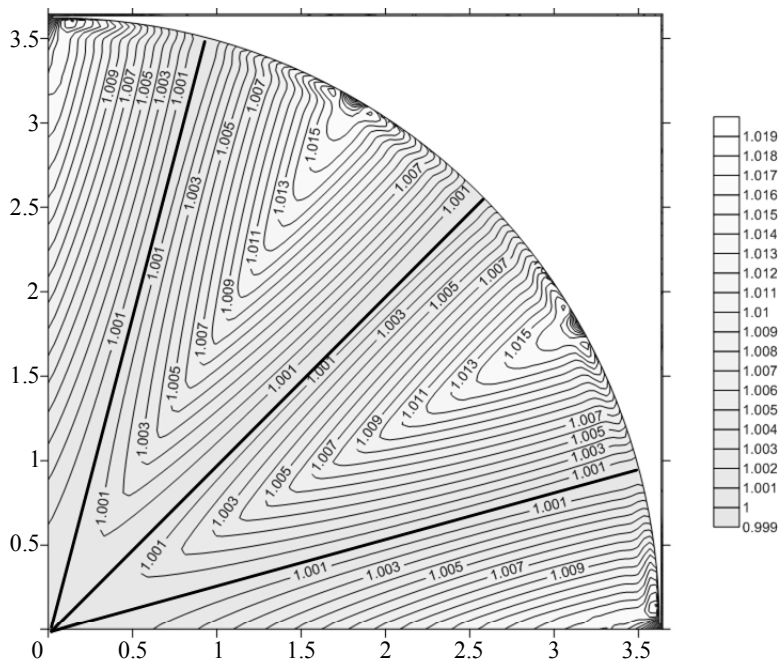


Рис. 10. Карта изолиний большего корня уравнения (3.1) в проекции на горизонтальную плоскость

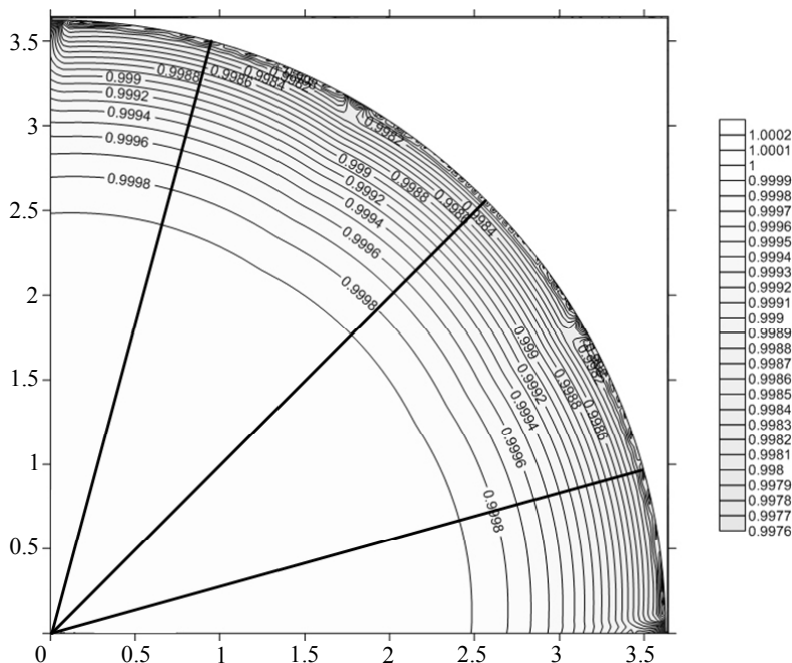


Рис. 11. Карта изолиний произведения корней уравнения (3.1) в проекции на горизонтальную плоскость

4. Заключение

Методика раскроя сетеполотна опирается на свойство металлических сетеполотен – слабое влияние свиговых деформаций. Поэтому в математической модели законно считать, что деформации несущественно нарушают изначальную ортогональность нитей. В [1] определен функционал, значение которого есть мера качества рассматриваемой схемы раскроя. Схема раскроя, рассмотренная здесь, подвергается испытанию в следующей, третьей части нашей работы. Есть основания полагать, что минимизация упомянутого функционала позволит улучшить результат, полученный в предложенной здесь работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя метеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Самылкина О.А. О раскрое сетеполотна для осесимметричного рефлектора // Всероссийская конференция по математике и механике: тез. докл. 2–4 октября 2013 г. Томск: ТГУ, 20013. С. 93.
3. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2(22). С. 5–16.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.

Статья поступила 15.04.2015 г.

Bukhtyak M.S., Solomina A.V. GEOMETRIC MODELLING OF METALLIC MESH TAILORING FOR AXISYMETRIC REFLECTOR. PART 2

DOI 10.17223/19988621/36/1

A method of tailoring has been examined. It is based on using flat wedge-shaped petals to make a cut-out from a paraboloid of revolution. The following problem has been solved. Specify a configuration of the patch based on reflector's parameters and a requirement to retain (as far as possible) the existing geometrical characteristics. Among them are the lengths of certain lines on the paraboloid. An expediency of deflection outwards the lateral boundary lines of the petal is proved. For excessively complex functions used in the model, approximations are built and their reliability is estimated.

Keywords: parabolic antenna, metallic mesh, petal, deflection, configuration, approximation.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail bukhtyakm@mail.ru

SOLOMINA Anna Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail annavladimirovna483@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya metepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 2(34), pp. 5–17. (in Russian)
2. Bukhtyak M.S., Samylkina O.A. O raskroe setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. *Vserossiyskaya konferentsiya po matematike i mekhanike: tez. dokl. 2013 October 2–4*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 20013, pp. 93. (in Russian)
3. Bukhtyak M.S., Nikul'chikov A.V. Modelirovanie deformatsii sotovoy paneli. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 2(22), pp. 5–16. (in Russian)
4. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 428 p. (in Russian)

УДК 515.127

DOI 10.17223/19988621/36/2

С.П. Гулько, А.В. Титова

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ S^1 -ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛИЭДРАХ

Исследуются пространства непрерывных S^1 -значных функций на конечно-мерных полиэдрах. Доказывается, что если X есть n -мерный полиэдр и S^1 есть обычная окружность со стандартной топологией, то топологическая группа $C_p(X, S^1)$ изоморфна топологической группе $C_p(\Delta_n, S^1)$, где Δ_n – n -мерный симплекс, $n \geq 1$.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости, полиэдр, топологическая группа, изоморфизм.

Все неопределенные в статье понятия можно найти в [1].

Пусть S^1 – обычная окружность, которую будем рассматривать как фактор-группу R^1/Z с естественной топологией. Иначе говоря, это есть множество всех точек в R^1 с периодом 1. Множество всех представителей можно отождествить с множеством точек полуинтервала $[0,1)$. Это множество тогда будет топологической группой относительно операции сложения. В этой статье нас интересует пространство $C_p(X, S^1)$ всех непрерывных S^1 -значных функций, наделенное топологией поточечной сходимости.

Как обычно, символом $C_p(Y, R^1)$ будем обозначать топологическое векторное пространство всех непрерывных вещественных функций со стандартными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Оператор $T: C_p(F, R^1) \rightarrow C_p(X, R^1)$ называется оператором продолжения, если F является замкнутым подпространством в X и $T(f)|_F = f$ для каждого $f \in C_p(Y, R^1)$. Если F есть замкнутое подмножество пространства X , то обозначим $C_p^0(X|_F, R^1) = \{f: X \rightarrow R^1; f|_F = 0\}$.

Теорема 1. Пусть X является метрическим пространством и F – его замкнутое подпространство, которое является окрестностным ретрактом. Тогда существует $T: C_p(F, R^1) \rightarrow C_p(X, R^1)$ – непрерывный линейный оператор продолжения, причем $0 \leq Tf < 1$ как только $0 \leq f < 1$.

Доказательство. Пусть O – окрестность множества F и $r: O \rightarrow F$ – непрерывная ретракция. Для каждой функции $f \in C_p(F, R^1)$ положим

$$T(f)(x) = \begin{cases} f(r(x)) \frac{\rho(x, X \setminus O)}{\rho(x, X \setminus O) + \rho(x, F)}, & x \in O; \\ 0, & x \in X \setminus O. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что T – линейный непрерывный оператор и $T(f)|_F = f$, т.е. это отображение является оператором продолжения. ■

Заметим, что линейный непрерывный оператор продолжения может существовать не только благодаря ретракциям (см. ниже доказательство следствия 5). Кроме того, для существования оператора продолжения метризуемость пространства X вовсе не является необходимым условием.

Из теоремы 1 следует, что для каждого замкнутого подмножества F в X пространство $C_p(F, R^1)$ вкладывается как замкнутое векторное подпространство в $C_p(X, R^1)$.

Кроме оператора продолжения T , нам понадобится еще один оператор. Для каждого замкнутого подмножества F в X определим оператор $U: C_p(F, R^1) \rightarrow C_p(F, S^1)$ формулой $U(f)(x) = e^{2\pi i f(x)}$, $x \in F$. Ясно, что $U(f+g) = U(f) \cdot U(g)$, т.е. этот оператор является непрерывным групповым гомоморфизмом. Из теоремы 1 следует, что оператор U переводит подмножество $C_p(F, [0, 1])$ в точности на $C_p(F, S^1)$. Более того, нетрудно понять, что последний оператор имеет непрерывный правый обратный $U^{-1}: C_p(F, S^1) \rightarrow C_p(F, [0, 1])$. Использование этих операторов приводит к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть X является метрическим пространством и F – его замкнутое подпространство. Композиция UTU^{-1} является непрерывным изоморфным вложением группы $C_p(F, S^1)$ в $C_p(X, S^1)$. Более того, группа $C_p(X, S^1)$ топологически изоморфна произведению $C_p(F, S^1) \times C_p^0(X|_F, S^1)$.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна из определения оператора U и теоремы 1. Далее искомым изоморфизм можно задать формулой $f \mapsto (f|_F, f - UTU^{-1}(f|_F))$, где T – оператор продолжения, построенный в предыдущей теореме. ■

Хорошо известно [1], что любой полиэдр является абсолютным окрестностным ретрактом в классе метрических пространств, т.е. он является ретрактом некоторой его окрестности в любом содержащем его метрическом пространстве, следовательно, для любого полиэдра X верны обе предыдущие теоремы.

Поскольку одноточечное подпространство всегда является ретрактом, то верно следующее утверждение.

Следствие 3. Для любой точки $x \in X$ выполнено

$$C_p(X, S^1) \cong S^1 \times C_p^0(X|_{\{x\}}, S^1). \quad \blacksquare$$

Пусть дана дискретная последовательность компактных пространств X_n , тогда символом $(C_p(X_1, S^1) \times C_p(X_2, S^1) \times \dots)_{c_0}$ будем обозначать аналог обычного c_0 -произведения, т.е. совокупность точек вида $(f_1, f_2, \dots)$ в декартовом произведении пространств вида $C_p(X_n, S^1)$, причем таких, что $\|f_n\| \rightarrow 0$, где $\|f_n\|$ обозначает максимальное отклонение точки $f_n(x)$ от двухточечного множества $\{0, 1\}$

в $[0, 1]$ (заметим, что если последовательность чисел сходится к 1, то она, как последовательность элементов S^1 , стремится к 0).

Теорема 4. Пусть X есть топологическое пространство, представляющее собой сходящуюся последовательность вместе с ее пределом. Тогда

$$C_p(X, S^1) \cong (S^1 \times S^1 \times \dots)_{c_0}.$$

Доказательство. Обозначим через F одноточечное множество, состоящее из предельной точки, и применим теорему 2 и следствие 3. ■

Из последних двух утверждений заключаем:

Следствие 5. Пусть X – топологическое пространство, содержащее сходящуюся последовательность (к точке x). Тогда $C_p(X, S^1) \cong C_p^0(X|_{\{x\}}, S^1)$.

Доказательство. Пусть x_n – последовательность точек в X , которая сходится в x . Из следствия 3 вытекает, что

$$C_p(X, S^1) \cong S^1 \times C_p^0(X|_{\{x\}}, S^1). \quad (1)$$

Пусть O_n – непересекающиеся окрестности точек x_n и f_n – последовательность непрерывных S^1 -значных функций, которые равны 0 вне O_n и $f_n(x_n) = 1/2$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Обозначим: $F = \{x_1, x_2, \dots\}$ и определим линейный непрерывный оператор продолжения $T: C_p^0(F|_{\{x\}}, S^1) \rightarrow C_p^0(X|_{\{x\}}, S^1)$ формулой $T(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) f_n(x)$. Формула $f \mapsto (f|_F, f - T(f|_F))$ вместе с формулой (1) и теоремой 4 доказывают утверждение. ■

Пространство $X|_F$ является метрическим компактом, которое получается из X в результате коллапсирования его замкнутого множества F в одну точку. Из теоремы 2 и следствия 5 вытекает, что справедливо следующее утверждение:

Следствие 6. Пусть X – метрический компакт. Тогда $C_p(X, S^1)$ изоморфно $C_p(F, S^1) \times C_p(X|_F, S^1)$ для каждого замкнутого подмножества F в X . ■

Для дальнейшего понадобится следующий общий прием построения изоморфизмов между пространствами функций, который в функциональном анализе называется «схемой Пелчинского». Применим эту схему для рассматриваемых топологических групп, но это не меняет сути дела.

Теорема 7 (Схема Пелчинского). Пусть E и G – топологические группы, для которых выполняются следующие три условия:

- 1) $E \cong G \times H$ – для некоторой топологической группы H ;
- 2) $G \cong E \times P$ – для некоторой топологической группы P ;
- 3) $E \cong (E \times E \dots)_{c_0}$.

Тогда $E \cong G$.

Доказательство. Имеем

$$G \cong E \times P \cong (E \times E \times \dots)_{c_0} \times P \cong (E \times E \times \dots)_{c_0} \times E \times P \cong (E \times E \times \dots)_{c_0} \times G \cong$$

$$((G \times H) \times (G \times H) \times \dots)_{c_0} \times G \cong ((G \times H) \times (G \times H) \times \dots)_{c_0} \cong (E \times E \times \dots)_{c_0} \cong E. \quad \blacksquare$$

Теорема 8. Если G изоморфно $(E \times E \times \dots)_{c_0}$, то G изоморфно своей c_0 -степени $(G \times G \times \dots)_{c_0}$.

Доказательство.

$$G \cong (E \times E \times \dots)_{c_0} \cong ((E \times E \times \dots)_{c_0} \times (E \times E \times \dots)_{c_0} \times \dots)_{c_0} \cong (G \times G \times \dots)_{c_0}. \blacksquare$$

Теорема 9. Пусть $n \geq 1$. Для n -мерного симплекса Δ_n выполнено

$$C_p(\Delta_n, S^1) \cong (C_p(\Delta_n, S^1) \times C_p(\Delta_n, S^1) \times \dots)_{c_0},$$

и, тем более, $C_p(\Delta_n, S^1)$ изоморфно любой своей конечной степени.

Доказательство. Пусть x_0 – вершина симплекса Δ_n и F_0 – противоположная этой вершине грань. Пусть $F_1, F_2, \dots$ – последовательность параллельных этой грани сечений симплекса, которая «сходится» к точке x_0 . Тогда множество $F = \{x_0\} \cup F_0 \cup F_1 \cup \dots$ является замкнутым подмножеством в Δ_n . По теореме 2 группа $C_p(\Delta_n, S^1)$ топологически изоморфна $C_p(F, S^1) \times C_p^0(\Delta|_F, S^1)$. Заметим далее, что фактор-пространство $\Delta|_F$ является одноточечной компактификацией счетной дискретной суммы попарно гомеоморфных между собой пространств (равно открытому множеству всех точек между параллельными сечениями F_{n-1} и F_n), которую обозначим через $(\oplus_{\omega} Y)$. Кроме того, множества F_n попарно между собой гомеоморфны. Суммируя эти факты, заключаем, что $C_p(\Delta_n, S^1)$ топологически изоморфно счетному c_0 -произведению попарно изоморфных между собой сомножителей вида $C_p(Y \oplus F_n, S^1)$. Остается применить теорему 8. $\blacksquare$

Если дан конечный набор $X_1, \dots, X_n$ топологических пространств, то символом $X_1 \vee \dots \vee X_n$ обозначим букет этого семейства, который получается, если в каждом $X_k, k = 1, \dots, n$, фиксируется одна точка и все эти точки отождествляются между собой.

Теорема 10. Если $X = \Delta_n \vee \dots \vee \Delta_n$ – букет симплексов, то $C_p(X, S^1)$ изоморфно $C_p(\Delta_n, S^1)$.

Доказательство. Пусть x_0 – центральная точка букета. По следствию 5 $C_p(X, S^1) \cong C_p^0(X|_{\{x_0\}}, S^1)$. Ясно, что

$$C_p^0(X|_{\{x_0\}}, S^1) \cong C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}}, S^1) \times \dots \times C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}}, S^1).$$

Но по тому же следствию 5 $C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}}, S^1) \cong C_p(\Delta_n, S^1)$. Остается применить теорему 9. $\blacksquare$

Теорема 11. Если $k < n$, то $C_p(\Delta_n, S^1) \cong C_p(\Delta_n, S^1) \times C_p(\Delta_k, S^1)$.

Доказательство. По теореме 9 пространство $C_p(\Delta_n, S^1)$ топологически изоморфно своей счетной c_0 -степени. Кроме того, каждая из двух групп $C_p(\Delta_n, S^1)$ и

$C_p(\Delta_n, S^1) \times C_p(\Delta_k, S^1)$ вкладывается в другое в качестве прямого сомножителя. Остается применить теорему 7. ■

Для полиэдра X через $X^{(n)}$ обозначим его n -мерный остов, т.е. объединение всех симплексов размерности $\leq n$. Множество $X^{(n)}$ является замкнутым подмножеством в X .

Теорема 12. Пусть X – n -мерный полиэдр, $n \geq 1$. Тогда

$$C_p(X, S^1) \cong C_p(\Delta_n, S^1).$$

Доказательство проведем по индукции. Если $n = 1$, то $X^{(0)}$ есть множество всех вершин полиэдра X . Ясно, что множество $X^{(0)}$ конечно. Имеем $C_p(X, S^1) \cong C_p(X^{(0)}, S^1) \times C_p(X_{X^{(0)}}, S^1)$. Первый сомножитель есть конечная степень топологической группы S^1 , а второй – изоморфен пространству всех непрерывных S^1 -значных функций на букете окружностей, и тогда по теореме 10 последний изоморфен конечной степени группы $C_p(\Delta_1, S^1)$. Эти утверждения вместе со следствием 3 показывают, что $C_p(X, S^1) \cong C_p(\Delta_1, S^1)$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $X^{(n-1)}$ – остов комплекса X . Тогда

$$C_p(X, S^1) \cong C_p(X^{(n-1)}, S^1) \times C_p^0(X|_{X^{(n-1)}}, S^1).$$

По предположению индукции $C_p(X^{(n-1)}, S^1)$ изоморфно $C_p(\Delta_{n-1}, S^1)$, а второй сомножитель по теоремам 9, 10 и следствию 3 изоморфен $C_p(\Delta_n, S^1)$. Осталось применить теорему 11. ■

В связи с теоремой 12 возникает теперь вопрос о ее обобщении, т.е. будут ли неизоморфными топологические группы $C_p(X, S^1)$ и $C_p(Y, S^1)$, если размерности полиэдров X и Y не совпадают? Заметим, что в статье [2] вторым автором настоящей статьи было доказано, что размерность компактов является инвариантом изоморфизма соответствующих пространств непрерывных S^1 -значных функций, если S^1 кроме естественной операции наделено также некоторой дополнительной операцией, при которой S^1 становится так называемым топологическим почти модулем.

Авторы выражают благодарность Л.В. Гензе и Т.Е. Хмылевой за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 291 с.
2. Титова А.В. Линейные гомеоморфизмы топологических почти модулей непрерывных функций и совпадение размерностей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 43–48.

Статья поступила 12.05.2015 г.

Gulko S. P., Titova A. V. ON CLASSIFICATION OF SPACES OF CONTINUOUS S^1 -VALUED FUNCTIONS ON POLIHYDRONS

DOI 10.17223/19988621/36/2

In this paper, the spaces of continuous S^1 -valued functions $C_p(X, S^1)$ are considered. It is proved that if X is a n -dimensional polyhedron and S^1 is a circle which is considered as a topological group, then the topological group $C_p(X, S^1)$ is topologically isomorphic to $C_p(\Delta_n, S^1)$, where Δ_n is an n -dimensional simplex, $n \geq 1$.

Keywords: almost ring, topological almost module, continuous homomorphism, space of continuous functions, polyhedron, isomorphism.

GULKO Sergey Porfiryevich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

TITOVA Anastasiya Viktorivna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: asya_mis@mail.ru

REFERENCES

1. Borsuk K. *Teoriya retraktov*. Moscow, Mir Publ., 1971. 291 p. (in Russian)
2. Titova A.V. Lineynye gomeomorfizmy topologicheskikh pochti moduley nepreryvnykh funktsiy i sovpadenie razmernostey. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 43–48. (in Russian)

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/36/3

Е.В. Кайгородов, С.М. Чедушев

КОХОПФОВЫ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Получены общие свойства кохопфовых абелевых групп, в частности, связанные с прямыми разложениями. Кроме того, представлено обозрение известных результатов о кохопфовых алгебраических системах, изучение которых приобретает в последнее время все большую актуальность.

Ключевые слова: абелева группа, кохопфова группа, прямая сумма, вполне инвариантная подгруппа, кольцо обобщенных матриц.

1. Введение

В 1932 г. швейцарский математик Хайнц Хопф (1894–1971) поставил следующий вопрос: может ли конечно порожденная группа быть изоморфной своей собственной фактор-группе? В соответствии с этим группа G называется *хопфовой*, если всякий ее сюръективный эндоморфизм является изоморфизмом. Двойственным образом, группа G называется *кохопфовой*, если любой ее инъективный эндоморфизм является изоморфизмом.

Изучению кохопфовых (некоммутативных) групп посвящены работы Бэра [1], Гонзалез-Акуны и Уиттена [2], Потягайло и Вана [3], Ошики и Потягайло [4], Зеллы [5], Вана и Ву [6], Вана и Чжоу [7], Део и Варадараджана [8], Белла и Маргалита [9], Ли [10], Эндимиони [11], Кейна и Мальцева [12].

Начало систематическому изучению кохопфовых групп было, по-видимому, положено Бэром в 40-е годы прошлого века. В статье [1] автор указывает на ряд условий, когда группа не имеет собственных изоморфных себе подгрупп. Группы, обладающие таким свойством, были названы Бэром S -группами. Эта же работа содержит интересные результаты, касающиеся связей свойств хопфовости и кохопфовости в группах.

Гонзалез-Акуна и Уиттен [2] поставили вопрос о кохопфовости фундаментальных групп трехмерных многообразий. Они ответили на этот вопрос для многообразий Хакена, край которых является непустым объединением торов. Позднее, Потягайло и Ван [3] сформулировали гипотетическое необходимое и достаточное условие кохопфовости фундаментальной группы трехмерного многообразия, удовлетворяющего гипотезе геометризации Тёрстона, доказали необходимость и достаточность этого условия, правда, последнюю – при некоторых дополнительных предположениях.

Внимание многих специалистов привлекают кохопфовы клейновы и гиперболические группы. Так, Ван и Чжоу [7], исследуя кохопфовы клейновы группы, установили, что фактор-группа кохопфовой группы может не быть кохопфовой, и указали на существование кохопфовой группы, содержащей нормальную подгруппу конечного индекса, не являющуюся кохопфовой.

Белл и Маргалит [9] занимались изучением кохопфовых групп кос. Они доказали, что группа B_n кос на n нитях не кохопфова, и осветили ряд вопросов, затрагивающих смежные темы.

Кохопфовы кольца и модули, а также близкие к ним классы изучали Варадараджан [13–15], Сюэ [16], Хагани, Асгари и Ведади [17–21], Лю, Ган и Фань [22–25], Горбани и Хагани [26, 27], Ван [28], Дивани-Азар и Мафи [29], Хмайму, Кайди и Санчес Кампос [30], Айдогду и Озджан [31], Янь и Лю [32], Цзяо [33], Ван и Ли [34], Дьялло, Мауйя и Сангаре [35, 36].

Весьма содержательные и глубокие результаты в этой области представлены в трудах Варадараджана. Автор распространяет понятия хопфовости и кохопфовости на модули, кольца, алгебры и топологические пространства, приводит яркие, любопытные примеры и обозначает открытые вопросы. В работе [14] дается детальный обзор результатов, касающихся хопфовых и кохопфовых объектов в различных конкретных категориях, таких, как категории модулей, колец и топологических пространств. Статья [15] посвящена *антихопфовым* и *антикохопфовым*¹ модулям.

Интересные классы модулей, «родственные» кохопфовым – *полу(ко)хопфовы*², *сильно (ко)хопфовы*³, *обобщенно хопфовы*⁴ и *слабо кохопфовы*⁵ модули – указаны в статьях [21, 26, 27, 30, 31]. Эти статьи насыщены свежими идеями, каждая из них является замечательным вкладом в теорию модулей. Круг вопросов, рассматриваемых авторами в этих работах, чрезвычайно широк.

Исследования по кохопфовым абелевым группам очень немногочисленны и носят незавершенный характер. Тем не менее результаты этих исследований выразительны и многоценны. Наиболее значительными являются работы Такаши и Ирвина [37, 38], Голдсмита и Гонга [39–42], Дикраниана, Голдсмита, Сальче и Занардо [43]. К числу новейших работ относятся статьи Голдсмита и Гонга, в которых, наряду с хопфовыми и кохопфовыми абелевыми группами, рассматриваются *супер(ко)хопфовы*⁶ и *наследственно (ко)хопфовы*⁷ абелевы группы, а также обсуждаются некоторые прилегающие проблемы. У Дикраниана, Голдсмита, Сальче и Занардо [43], а позднее – у Голдсмита и Гонга [40] хопфовы и кохопфовы абелевы группы возникают при изучении алгебраической и сопряженной энтропий абелевых групп.

Другие классы абелевых групп, граничные с классом кохопфовых абелевых групп, освещены в литературе намного лучше. Так, абелевы группы, содержащие

¹ Ненулевой модуль M называется *антихопфовым* (*антикохопфовым*), если он не является простым и изоморфен любому своему нетривиальному фактор-модулю (соответственно подмодулю).

² Модуль M называется *полухопфовым* (*полукохопфовым*), если ядро (соответственно образ) любого сюръективного (соответственно инъективного) эндоморфизма модуля M выделяется в M прямым слагаемым, т. е. любой сюръективный (соответственно инъективный) эндоморфизм модуля M расщепляется.

³ R -модуль M называется *сильно хопфовым* (*сильно кохопфовым*), если для каждого эндоморфизма φ модуля M возрастающая (соответственно убывающая) цепь $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } \varphi^n \subseteq \dots$ (соответственно $\text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } \varphi^n \supseteq \dots$) стабилизируется.

⁴ Модуль M называется *обобщенно хопфовым*, если ядро любого сюръективного эндоморфизма модуля M является косущественным (малым) подмодулем модуля M .

⁵ Модуль M называется *слабо кохопфовым*, если образ любого инъективного эндоморфизма модуля M является существенным (большим) подмодулем модуля M . Легко усмотреть, что понятие слабо кохопфова модуля двойственно (в теоретико-категорном смысле) понятию обобщенно хопфова модуля.

⁶ Группа G называется *суперхопфовой* (*суперкохопфовой*), если любой гомоморфный образ группы G есть хопфова (соответственно кохопфова) группа.

⁷ Группа G называется *наследственно хопфовой* (*наследственно кохопфовой*), если любая подгруппа группы G хопфова (соответственно кохопфова).

собственную подгруппу, изоморфную самой группе⁸, изучал Бьюмонт [44], он называл их I -группами. Автор показал, что всякая примарная абелева группа, разложимая в бесконечную прямую сумму коциклических групп, является I -группой. I -модули исследовались в [45] Бьюмонтом и Пирсом. Ими установлено, что R -модуль без кручения M , не являющийся делимым, является I -модулем, а любой периодический модуль M конечного ранга не является I -модулем. В [46] кроме I -групп рассматривались IP -группы (абелевы группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе) и ID -группы (абелевы группы, изоморфные прямому слагаемому). С.Я. Гриншпон и М.М. Никольская [47–50] ввели понятие IF -группы (абелевы группы, изоморфные собственной вполне характеристической подгруппе) и изучали IF -группы в различных классах абелевых групп. Е.В. Кайгородовым [51–54] представлены результаты по описанию кохопфовых групп в конкретных классах абелевых групп и изучению их общих свойств.

Кроули [55] построил пример бесконечной примарной кохопфовой абелевой группы без элементов бесконечной высоты. В работе [56] Хилл и Меджиббен представили более общую и простую конструкцию кохопфовых примарных абелевых групп, чем Кроули. В своей работе они также показали, что для того, чтобы бесконечная редуцированная примарная абелева группа была кохопфовой, необходимо, чтобы она была неограниченной, несчетной и имела конечные инварианты Ульма–Капланского.

В [57] Монк исследовал абелевы p -группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе. Голдсмит, Охогейн и Валлутис [58] изучали *квазиминимальные*⁹, *сервантно квазиминимальные*¹⁰ и *прямо квазиминимальные*¹¹ группы. А.Р. Чехлов и П.В. Данчев [59] рассматривали абелевы группы, у которых все собственные вполне инвариантные подгруппы изоморфны.

Почему в последнее время возрастает внимание алгебраистов к кохопфовым алгебраическим системам? Дело в следующем. Общеизвестно, что *вопросы, касающиеся отображений алгебраических систем и их подсистем, а также связей отображений со свойствами самих систем, имеют важное, если не первостепенное значение при описании рассматриваемых алгебраических систем, т. е. при построении соответствующей структурной теории*. Поэтому и неудивительно, что во второй половине XX – начале XXI века, когда получают интенсивное развитие такие важнейшие разделы современной алгебры, как теории групп, абелевых групп, колец, модулей, решеток, направление исследований, связанное с кохопфовым свойством в перечисленных алгебраических системах и смежными вопросами, приобретает все большую актуальность.

Условимся о следующем. Далее всюду рассматриваются исключительно абелевы группы, поэтому под термином «группа» понимается аддитивно записанная абелева группа. По мере надобности приводятся необходимые определения и результаты. Знаком ■ обозначается конец доказательства или его отсутствие.

⁸ Согласно принятой терминологии, группы, изоморфные некоторой своей собственной подгруппе, называются *некохопфовыми*.

⁹ Абелева группа, изоморфная всем своим подгруппам такой же мощности, как сама группа, называется *квазиминимальной*.

¹⁰ Абелева группа, изоморфная всем своим сервантным подгруппам такой же мощности, как сама группа, называется *сервантно квазиминимальной*.

¹¹ Абелева группа, изоморфная всем своим прямым слагаемым такой же мощности, как сама группа, называется *прямо квазиминимальной*.

2. Общие свойства кохопфовых абелевых групп

С целью придать данному в первой параграфе настоящей работы определению кохопфовой группы законченный и удобный вид вынесем его отдельно, а также сформулируем еще одно эквивалентное определение кохопфовой группы.

Определение 1. Группа A называется *кохопфовой*, если всякий мономорфизм группы A на себя является автоморфизмом.

Определение 2. Группа A называется *кохопфовой*, если она не имеет собственных изоморфных себе подгрупп.

Начнем с доказательства хорошо известной и простой, но весьма полезной теоремы, которая позволит сделать некоторые выводы о связи свойств конечности и кохопфовости.

Теорема 1. *Любая конечная группа кохопфова.*

Доказательство. Пусть дана конечная группа A , $|A| = n$, и пусть B – собственная подгруппа группы A . Порядок подгруппы B обозначим буквой s . Имеем $A \not\cong B$. Действительно, по теореме Лагранжа n делится на s . Отсюда $n > s$, так как подгруппа B собственная. Итак, $|A| > |B|$, следовательно, группы A и B не изоморфны и группа A кохопфова. ■

Данная теорема говорит о том, что класс кохопфовых групп, как и класс хопфовых групп, содержит все конечные группы. Вместе с тем, этот класс содержит группы, лишь в каком-то смысле близкие к конечным группам. Более точно, свойства хопфовости и кохопфовости представляют собою одни из важнейших *обобщений конечности*. Эта точка зрения отражена в книгах Куроша [60] и Гретцера [61]. Через многие теоремы о кохопфовых абелевых группах красной нитью проходит идея конечности, представленной в различных своих видах.

Теорема 2. *Если $A = B \oplus C$ и A – кохопфова группа, то группы B и C кохопфовы.*

Доказательство. Пусть дана прямая сумма $A = B \oplus C$, и пусть A – кохопфова группа. Покажем, что группы B и C также кохопфовы. Предположим противное, т. е. пусть, например, группа B не кохопфова. Это означает, что существует мономорфизм $\varphi: B \rightarrow B$, не являющийся автоморфизмом, т.е. $\text{Im } \varphi \subsetneq B$. Определим гомоморфизм $\psi: A \rightarrow A$, полагая $\psi(a) = \varphi(b) + id_C(c)$ для любого $a = b + c$, где $b \in B$, $c \in C$. Имеем

$$\psi(a) = \psi(b + c) = \varphi(b) + id_C(c) = \varphi(b) + c.$$

Ясно, что гомоморфизм ψ инъективен. В самом деле, из $\varphi(b) + c = 0$ выводим $\varphi(b) = 0$ и $c = 0$, откуда $b = c = 0$, а, стало быть, и $a = 0$. Таким образом, $\text{Ker } \psi = 0$. При этом $\text{Im } \psi = \text{Im } \varphi \oplus C$. Так как $\text{Im } \varphi \subsetneq B$, то $\text{Im } \psi \subsetneq B \oplus C$, т. е. $\text{Im } \psi \neq A$ и ψ не является эпиморфизмом. Получили противоречие с тем, что группа A кохопфова. Таким образом, прямые слагаемые B и C суть кохопфовы группы. ■

Легко проверить, что доказанная теорема обобщается на случай, когда количество прямых слагаемых в разложении группы A бесконечно. Приходим к важному следствию.

Следствие 3. *Пусть A_i ($i \in I$) – семейство групп, где множество индексов I произвольно, и пусть группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ кохопфова. Тогда для каждого $i \in I$ группа A_i кохопфова. ■*

Далее задаемся вопросом: допускает ли обращение теорема 2 в каком-либо случае? Отвечаем положительно на этот вопрос в теореме 5.

В линейной алгебре хорошо известно матричное представление линейных преобразований. Используя прямые разложения, можно получить подобное представление эндоморфизмов абелевых групп определенными матрицами, называемыми формальными или обобщенными. Для удобства чтения приведем соответствующие хорошо известные построения (см., например, [62, теорема 3.11]).

Пусть дана прямая сумма групп $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$. Рассмотрим квадратную матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$ с элементами $\alpha_{ji} \in \text{Hom}(A_i, A_j)$. Для таких матриц можно определить обычные для матриц операции сложения и умножения. Нетрудно убедиться, что сложение и умножение обобщенных матриц всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида. В результате получаем кольцо матриц указанного вида (кольцо обобщенных матриц).

Теорема 4 [62, теорема 3.11]. Кольцо эндоморфизмов группы $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ изоморфно кольцу обобщенных матриц $\|\alpha_{ji}\|$ порядка n .

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$ – полная ортогональная система проекций, соответствующих данному разложению группы A . Произвольный элемент $a \in A$ равен сумме $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a$. Для любого $\alpha \in E(A)$ имеем

$$\alpha a = \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i a) = \sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_j \alpha \varepsilon_i) a.$$

Сопоставим эндоморфизму α матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$, $f: \alpha \mapsto \|\alpha_{ji}\|$, где $\alpha_{ji} = \varepsilon_j \alpha \varepsilon_i$. Можно отождествить $\varepsilon_j E(A) \varepsilon_i$ с $\text{Hom}(\varepsilon_i A, \varepsilon_j A)$, т. е. с $\text{Hom}(A_i, A_j)$. Если $\beta \in E(A)$ и $\|\beta_{ji}\|$ – соответствующая матрица с $\beta_{ji} = \varepsilon_j \beta \varepsilon_i$, то матрицы, соответствующие $\alpha - \beta$ и $\alpha \beta$, – это разность $\|\alpha_{ji} - \beta_{ji}\|$ и произведение

$\|\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki}\|$ матриц $\|\alpha_{ji}\|$ и $\|\beta_{ji}\|$. Следовательно, f – кольцевой гомоморфизм. Понятно, что нулевой матрице соответствует лишь нулевой эндоморфизм группы A . Обратно, пусть $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$ – некоторая матрица с элементами $\alpha_{ji} \in \varepsilon_j E(A) \varepsilon_i$. Определим $\alpha \in E(A)$, положив для $a \in A$

$$\alpha a = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ji} a.$$

Тогда $f: \alpha \mapsto \|\alpha_{ji}\|$. Таким образом, f – изоморфизм колец. ■

Остановимся подробно на простейшем случае, когда $A = A_1 \oplus A_2$. Пусть ε_1 и ε_2 – соответствующие ортогональные проекции. Тогда имеем: $\varepsilon_1|_{A_1} = id_{A_1}$,

$\varepsilon_1|_{A_2} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_1} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_2} = id_{A_2}$. Другими словами, представляя произвольный элемент $a \in A$ в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, получим $\varepsilon_1 a = a_1$, $\varepsilon_2 a = a_2$, откуда $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1_A$. Согласно теореме 4, получаем

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_1) & \text{Hom}(A_2, A_1) \\ \text{Hom}(A_1, A_2) & E(A_2) \end{pmatrix}.$$

Каждому эндоморфизму $\alpha \in E(A)$ поставим в соответствие обобщенную матрицу

$$f: \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \alpha \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \alpha \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

или, согласуясь со введенными выше обозначениями,

$$f: \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем некоторый элемент z группы A . Запишем $z = x + y$, где $x \in A_1$, $y \in A_2$. При соответствии f действию эндоморфизма α на элементе z отвечает умножение матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Выясним, как действуют эндоморфизмы α_{ji} на элементах групп A_1 и A_2 . Пусть $x \in A_1$ и $\alpha(x) = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Тогда $\alpha_{11}(x) = x_1$, $\alpha_{21}(x) = x_2$. Аналогично, если $y \in A_2$ и $\alpha(y) = y_1 + y_2$, где $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$, то $\alpha_{12}(y) = y_1$, $\alpha_{22}(y) = y_2$.

Если $A = A_1 \oplus A_2$ и $\text{Hom}(A_1, A_2) = 0$ (т. е. подгруппа A_1 вполне инвариантна в группе A), то будем иметь

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_1) & \text{Hom}(A_2, A_1) \\ 0 & E(A_2) \end{pmatrix}.$$

В теории модулей известен следующий важный факт. Если M – R - S -бимодуль, то верхние треугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, образуют кольцо, называемое кольцом обобщенных треугольных матриц второго порядка. Несложно показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

обратима в этом кольце тогда и только тогда, когда элемент u обратим в кольце R , а элемент v обратим в кольце S .

Теперь может быть доказана теорема, указывающая на один из случаев обращения теоремы 2.

Теорема 5. Если $A = B \oplus C$, а прямые слагаемые B и C кохопфовы и, кроме того, подгруппа B вполне инвариантна в группе A , то A – кохопфова группа.

Доказательство. Зафиксируем некоторый мономорфизм $\alpha : A \rightarrow A$. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Сначала покажем, что $\alpha_{22} : C \rightarrow C$ – автоморфизм. Так как α – мономорфизм, то равенство $\alpha(z) = 0$, где $z \in A$, выполняется тогда и только тогда, когда $z = 0$. Запишем $z = x + y$, $x \in B$, $y \in C$. Из матричного равенства

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентного системе
$$\begin{cases} \alpha_{11}(x) + \alpha_{12}(y) = 0, \\ \alpha_{22}(y) = 0, \end{cases}$$

следует, что обязательно $x = y = 0$. Тот факт, что равенство $\alpha_{22}(y) = 0$ имеет место лишь при $y = 0$, означает, что α_{22} – мономорфизм. Поскольку группа C кохопфова, то α_{22} является также и автоморфизмом.

Теперь проверим, будет ли автоморфизмом отображение $\alpha_{11} : B \rightarrow B$. Если это отображение не инъективно, то в группе B найдется такой ненулевой элемент x , что $\alpha_{11}(x) = 0$. Полагая $y = 0$, будем иметь $z = x + 0 = x \neq 0$. Тогда

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11}(x) = 0.$$

Получили противоречие с тем, что α – мономорфизм и $\text{Ker } \alpha = 0$. Следовательно, α_{11} – мономорфизм. По условию теоремы группа B кохопфова, поэтому α_{11} есть автоморфизм группы B . Следовательно, матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

обратима, т.е. мономорфизм α является автоморфизмом. Итак, группа A кохопфова. ■

Дадим необходимое и достаточное условие кохопфовости прямой суммы произвольного числа групп, опять-таки с использованием свойства вполне инвариантности последних в прямой сумме.

Теорема 6. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ и все прямые слагаемые A_i вполне инвариантны в группе A . Тогда группа A кохопфова, если и только если каждая группа A_i кохопфова.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Если группа A кохопфова, то по следствию 3 все прямые слагаемые A_i кохопфовы.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть все прямые слагаемые A_i – кохопфовы группы. Если φ – мономорфизм группы A , то понятно, что ограничения φ_i этого мономорфизма на каждом прямом слагаемом, $\varphi_i : A_i \rightarrow A_i$, тоже будут мономорфизмами. Все эти мономорфизмы будут и автоморфизмами, так как каждое прямое слагаемое A_i – кохопфова группа. Тогда, очевидно, что φ – автоморфизм. ■

Теорема 7. Если B – кохопфова группа без кручения, а C – конечная группа, то группа $A = B \oplus C$ кохопфова.

Доказательство. По теореме 1 прямое слагаемое C есть кохопфова группа. Поскольку всякая конечная группа является периодической, то $\text{Hom}(C, B) = 0$ [63, §43], а это значит, что подгруппа C вполне инвариантна в группе A . Остается применить теорему 5. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Baer R. Groups without proper isomorphic quotient groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. No. 4. P. 267–278.
2. Gonzales-Acuna F. and Whitten W. Embeddings of three-manifold groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. No. 474.
3. Потягайло Л., Ван Ш. О кохопфовости фундаментальных групп трехмерных многообразий // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. Вып. 5. С. 197–220.
4. Ohshika K. and Potyagailo L. Self-embeddings of Kleinian groups // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1998. V. 31. No. 3. P. 329–343.
5. Sela Z. Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie algebras II // Geometric and Fundamental Analysis. 1997. V. 7. No. 3. P. 561–593.
6. Wang S.C. and Wu Y.Q. Covering invariant and cohopficity of 3-manifold groups // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 68. P. 203–224.
7. Wang S.C. and Zhou Q. Embeddings of Kleinian groups with torsion // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2001. V. 17. No. 1. P. 21–34.
8. Deo S. and Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. V. 56. No. 1. P. 17–24.
9. Bell R.W. and Margalit D. Braid groups and the co-Hopfian property // J. Algebra. 2006. V. 303. No. 1. P. 275–294.
10. Li Y. On the Cohopficity of the Direct Product of Cohopfian Groups // Comm. Algebra. 2007. V. 35. No. 10. P. 3226–3235.
11. Endimioni G. Hopficity and co-Hopficity in soluble groups // Ukr. Math. J. 2004. V. 56. No. 10. P. 1594–1601.
12. Cain A.J. and Maltcev V. Hopfian and co-hopfian subsemigroups and extensions // Demonstratio Mathematica. 2014. V. 47. No. 4. P. 791–804.
13. Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian objects // Publ. Math. 1992. V. 36. P. 293–317.
14. Varadarajan K. Some recent results on Hopficity, co-Hopficity and related properties // International Symposium on Ring Theory. Birkhäuser-Boston: Trends in Math., 2002. P. 371–392.
15. Varadarajan K. Anti Hopfian and anti co-Hopfian modules // Contemporary Mathematics. 2008. V. 456. P. 205–218.
16. Xue W. Hopfian modules and co-Hopfian modules // Comm. Algebra. 1995. V. 23. No. 4. P. 1219–1229.
17. Asgari Sh. On weakly co-Hopfian modules // B. Iran. Math. Soc. 2007. V. 33. No. 1. P. 65–72.
18. Haghany A. Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 477–492.
19. Haghany A. and Vedadi M. R. Modules whose injective endomorphisms are essential // J. Algebra. 2001. V. 243. P. 765–779.
20. Asgari Sh., Haghany A. and Vedadi M. R. Quasi co-Hopfian modules and applications // Comm. Algebra. 2008. V. 36. No. 5. P. 1801–1816.
21. Asgari Sh. and Haghany A. Densely co-Hopfian modules // J. Algebra Appl. 2010. V. 9. No. 6. P. 989–1000.
22. Fan Y. and Liu Z. Co-Hopfian modules of generalized inverse polynomials // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2001. V. 17. No. 3. P. 431–436.
23. Gang Y. and Liu Z. On Hopfian and co-Hopfian modules // Vietnam J. Math. 2007. V. 35. No. 1. P. 73–80.

24. Gang Y. and Liu Z. On generalizations of Fitting modules // Indian J. Math. 2009. V. 51. No. 1. P. 85–99.
25. Gang Y. and Liu Z. Notes on generalized Hopfian and weakly co-Hopfian modules // Comm. Algebra. 2010. V. 38. P. 3556–3566.
26. Ghorbani A. and Haghany A. Generalized Hopfian modules // J. Algebra. 2002. V. 255. P. 324–341.
27. Ghorbani A. and Haghany A. Duality for weakly co-Hopfian and generalized Hopfian modules // Comm. Algebra. 2003. V. 31. P. 2811–2817.
28. Wang Y. Generalizations of Hopfian and co-Hopfian modules // Int. J. Math. Sci. 2005. V. 9. P. 1455–1460.
29. Divaani-Aazar K. and Mafi A. Hopfian and co-Hopfian modules over commutative rings // Vietnam J. Math. 2007. V. 35. No. 3. P. 275–283.
30. Hmaitou A., Kaidi A. and Campos E. S. Generalized Fitting modules and rings // J. Algebra. 2007. V. 308. P. 199–214.
31. Aydođdu P. and Özcan A. Ç. Semi co-Hopfian and semi Hopfian modules // East-West J. Math. 2008. V. 10. No. 1. P. 57–72.
32. Yan X.F. and Liu Z. Extensions of generalized Fitting modules // J. Math. Res. Exp. 2010. V. 30. No. 3. P. 407–414.
33. Jiao Y.J. Semi Hopfian and semi co-Hopfian modules over generalized power series rings // Int. J. Algebra. 2012. V. 6. No. 5–8. P. 209–218.
34. Wang X. and Li T. A Generalization of Weakly Co-hopfian Modules // Int. Math. Forum. 2014. V. 9. No. 6. P. 255–258.
35. Diallo E., Maaouiia M. and Sanghare M. Hopfian Objects, Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A -Modules // Int. Math. Forum. 2013. V. 8. No. 39. P. 1903–1920.
36. Diallo E., Maaouiia M. and Sanghare M. Strongly Hopfian and Strongly Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A -Modules // J. Math. Res. 2014. V. 6. No. 3. P. 81–90.
37. Irwin J. M. and Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups // Pacif. J. Math. 1969. V. 29. No. 1. P. 151–160.
38. Takashi J. and Irwin J.M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2 // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1969. V. 20. No. 4. P. 194–203.
39. Goldsmith B. and Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Arch. Math. 2012. V. 99. No. 1. P. 1–8.
40. Goldsmith B. and Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups // Comm. Algebra. 2012. V. 40. P. 972–987.
41. Goldsmith B. and Gong K. A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. Dublin: AMS forthcoming, 2012. P. 1–9.
42. Goldsmith B. and Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Acta Math. Hung. 2013. V. 139. No. 4. P. 393–398.
43. Dikranjan D., Goldsmith B., Salce L. and Zanardo P. Algebraic entropy for Abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361. No. 7. P. 3401–3434.
44. Beaumont R.A. Groups with isomorphic proper subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51. P. 381–387.
45. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 91. P. 209–219.
46. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Isomorphic direct summands of Abelian groups // Math. Annal. 1964. V. 153. P. 21–37.
47. Гриншпон С.Я., Никольская (Савинкова) М.М. IF -группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 5–14.
48. Гриншпон С.Я., Никольская (Савинкова) М.М. Примарные IF -группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15). С. 25–31.
49. Гриншпон С.Я., Никольская (Савинкова) М.М. Собственные вполне характеристические подгруппы групп без кручения, изоморфные самой группе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 25–30.

50. Гриншпон С.Я., Никольская (Савинкова) М.М. Периодические IF -группы // *Фундамент. и прикл. матем.* 2012. Т. 17. № 8. С. 47–58.
51. Кайгородов Е.В. Хопфовы абелевы группы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2012. № 2(18). С. 5–12.
52. Кайгородов Е.В. О двух классах хопфовых абелевых групп // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2013. № 2(22). С. 22–33.
53. Кайгородов Е.В. Хопфовы вполне разложимые группы без кручения // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2013. № 4(24). С. 24–28.
54. Кайгородов Е. В. Хопфовы алгебраически компактные абелевы группы // *Алгебра и логика.* 2013. Т. 52. № 6. С. 667–675.
55. Crawley P. An infinite primary Abelian group without proper isomorphic subgroups // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1962. V. 68. P. 463–467.
56. Hill P. and Megibben Ch. On primary groups with countable basic subgroups // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966. V. 124. No. 1. P. 49–59.
57. Monk G. S. Abelian p -groups without proper isomorphic pure dense subgroups // *Ill. J. Math.* 1970. V. 14. No. 1. P. 164–177.
58. Goldsmith B., Ohogain S. and Wallutis S. Quasi-minimal groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 132. No. 8. P. 2185–2195.
59. Chekhlov A. R. and Danchev P. V. On Abelian Groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // *Comm. Algebra.* 2015.
60. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
61. Гретцер Г. Общая теория решеток: пер. с англ. / под ред. Д.М. Смирнова. М.: Мир, 1981. 456 с.
62. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с. (Advanced Studies in Mathematics and Mechanics; Вып. 2).
63. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы: в 2 т. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.

Статья поступила 13.02.2015 г.

Kaigorodov E.V., Chedushev S. M. CO-HOPFIAN ABELIAN GROUPS

DOI 10.17223/19988621/36/3

In recent years, the interest in co-Hopfian algebraic systems has been growing steadily, with a great number of publications on the topic. However, the studies on co-Hopfian Abelian groups are represented only by individual works. It is therefore natural that there is quite a lot of interesting and important but still open questions related to co-Hopfian Abelian groups. One of these concerns the description of co-Hopfian groups in specific classes of Abelian groups. Consequently, the study of co-Hopfian Abelian groups and their properties is of particular interest.

The first section of this paper contains a detailed review of known results on co-Hopfian algebraic systems, the primary emphasis being on co-Hopfian Abelian groups. Special attention is paid to co-Hopfian rings and modules. Some of the major results obtained by specialists in the last half-century are considered in detail.

In the second section we obtain the general properties of co-Hopfian Abelian groups. For instance, we prove the co-Hopfity of direct summands of a co-Hopfian Abelian group. We point to one of the cases in which the co-Hopfity of an Abelian group should follow from the co-Hopfity of direct summands in the decomposition of this group. Finally, we give a necessary and sufficient condition of the co-Hopfity of a direct sum of an arbitrary number of Abelian groups on one assumption.

Keywords: Abelian group, co-Hopfian group, direct sum, fully invariant subgroup, generalized matrix ring.

KAIGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation)
E-mail: gazetaintegral@gmail.com

CHEDUSHEV Sergei Mikhailovich (Gorno-Altai State University,
Gorno-Altai, Russian Federation)
E-mail: S.chedushev@yandex.ru

REFERENCES

1. Baer R. Groups without proper isomorphic quotient groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 50, no. 4, pp. 267–278.
2. Gonzales-Acuna F. and Whitten W. Embeddings of three-manifold groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1992, vol. 99, no. 474.
3. Potyagailo L. and Wang S. 3-manifolds with co-Hopfian fundamental group. *St. Petersburg. Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 5, pp. 861–881.
4. Ohshika K. and Potyagailo L. Self-embeddings of Kleinian groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1998, vol. 31, no. 3, pp. 329–343.
5. Sela Z. Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie algebras II. *Geometric and Fundamental Analysis*, 1997, vol. 7, no. 3, pp. 561–593.
6. Wang S.C. and Wu Y.Q. Covering invariant and cohopficity of 3-manifold groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1994, vol. 68, pp. 203–224.
7. Wang S.C. and Zhou Q. Embeddings of Kleinian groups with torsion. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2001, vol. 17, no. 1, pp. 21–34.
8. Deo S. and Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1997, vol. 56, no. 1, pp. 17–24.
9. Bell R.W. and Margalit D. Braid groups and the co-Hopfian property. *J. Algebra*, 2006, vol. 303, no. 1, pp. 275–294.
10. Li Y. On the Cohopficity of the Direct Product of Cohopfian Groups. *Comm. Algebra*, 2007, vol. 35, no. 10, pp. 3226–3235.
11. Endimioni G. Hopficity and co-Hopficity in soluble groups. *Ukr. Math. J.*, 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1594–1601.
12. Cain A.J. and Maltcev V. Hopfian and co-hopfian subsemigroups and extensions. *Demonstratio Mathematica*, 2014, vol. 47, no. 4, pp. 791–804.
13. Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian objects. *Publ. Math.*, 1992, vol. 36, pp. 293–317.
14. Varadarajan K. Some recent results on Hopficity, co-Hopficity and related properties. *International Symposium on Ring Theory. Birkhäuser-Boston: Trends in Math.*, 2002, pp. 371–392.
15. Varadarajan K. Anti Hopfian and anti co-Hopfian modules. *Contemporary Mathematics*, 2008, vol. 456, pp. 205–218.
16. Xue W. Hopfian modules and co-Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 4, pp. 1219–1229.
17. Asgari Sh. On weakly co-Hopfian modules. *B. Iran. Math. Soc.*, 2007, vol. 33, no. 1, pp. 65–72.
18. Haghany A. Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts. *Comm. Algebra*, 1999, vol. 27, pp. 477–492.
19. Haghany A. and Vedadi M. R. Modules whose injective endomorphisms are essential. *J. Algebra*, 2001, vol. 243, pp. 765–779.
20. Asgari Sh., Haghany A. and Vedadi M. R. Quasi co-Hopfian modules and applications. *Comm. Algebra*, 2008, vol. 36, no. 5, pp. 1801–1816.
21. Asgari Sh. and Haghany A. Densely co-Hopfian modules. *J. Algebra Appl.*, 2010, vol. 9, no. 6, pp. 989–1000.
22. Fan Y. and Liu Z. Co-Hopfian modules of generalized inverse polynomials. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2001, vol. 17, no. 3, pp. 431–436.
23. Gang Y. and Liu Z. On Hopfian and co-Hopfian modules. *Vietnam J. Math.*, 2007, vol. 35, no. 1, pp. 73–80.

24. Gang Y. and Liu Z. On generalizations of Fitting modules. *Indian J. Math.*, 2009, vol. 51, no. 1, pp. 85–99.
25. Gang Y. and Liu Z. Notes on generalized Hopfian and weakly co-Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 2010, vol. 38, pp. 3556–3566.
26. Ghorbani A. and Haghany A. Generalized Hopfian modules. *J. Algebra*, 2002, vol. 255, pp. 324–341.
27. Ghorbani A. and Haghany A. Duality for weakly co-Hopfian and generalized Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, pp. 2811–2817.
28. Wang Y. Generalizations of Hopfian and co-Hopfian modules. *Int. J. Math. Sci.*, 2005, vol. 9, pp. 1455–1460.
29. Divaani-Aazar K. and Mafi A. Hopfian and co-Hopfian modules over commutative rings. *Vietnam J. Math.*, 2007, vol. 35, no. 3, pp. 275–283.
30. Hmaimou A., Kaidi A. and Campos E. S. Generalized Fitting modules and rings. *J. Algebra*, 2007, vol. 308, pp. 199–214.
31. Aydoğdu P. and Özcan A. Ç. Semi co-Hopfian and semi Hopfian modules. *East-West J. Math.*, 2008, vol. 10, no. 1, pp. 57–72.
32. Yan X.F. and Liu Z. Extensions of generalized Fitting modules. *J. Math. Res. Exp.*, 2010, vol. 30, no. 3, pp. 407–414.
33. Jiao Y.J. Semi Hopfian and semi co-Hopfian modules over generalized power series rings. *Int. J. Algebra*, 2012, vol. 6, no. 5–8, pp. 209–218.
34. Wang X. and Li T. A Generalization of Weakly Co-hopfian Modules. *Int. Math. Forum*, 2014, vol. 9, no. 6, pp. 255–258.
35. Diallo E., Maaouia M. and Sanghare M. Hopfian Objects, Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A-Modules. *Int. Math. Forum*, 2013, vol. 8, no. 39, pp. 1903–1920.
36. Diallo E., Maaouia M. and Sanghare M. Strongly Hopfian and Strongly Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A-Modules. *J. Math. Res.*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 81–90.
37. Irwin J. M. and Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups. *Pacif. J. Math.*, 1969, vol. 29, no. 1, pp. 151–160.
38. Takashi J. and Irwin J.M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 1969, vol. 20, no. 4, pp. 194–203.
39. Goldsmith B. and Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Arch. Math.*, 2012, vol. 99, no. 1, pp. 1–8.
40. Goldsmith B. and Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups. *Comm. Algebra*, 2012, vol. 40, pp. 972–987.
41. Goldsmith B. and Gong K. *A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups*. Dublin, AMS forthcoming, 2012, pp. 1–9.
42. Goldsmith B. and Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Acta Math. Hung.*, 2013, vol. 139, no. 4, pp. 393–398.
43. Dikranjan D., Goldsmith B., Salce L. and Zanardo P. Algebraic entropy for Abelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 361, no. 7, pp. 3401–3434.
44. Beaumont R.A. Groups with isomorphic proper subgroups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, vol. 51, pp. 381–387.
45. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, vol. 91, pp. 209–219.
46. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Isomorphic direct summands of Abelian groups. *Math. Ann.*, 1964, vol. 153, pp. 21–37.
47. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. IF-gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2010, no. 1(9), pp. 5–14. (in Russian)
48. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Primarnye IF-gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 3(15), pp. 25–31. (in Russian)
49. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Sobstvennye vpolne kharakteristicheskie podgruppy grupp bez krucheniya, izomorfnye samoy gruppe. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 1(17), pp. 25–30. (in Russian)

50. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Periodicheskie IF-gruppy. *Fundament. i prikl. matem.*, 2012, vol. 17, no. 8, pp. 47–58. (in Russian)
51. Kaygorodov E.V. Khopfovy abelevy grupy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 2(18). С. 5–12.
52. Kaygorodov E.V. O dvukh klassakh khopfovykh abelevykh grupp. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 2(22), pp. 22–33. (in Russian)
53. Kaygorodov E.V. Khopfovy vpolne razlozhimye grupy bez krucheniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 4(24), pp. 24–28. (in Russian)
54. Kaigorodov E.V. Hopfian algebraically compact Abelian groups. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 442–447.
55. Crawley P. An infinite primary Abelian group without proper isomorphic subgroups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 68, pp. 463–467.
56. Hill P. and Megibben Ch. On primary groups with countable basic subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 124, no. 1, pp. 49–59.
57. Monk G.S. Abelian -groups without proper isomorphic pure dense subgroups. *Ill. J. Math.*, 1970, vol. 14, no. 1, pp. 164–177.
58. Goldsmith B., Ohogain S. and Wallutis S. Quasi-minimal groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 132, no. 8, pp. 2185–2195.
59. Chekhlov A. R. and Danchev P. V. On Abelian Groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic. *Comm. Algebra*, 2015.
60. Kurosh A.G. *The Theory of Groups* (2 vols.). New York, Chelsea Publishing Company, 1960. 612 p.
61. Gratzner G. *General Lattice Theory*. New York, Academic Press, 1978. 404 p.
62. Krylov P.A., Mikhalev A.V., and Tuganbaev A.A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003. 442 p.
63. Fuks L. *Beskonechnye abelevy grupy*, vol. 1. Moskow, Mir Publ., 1974. 336 p. (in Russian)

УДК 512.552+512.643.8
DOI 10.17223/19988621/36/4

Ц.Д. Норбосамбуев

О СУММАХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ОБРАТИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

Исследованы свойства хороших колец обобщенных матриц. Показано, что любая обобщенная матрица есть сумма диагональной и обратимой обобщенных матриц. Получено одно условие k -хорошести произвольного кольца обобщенных матриц.

Ключевые слова: *кольцо, обобщенная матрица, формальная матрица, k -хорошее кольцо.*

1. Введение

Числовые матрицы используются во многих областях математики и в различных её приложениях. В алгебре часто встречаются и имеют большое значение так называемые обобщенные матрицы. Их называют также формальными матрицами. Элементы этих матриц могут принимать значения в нескольких кольцах и бимодулях. Обобщенные матрицы складываются и умножаются по стандартным правилам матричного сложения и умножения. В результате получается кольцо – кольцо обобщенных (или формальных) матриц.

Это кольцо представляет собой важный алгебраический объект. Например, кольцо эндоморфизмов разложимого в прямую сумму модуля и любое кольцо с нетривиальным идемпотентом являются кольцами обобщенных матриц. Кольца обобщенных матриц играют важную роль в изучении ряда классов артиновых колец и алгебр. Исследование колец обобщенных матриц – это актуальное направление в современной теории колец и модулей. Оно имеет большое научное значение. В настоящее время эта тематика привлекает повышенное внимание зарубежных специалистов. С определением и основными свойствами колец обобщенных матриц можно познакомиться в статьях [1–3]. Напомним, что K_n обозначает некоторое кольцо обобщенных матриц порядка n

$$K_n = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где $R_1, \dots, R_n$ – некоторые кольца, $M_{ij} = R_i R_j$ -бимодуль, $i, j=1, \dots, n$.

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, R – произвольное кольцо. Элемент a кольца R называется k -хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R . Кольцо называется k -хорошим, если каждый его элемент является k -хорошим. Изучение колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами, началось в 1953–1954 годах, когда Вольфсон [4] и Зелинский [5] независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда $\dim(V) = 1$ и $D = \mathbf{Z}_2$. Это значит, что кольцо линейных преоб-

разований $\text{End}(V)$ порождается аддитивно своими обратимыми элементами. В 1958 году Скорняков [6] поставил задачу описания такого рода колец. В [7] Рафаэль, отвечая на вопрос Скорнякова, дал начало систематическому изучению таких колец, которые он назвал S -кольцами. Независимо от предыдущих работ к этой проблеме пришел Фукс. В [8] он сформулировал вопрос: «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?» За этим последовал ряд статей Стрингалла [9], Фридмана [10], Хилла [11] и Кастаньо [12]. В 1973 г. Хенриксен [13] описал два широких класса колец, порождаемых своими обратимыми элементами. Позже с этими кольцами работали Вамос [14] (он ввел понятие k -хорошего кольца), Сривастава [15]. Имеется несколько статей, посвященных различным k -хорошим кольцам. Так, например, в [14] и [15] получены результаты по k -хорошести регулярных колец фон Неймана, правых самоинъективных колец.

2. Одно условие k -хорошести произвольного кольца обобщенных матриц

Теорема 1. Кольцо K_n является k -хорошим, если все R_i – k -хорошие кольца для некоторого $k > 1, i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть все R_i – k -хорошие кольца, $k > 1, i = 1, \dots, n$ и $X \in K_n$. Запишем матрицу X в полном виде:

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & r_n \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицы A, B и C следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $X = A + B + C$.

Так как все R_i – k -хорошие кольца, то

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 + u_1^2 + \dots + u_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^1 + u_2^2 + \dots + u_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 + u_n^2 + \dots + u_n^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} u_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^k \end{pmatrix} = \\ &= U_1 + U_2 + \dots + U_k, \end{aligned}$$

где $U_1, U_2, \dots, U_k$ – обратимые матрицы.

Определим теперь матрицы A' и C' следующим образом:

$$A' = A + U_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & u_2^1 & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 \end{pmatrix},$$

$$C' = C + U_2 = \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & u_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что A' и C' – обратимые матрицы как треугольные матрицы с обратимыми элементами на главной диагонали.

Таким образом, имеем $X = A + B + C = A' + C' + U_3 + \dots + U_k$ – сумма k обратимых матриц.

Итак, K_n является k -хорошим кольцом. Что и требовалось доказать.

3. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц

Через $M(n, R)$ будем обозначать обычное кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом R . Хенриксоном [5] было показано, что $M(n, R)$ – 3-хорошее кольцо. А именно, он доказал, что всякая матрица из этого кольца представима в виде суммы диагональной и обратимой матриц. Диагональная же матрица всегда может быть записана как сумма двух обратимых матриц. Кольцо $M(n, R)$, конечно, является кольцом обобщенных матриц. На главной диагонали матриц из $M(n, R)$ находятся элементы кольца R . На остальных местах – элементы R -бимодуля R . Умножение задается с помощью тождественных гомоморфизмов.

Докажем, что обобщенная матрица также есть сумма диагональной и обратимой обобщенных матриц.

Доказательство следующей леммы элементарно.

Лемма 2. Пусть R – кольцо, $x \in R$, $p, q \in U(R)$ – множеству обратимых элементов кольца R . Если $p \cdot x \cdot q = 1$, то $x \in U(R)$ и $x^{-1} = q \cdot p$.

Лемма 3. Пусть U' – блочная матрица порядка 2 (обобщенная матрица порядка $n+1$)

$$U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

где U – обратимая обобщенная матрица порядка n , B – вектор-столбец длины n , C – вектор-строка длины n . Тогда U' – обратимая матрица и

$$(U')^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим

$$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q = \begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица кольца K_n обобщенных матриц порядка n . Убедимся, что P и Q – обратимые матрицы в кольце K_{n+1} .

Действительно, утверждаем, что

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q^{-1} = \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} PP^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_n * E_n + 0 * (CU^{-1}) & E_n * 0 + 0 * 1 \\ (-CU^{-1}) * E_n + 1 * (CU^{-1}) & (-CU^{-1}) * 0 + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}P &= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_n * E_n + 0 * (-CU^{-1}) & E_n * 0 + 0 * 1 \\ (CU^{-1}) * E_n + 1 * (-CU^{-1}) & (CU^{-1}) * 0 + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И далее имеем равенства

$$\begin{aligned} QQ^{-1} &= \begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} U^{-1} * U + (-U^{-1}B) * 0 & U^{-1} * B + (-U^{-1}B) * 1 \\ 0 * U + 1 * 0 & 0 * B + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{-1}Q &= \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} U * U^{-1} + B * 0 & U * (-U)^{-1}B + B * 1 \\ 0 * U^{-1} + 1 * 0 & 0 * (-U)^{-1}B + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Покажем теперь обратимость матрицы U' . Вычислим произведение

$$\begin{aligned} PU' &= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_n * U + 0 * C & E_n * B + 0 * 1 + CU^{-1}B \\ (-CU^{-1}) * U + 1 * C & (-CU^{-1}) * B + 1 * (1 + CU^{-1}B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь имеем равенства

$$(P \cdot U)Q = Q^{-1}Q = E_{n+1}.$$

Итак, $(P \cdot U)Q = E_{n+1}$ и P, Q – обратимые матрицы в K_{n+1} . Тогда по лемме 2 U' – обратимая матрица и

$$\begin{aligned} (U')^{-1} &= QP = \begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Любая матрица из K_n может быть записана как сумма диагональной и обратной матриц.

Доказательство. Проведем индукцию по n . Так как $a = (a-1)+1$ для любого элемента a из любого кольца R , то теорема верна для $n=1$.

Пусть она верна для кольца K_n , для некоторого $n \geq 1$. Покажем, что она верна и для кольца K_{n+1} .

Пусть $X \in K_{n+1}$. Напомним, что

$$K_{n+1} = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1,n+1} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,2} & \dots & R_{n+1} \end{pmatrix},$$

где $R_1, \dots, R_{n+1}$ – некоторые кольца, $M_{ij} - R_i - R_j$ -бимодуль, $i, j=1, \dots, n+1$. Тогда можем записать

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix},$$

где $A \in K_n$, B – вектор-столбец длины n , C – вектор-строка длины n , $d \in R_{n+1}$.

По предположению индукции A – сумма диагональной и обратной матриц, $A = D + U$, где D – диагональная, U – обратимая матрицы.

Тогда если положить

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & d - 1 - CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

то будет верно равенство $X = D' + U'$, где D' – диагональная матрица, U' – обратимая матрица (по лемме 3).

Что и требовалось доказать.

Таким образом, задача описания k -хороших колец обобщенных матриц сведена к задаче описания $(k-1)$ -хороших диагональных матриц. В общем случае диагональная обобщенная матрица 2-хорошей не будет. Таким образом, встает вопрос – при каких условиях обеспечивается k -хорошесть диагональной обобщенной матрицы?

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. № 8. С. 145–211.
2. Крылов П.А. О группе K_0 кольца обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 3. С. 370–385.
3. Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings // Linear Algebra and Appl. 2013. V. 428. P. 4672–4688.
4. Wolfson K.G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 358–386.
5. Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 627–630.
6. Skornyakov L. Complemented modular lattices and regular rings. London: Oliver&Boyd, 1958. 182 p.

7. Raphael R.M. Rings which are generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 199–204.
8. Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups // Topics in Abelian groups (Proc. Sympos., New Mexico State University). 1962. Scott, Foresman, Chicago. P. 9–40.
9. Stringall R.W. Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1967. V. 18. P. 401–404.
10. Freedman H. On endomorphisms of primary Abelian groups // J. London Math. Soc. 1968. V. 43. P. 305–307.
11. Hill P. Endomorphism ring generated by units // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 99–105.
12. Castagna F. Sums of automorphisms of a primary Abelian group // Pacific J. Math. 1968. V. 27. P. 463–473.
13. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. P. 182–193.
14. Vámos P. 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56. P. 417–430.
15. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Mathematiques. 2010. V. 19. P. 203–213.

Статья поступила 03.06.2015 г.

Norbosambuev T.D. ON SUMS OF DIAGONAL AND INVERTIBLE FORMAL MATRICES

DOI 10.17223/19988621/36/4

This paper concerns properties of k -good formal matrix rings K_n of order n with rings $R_1, R_2, \dots, R_n$ on the main diagonal and $R_i R_j$ -bimodules M_{ij} on other places. In the ring theory, various matrix rings play an important role. Above all I mean formal matrix rings. Formal matrix rings generalize a notion of matrix ring of order n over a given ring. Every ring with nontrivial idempotents is isomorphic to some formal matrix ring. The endomorphism ring of a decomposable module also is a formal matrix ring. The studies of such rings are quite useful for solving some problems on endomorphism rings of Abelian groups. In this paper I show that every matrix form K_n is the sum of diagonal matrix and invertible matrix. Also I give one condition when K_n is the k -good ring.

Keywords: ring, generalized matrix, formal matrix, k -good ring

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. Moduli nad kol'tsami formal'nykh matrirts. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, 2009, vol. 15, no. 8, pp. 145–211. (in Russian)
2. Krylov P.A. O gruppe K_0 kol'tsa obobshchennykh matrirts. *Algebra i logika*, 2013, vol. 52, no. 3, pp. 370–385. (in Russian)
3. Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings. *Linear Algebra and Appl.*, 2013, vol. 428, pp. 4672–4688.
4. Wolfson K.G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations. *Amer. J. Math.*, 1953, vol. 75, pp. 358–386.
5. Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1954, vol. 5, pp. 627–630.
6. Skornyakov L. *Complemented modular lattices and regular rings*. London, Oliver&Boyd, 1958. 182 p.
7. Raphael R.M. Rings which are generated by their units. *J. Algebra*, 1974, vol. 28, pp. 199–204.

8. Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups. *Topics in Abelian groups (Proc. Sympos., New Mexico State University)*. Scott, Foresman, Chicago, 1962, pp. 9–40.
9. Stringall R.W. Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1967, vol. 18, pp. 401–404.
10. Freedman H. On endomorphisms of primary Abelian groups. *J. London Math. Soc.*, 1968, vol. 43, pp. 305–307.
11. Hill P. Endomorphism ring generated by units. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 141, pp. 99–105.
12. Castagna F. Sums of automorphisms of a primary Abelian group. *Pacific J. Math.*, 1968, vol. 27, pp. 463–473.
13. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units. *J. Algebra*, 1974, vol. 31, pp. 182–193.
14. Vamos P. 2-good rings. *Quart. J. Math.*, 2005, vol. 56, pp. 417–430.
15. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Mathematiques*, 2010, vol. 19, pp. 203–213.

УДК 512.541

DOI 10.17223/19988621/36/5

А.В. Разина

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ГОЛОМОРФЫ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Рассматриваются нормальные подгруппы относительного голоморфа абелевой группы. Доказаны некоторые свойства нормальной подгруппы относительного голоморфа. Доказывается определяемость свободной абелевой группы своим относительным голоморфом.

Ключевые слова: голоморф, относительный голоморф, свободная абелева группа, нормальная подгруппа, относительно голоморфно изоморфные группы.

При изучении голоморфов абелевых групп важное место занимает вопрос об определяемости группы своим относительным голоморфом (голоморфом).

Исследованию нормальных подгрупп голоморфов абелевых групп и определяемости абелевых групп своими голоморфами посвящен ряд работ И.Х. Беккера, И.Э. Гриншпон, С.Я. Гриншпона, В.Х. Миллса (см. например, [1–4]).

Пусть G – абелева группа и пусть Φ – некоторая подгруппа группы $\text{Aut}(G)$ (группы её автоморфизмов).

Относительный голоморф $\Gamma(G, \Phi)$ группы G – это множество пар вида (g, σ) , где g – элемент группы G , σ – элемент группы Φ ; с операцией сложения, введенной следующим образом: $(g_1, \sigma_1) + (g_2, \sigma_2) = (g_1 + \sigma_1 g_2, \sigma_1 \sigma_2)$. Для всякого элемента (g, σ) исходной группы противоположным будет являться $(-\sigma^{-1}g, \sigma^{-1})$. Элемент (g, ε) , где ε – тождественный автоморфизм группы G , будем обозначать просто g , а элемент $(0, \sigma)$, где 0 – нейтральный элемент группы G , – просто σ . Согласно этой договоренности, можно считать, что G и Φ содержатся в $\Gamma(G, \Phi)$. Если $\Phi = \text{Aut}(G)$, то $\Gamma(G, \Phi)$ называется просто голоморфом и обозначается $\Gamma(G)$.

Рассмотрим некоторые свойства нормальной подгруппы относительного голоморфа.

Лемма. Пусть S – нормальная абелева подгруппа относительного голоморфа $\Gamma(G, \Phi)$ абелевой группы G и Φ – содержит автоморфизм θ , такой, что $\theta g = -g$, и пусть $(a, \sigma) \in S$, $g \in G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$2a \in S, \sigma^2 \in S; \quad (1)$$

$$\sigma a - a \in S; \quad (2)$$

$$\sigma(\sigma a - a) = \sigma a - a; \quad (3)$$

$$\sigma^n a = a + n(\sigma a - a); \quad (4)$$

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right); \quad (5)$$

$$2(\sigma a - a) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\tau \in \Phi$. Покажем вначале, что элемент $(\tau a, \tau \sigma \tau^{-1})$ принадлежит S . Это следует из нормальности подгруппы S : $(0, \tau) + (a, \sigma) + (- (0, \tau)) \in S$, то есть $(0, \tau) + (a, \sigma) + (0, \tau^{-1}) = (\tau a, \tau \sigma \tau^{-1}) \in S$.

Так как S – абелева, то $(a, \sigma) + (\tau a, \tau \sigma \tau^{-1}) = (\tau a, \tau \sigma \tau^{-1}) + (a, \sigma)$.

То есть $(a, \sigma) + (\tau a, \tau \sigma \tau^{-1}) = (a + \sigma(\tau a), \sigma \tau \sigma \tau^{-1})$ и $(\tau a, \tau \sigma \tau^{-1}) + (a, \sigma) = (\tau a + \tau \sigma \tau^{-1} a, \tau \sigma \tau^{-1} \sigma)$. Сравнивая первые компоненты, заключаем, что $a + \sigma \tau a = \tau a + \tau \sigma \tau^{-1} a$. Поэтому, если $\tau \in \Phi$ и $\tau a = a$, то $\sigma a = \sigma \tau a$.

Полагаем, что Φ содержит автоморфизм θ группы G , такой, что $\theta g = -g$ (то есть $\theta = -\varepsilon$).

Заметим, что $\theta^{-1} g = -g$, то есть $\theta = \theta^{-1}$. Пусть $\lambda = \sigma^{-1} \theta$. Поскольку $\sigma \in \Phi$ и $\theta \in \Phi$, то автоморфизм $\lambda \in \Phi$. Так как θ коммутирует с σ , то $\lambda \sigma \lambda^{-1} = \sigma$. Заменив в ранее полученном равенстве $a + \sigma \tau a = \tau a + \tau \sigma \tau^{-1} a$ автоморфизм τ на λ , имеем $a + \sigma \lambda a = a + \theta a = a - a = 0$.

С другой стороны, $\lambda a + \lambda \sigma \lambda^{-1} a = (\sigma^{-1} \theta) a + \sigma a = \sigma^{-1}(\theta(a)) + \sigma a = \sigma^{-1}(-a) + \sigma a$. Значит, $0 = \sigma^{-1}(-a) + \sigma a$. Применяя σ , получаем $\sigma 0 = \sigma \sigma^{-1}(-a) + \sigma \sigma a$, $0 = -a + \sigma^2 a$, т.е. $a = \sigma^2 a$. Таким образом, заключаем, что $\sigma^2 a = a$.

Покажем, что $(a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (- (0, \lambda)) = (0, \sigma^2)$.

Имеем $(a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (- (0, \lambda)) = (a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (-\lambda^{-1}(0), \lambda^{-1}) = (a, \sigma) + (0, \sigma^{-1} \theta) + (a, \sigma) + (0, \lambda^{-1}) = (a + 0, \sigma \sigma^{-1} \theta) + (a, \sigma) + (0, \theta^{-1} \sigma) = (a, \theta) + (a, \sigma) + (0, \theta^{-1} \sigma) = (a + \theta a, \theta \sigma) + (0, \theta^{-1} \sigma) = (0, \theta \sigma \theta^{-1} \sigma) = (0, \sigma \theta \sigma \theta^{-1}) = (0, \sigma \theta \theta^{-1} \sigma) = (0, \sigma \varepsilon \sigma) = (0, \sigma^2)$.

Так как $(a, \sigma) \in S$ и $(0, \lambda) + (a, \sigma) + (- (0, \lambda)) \in S$, то $(0, \sigma^2) \in S$.

Кроме того, имеем $-g + (a, \sigma) + g + (- (a, \sigma)) = (-g, \varepsilon) + (a, \sigma) + (g, \varepsilon) + (- (a, \sigma)) = (-\varepsilon^{-1} g, \varepsilon^{-1}) + (a, \sigma) + (g, \varepsilon) + (-\sigma^{-1} a, \sigma^{-1}) = (-g, \varepsilon^{-1}) + (a, \sigma) + (g + \varepsilon(-\sigma^{-1} a), \varepsilon \sigma^{-1}) = (-g + \varepsilon^{-1} a, \varepsilon^{-1} \sigma) + (g + (-\sigma^{-1} a), \varepsilon \sigma^{-1}) = (-g + a, \sigma) + (g - \sigma^{-1} a, \varepsilon \sigma^{-1}) = (-g + a + \sigma(g - \sigma^{-1} a), \sigma \sigma^{-1}) = (-g + a + \sigma g - \sigma \sigma^{-1} a, \varepsilon) = (-g + a + \sigma g - a, \varepsilon) = (-g + \sigma g, \varepsilon) = -g + \sigma g = \sigma g - g$.

Итак, $\sigma g - g \in S$.

Отсюда $-(\sigma a - a) + 2(a, \sigma) + (- (0, \sigma^2)) \in S$. Имеем $-(\sigma a - a, \varepsilon) + 2(a, \sigma) + (-\sigma^{-2} 0, \sigma^{-2}) = (-\varepsilon^{-1}(\sigma a - a), \varepsilon^{-1}) + (a + \sigma a, \sigma^2) + (0, \sigma^{-2}) = (-(\sigma a - a), \varepsilon^{-1}) + (a + \sigma a + \sigma^2 0, \sigma^2 \sigma^{-2}) = (-\sigma a + a + \varepsilon^{-1}(a + \sigma a), \varepsilon^{-1} \varepsilon) = (a + a, \varepsilon) = (2a, \varepsilon) = 2a$.

Таким образом, установили, что $(0, \sigma^2) \in S$, $(\sigma g - g) \in S$ и $2a \in S$.

Утверждения (1) и (2) рассматриваемой леммы доказаны.

Если $\tau \in \Phi$, то S содержит элемент $(0, \tau) + (\sigma g - g) + (- (0, \tau)) = \tau(\sigma g - g)$. Тогда, так как S – абелева группа, то (a, σ) коммутирует с $\tau(\sigma g - g)$, то есть

$$(a, \sigma) + (\tau(\sigma g - g), \varepsilon) = (\tau(\sigma g - g), \varepsilon) + (a, \sigma).$$

Следовательно, $(a + \tau(\sigma g - g), \sigma) = (\tau(\sigma g - g) + a, \sigma)$. Сравнивая первые компоненты, получаем $\sigma \tau(\sigma g - g) = \tau(\sigma g - g)$. Если положим в полученном равенстве, что $\tau = \varepsilon$, то получим равенство $\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g$, из которого, индукцией по n , следует, что $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$.

Индукцией по n также доказывается, что $n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Покажем это.

Ясно, что при $n = 1$ $(a, \sigma) = \left(a + \frac{1(1-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^1 \right) = (a, \sigma)$. Данное равенство

выполняется.

Пусть это равенство верно для $n = k$, т.е. $k(a, \sigma) = \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^k\right)$.

Проверим, выполнено ли это равенство для $n = k + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (k+1)(a, \sigma) &= k(a, \sigma) + (a, \sigma) = \\ &= \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a) + \sigma^k a, \sigma^{k+1}\right) = \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a) + a + k(\sigma a - a), \sigma^{k+1}\right) = \\ &= \left((k+1)a + \left(\frac{(k-1)k}{2} + k\right)(\sigma a - a), \sigma^{k+1}\right) = \left((k+1)a + \frac{(k+1)k}{2}(\sigma a - a), \sigma^{k+1}\right). \end{aligned}$$

Значит формула $n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n\right) \forall n \in \mathbb{N}$ верна.

Сравним равенства $\sigma^2 a = a$ и $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$. Во втором равенстве вместо элемента g рассмотрим элемент a : $\sigma^2 a = a + 2(\sigma a - a)$. Отсюда следует, что $a = a + 2(\sigma a - a)$, то есть $2(\sigma a - a) = 0$.

Таким образом, лемма доказана.

Рассмотренные утверждения являются обобщением [4] на случай относительного голоморфа. Напомним, что в построении относительного голоморфа предполагается, что подгруппа Φ содержит автоморфизм, переводящий любой элемент группы в ему противоположный.

Напомним, что две группы называются относительно голоморфно изоморфными (голоморфно изоморфными), если относительные голоморфы (голоморфы) этих групп изоморфны. Говорят, что группа A определяется своим относительным голоморфом (голоморфом) в некотором классе групп M , если любая группа B из этого класса, относительно голоморфно (голоморфно) изоморфная группе A , изоморфна группе A .

Рассмотрим G и G' – свободные абелевы группы. Эти группы представимы в виде $G = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ и $G' = \bigoplus_{j \in J} \langle b_j \rangle$, где $\langle a_i \rangle (i \in I), \langle b_j \rangle (j \in J)$ – бесконечные циклические группы. Понятно, что для любой пары a_{i_1}, a_{i_2} группы G , где $i_1, i_2 \in I, i_1 \neq i_2$, существует автоморфизм τ , такой, что $\tau a_{i_1} = a_{i_2}$, а на подгруппе $C = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1, i_2}} \langle a_i \rangle$ автоморфизм τ действует тождественно. Начиная с этого места, все

такие автоморфизмы будем включать в группу Φ относительного голоморфа. Аналогично поступим для относительного голоморфа $\Gamma(G', \Phi')$.

Теорема. Если G и G' – свободные абелевы группы, каждая из которых изоморфна нормальной подгруппе относительного голоморфа другой группы, то G изоморфна G' .

Доказательство. Пусть $G \cong H', G' \cong H$, где H и H' – нормальные подгруппы голоморфов $\Gamma(G, \Phi)$ и $\Gamma(G', \Phi')$ соответственно. Полагаем, что Φ и Φ' содержат автоморфизм ε . Так как $G' \cong H$ и G' – группа без кручения, то H – группа без кручения. Пусть $(a, \sigma) \in H$ (т.е. $a \in G$ и $\sigma \in \Phi$).

Пусть $n(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$. Так как H – группа без кручения, то из этого равенства следует, что $(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$, т.е. $a = 0$ и $\sigma = \varepsilon$.

Так как в H обязательно существует элемент (a, σ) , у которого $a \neq 0$, то рассмотрим сервантную подгруппу, порожденную элементом $2a$: $\langle 2a \rangle_*$. Имеем в силу утверждения (1) леммы $2a \in G \cap H$. Группа G является однородной сепарабельной группой, и поэтому, так как однородная группа сепарабельна тогда и только тогда, когда каждая её сервантная подгруппа, имеющая конечный ранг, служит для неё прямым слагаемым, подгруппа $\langle 2a \rangle_*$ выделяется в G прямым слагаемым [5, с. 137].

Можно считать, что для некоторого $i_1 \in I$ $\langle 2a \rangle_* = \langle a_{i_1} \rangle$. Для любого $i \in I (i \neq i_1)$ существует автоморфизм $\tau_i \in \Phi$ группы G , такой, что $\tau_i a_{i_1} = a_i$.

Имеем

$$\begin{aligned} (0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon) - (0, \tau_i) &= (0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon) + (0, \tau_i^{-1}) = \\ &= (0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon \tau_i^{-1}) = (\tau_i a_{i_1}, \tau_i \varepsilon \tau_i^{-1}) = a_i. \end{aligned}$$

Так как $2a \in \langle a_{i_1} \rangle$, то $\tau_i(2a) \in \langle a_i \rangle$. Учитывая, что $2a \in H$ и $\tau_i(2a) = (0, \tau_i) + (2a, \varepsilon) - (0, \tau_i)$, получаем $\tau_i(2a) \in H$.

Итак, мы можем в H построить $|I|$ линейно независимых элементов: $\{2a, \tau_i(2a)\}_{i \in I \setminus \{i_1\}}$. По условию $H \cong G'$, т.е. $|I|$ линейно независимых элементов можно построить и в G' , поэтому $|J| \geq |I|$. Аналогично получаем, $|I| \geq |J|$. Таким образом, $|I| = |J|$. Учитывая, что две свободные группы изоморфны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают, получаем, что группы G и G' изоморфны.

Следствие. Если G и G' – свободные абелевы группы с изоморфными относительно голоморфами, то G изоморфна G' .

Доказательство. Так как любая абелева группа является нормальной подгруппой в своем относительном голоморфе, то, применяя предыдущую теорему, получаем утверждение следствия.

Таким образом, мы получили, что всякая свободная абелева группа определяется своим относительным голоморфом (а значит, и голоморфом) в классе всех свободных абелевых групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 6. С. 1228–1238.
2. Гриншпон И.Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. матем. Т. 13. № 3. 2007. С. 9–16.
3. Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. Вопросы математики. Т. 220. Вып. 3. 1975. С. 78–84.
4. Mills W.H. Multiple holomorph of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 71. No. 3. P. 379–392.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1974. 416 с.

Razina A. V. RELATIVE HOLOMORPHS OF FREE ABELIAN GROUPS AND THEIR INVARIANT SUBGROUPS

DOI 10.17223/19988621/36/5

This article focuses on invariant subgroups of the relative holomorph of an abelian group. Some properties of an invariant subgroup of the relative holomorph are proved. We also prove that a free abelian group is determined by its relative holomorph.

Keywords: holomorph, relative holomorph, free abelian group, invariant subgroup, relative holomorphically isomorphic groups.

RAZINA Anastasiya Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: anastacie.razina@mail.ru

REFERENCES

1. Bekker I.Kh. O golomorfakh abelevykh grupp. *Sib. matem. zhurn.*, 1964, vol. 5, no. 6, pp. 1228–1238. (in Russian)
2. Grinshpon I.E. Normal'nye podgruppy golomorfov abelevykh grupp i pochti golomorfnyy izomorfizm. *Fundament. i prikl. matem.*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 9–16. (in Russian)
3. Grinshpon S.Ya. Pochti golomorfno izomorfnye abelevy gruppy. *Trudy TGU. Voprosy matematiki*, 1975, vol. 220, no. 3, pp. 78–84. (in Russian)
4. Mills W.H. Multiple holomorph of finitely generated abelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 71, no. 3, pp. 379–392.
5. Fuks L. *Beskonechnye abelevy gruppy*, vol. 2. Moscow, Mir Publ., 1974. 416 p. (in Russian)

УДК 512.541.32

DOI 10.17223/19988621/36/6

С.Л. Фуксон

ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ГРУППЫ $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$

В марте 2013 г. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences опубликовал статью «Perpendicularity in an Abelian Group». Основная цель статьи – введение понятия бинарного отношения ортогональности в произвольной абелевой группе. Нами полностью исследованы прямые суммы групп $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$, построены все их ортогональности. Также нам удалось обобщить полученные результаты для прямых сумм циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Ключевые слова: ортогональность, группа, абелева группа, прямая сумма, циклическая группа.

Всё больше геометрические понятия проникают в пространство изучения алгебры. Наукканен и другие [1] вводят понятие ортогональности в абелевой группе с помощью аксиом, которые оказываются вполне естественными, если придать им геометрическую интерпретацию.

Цель данного исследования – выяснить, какими ортогональностями обладает прямая сумма циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. На пути к ответу на этот вопрос мы рассматриваем частные случаи: группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$, и только после этого нам удаётся обобщить результаты для произвольной группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Пусть $G = (G, +)$ – аддитивная абелева группа. Пусть $\perp$ – бинарное отношение в G , удовлетворяющее следующим аксиомам:

- (A1) $\forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b$,
- (A2) $\forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a$,
- (A3) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a$,
- (A4) $\forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c)$,
- (A5) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b$.

Будем называть данное бинарное отношение $\perp$ ортогональностью в G [1].

Следующая ортогональность называется тривиальной:

$$x \perp y \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0. \quad (1)$$

Однако наибольший интерес представляют нетривиальные ортогональности [1].

Определение 1. Назовём отношение ортогональности максимальной ортогональностью в G , если при добавлении к нему каких-либо новых пар полученное отношение уже не является ортогональностью в G .

Сформулированная ниже теорема помогает определить, когда G имеет нетривиальную ортогональность.

Теорема 2 [1]. Следующие условия эквивалентны:

- (а) G имеет нетривиальную ортогональность $\perp$;
- (б) G имеет нетривиальные циклические подгруппы H и K , такие, что $H \cap K = \{0\}$;
- (с) G имеет нетривиальные подгруппы H и K , такие, что $H \cap K = \{0\}$.

Наибольший интерес представляет собой доказательство импликации (с) $\Rightarrow$ (а), поскольку с его помощью вводится способ построения нетривиальных ортогональностей. А именно, определим $\perp$ как

$$x \perp y \Leftrightarrow (x \in H \wedge y \in K) \vee (x \in K \wedge y \in H) \vee x = 0 \vee y = 0. \quad (2)$$

Пример 3. Пусть $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Обозначим через $0 = (0, 0)$, $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, $c = (1, 1)$ элементы группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Нетривиальными подгруппами группы G являются подгруппы: $A = \{0, a\}$, $B = \{0, b\}$, $C = \{0, c\}$.

Применяя (2) к каждой паре подгрупп, получаем 3 нетривиальные ортогональности:

$$x \perp y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0,$$

$$x \perp y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0,$$

$$x \perp y \Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in B) \vee x = 0 \vee y = 0.$$

Все эти ортогональности являются максимальными [1].

Оказывается, что ситуация существенно усложняется при рассмотрении группы $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Пример 4. Пусть $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

$$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}, \text{ где}$$

$$0 = (0, 0), \quad a_1 = (0, 1), \quad a_2 = (0, 2),$$

$$a_3 = (1, 0), \quad a_4 = (1, 1), \quad a_5 = (1, 2),$$

$$a_6 = (2, 0), \quad a_7 = (2, 1), \quad a_8 = (2, 2).$$

В силу теоремы 2, группа G имеет нетривиальную ортогональность тогда и только тогда, когда G имеет нетривиальные подгруппы, имеющие тривиальное пересечение. Так как порядок группы $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ равен 9, то, согласно теореме Лагранжа, порядок любой её нетривиальной подгруппы равен 3. Выпишем эти подгруппы:

$$A = \{0, a_1, a_2\}, B = \{0, a_3, a_6\}, C = \{0, a_4, a_8\}, D = \{0, a_5, a_7\}.$$

Заметим также, что каждые две подгруппы имеют лишь тривиальное пересечение. Таким образом, в силу (2), получаем 6 различных нетривиальных ортогональностей:

$$x \perp_1 y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0, \quad (A, B)$$

$$x \perp_2 y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0, \quad (A, C)$$

$$x \perp_3 y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in D) \vee (x \in D \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0, \quad (A, D)$$

$$x \perp_4 y \Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in B) \vee x = 0 \vee y = 0, \quad (B, C)$$

$$x \perp_5 y \Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in D) \vee (x \in D \wedge y \in B) \vee x = 0 \vee y = 0, \quad (B, D)$$

$$x \perp_6 y \Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in D) \vee (x \in D \wedge y \in C) \vee x = 0 \vee y = 0. \quad (C, D)$$

Будем называть такие ортогональности, полученные с помощью (2), *элементарными*.

Заметим, что каждая ортогональность соответствует паре подгрупп. Так, например, ортогональность $\perp_1$ соответствует паре (A, B) , $\perp_2$ – паре (A, C) и т.д.

Будем говорить, что (X, Y) и (S, T) не имеют общих элементов, если

$$(X \cup Y) \cap (S \cup T) = 0. \quad (3)$$

Например, (A, B) и (A, C) имеют общие элементы, а (A, B) и (C, D) нет.

Можно ли построить новые ортогональности, отличные от элементарных? Следующее предложение помогает при ответе на этот вопрос.

Предложение 5. Объединение ортогональностей, соответствующих парам подгрупп, не имеющих общих элементов, также является ортогональностью.

Таким образом, объединив ортогональности $\perp_1$ и $\perp_6$, $\perp_2$ и $\perp_5$, $\perp_3$ и $\perp_4$, мы получим 3 новые ортогональности:

$$x \perp_{16} y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in D) \vee \\ \vee (x \in D \wedge y \in C) \vee x = 0 \vee y = 0,$$

$$x \perp_{25} y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in A) \vee (x \in B \wedge y \in D) \vee \\ \vee (x \in D \wedge y \in B) \vee x = 0 \vee y = 0,$$

$$x \perp_{34} y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in D) \vee (x \in D \wedge y \in A) \vee (x \in B \wedge y \in C) \vee \\ \vee (x \in C \wedge y \in B) \vee x = 0 \vee y = 0.$$

Предложение 6. Ортогональности $\perp_{16}$, $\perp_{25}$ и $\perp_{34}$ являются максимальными.

Доказательство. Докажем, что $\perp_{16}$ является максимальной ортогональностью.

$$x \perp_{16} y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in D) \vee \\ \vee (x \in D \wedge y \in C) \vee x = 0 \vee y = 0.$$

Предположим, что ортогональность $\perp_{16}$ не является максимальной, а значит, в силу определения максимальной ортогональности, $\perp_{16}$ можно расширить. По построению мы можем добавить пару, у которой или первая координата из A , а вторая из C , или первая координата из B , а вторая из D , или первая координата из A , а вторая из D , или первая координата из B , а вторая из C .

Рассмотрим случай, когда первая координата из A , а вторая из C . Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Пусть ортогональность $\perp$ такова, что

$$(x \perp_{16} y) \vee (x = a_1 \wedge y = a_4) \Rightarrow x \perp y, \quad (4)$$

тогда, в силу (A4), из того, что $a_1 \perp a_4$, следует $a_1 \perp a_8$, где $a_8 = a_4 + a_4 \in C$. Таким образом, $a_1 \perp C$. Так как подгруппа A циклическая и каждый её ненулевой элемент является её образующим, то

$$A \perp C. \quad (5)$$

Из (4) следует, что

$$A \perp B \wedge C \perp D. \quad (6)$$

Объединив условия (5) и (6), получим $A \perp B \wedge A \perp C \wedge C \perp D$.

Воспользовавшись (A4), имеем $A \perp B \oplus C$, где $B \oplus C = G$. Таким образом, из того, что $A \subset G$, следует $A \perp A$, а значит, $a_1 \perp a_1 \wedge a_2 \perp a_2$, что противоречит антирефлексивности ортогональности.

Таким образом, отношение $\perp$ не является ортогональностью.

Аналогичным образом можно показать, что ортогональности $\perp_{25}$ и $\perp_{34}$ также являются максимальными. □

Замечание 7. Если пары подгрупп, соответствующие ортогональностям, имеют общие элементы, то их объединение не является ортогональностью.

Так, например, объединив $\perp_1$ и $\perp_2$, получим

$$x \perp_{12} y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in C \wedge y \in A) \vee x = 0 \vee y = 0. \quad (7)$$

Покажем, что отношение $\perp_{12}$ не является ортогональностью. Из определения $\perp_{12}$, в частности, вытекает, что $a_1 \perp_{12} a_3 \wedge a_1 \perp_{12} a_4$. В силу (A4) $a_1 \perp_{12} a_3 + a_4$, то есть $a_1 \perp_{12} a_7$, где $a_7 \in D$, что противоречит (7).

Нетрудно показать, что всякая нетривиальная ортогональность в $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ может быть получена как объединение элементарных ортогональностей.

Таким образом, в рассматриваемой нами группе $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ существует **9** нетривиальных ортогональностей, **6** из которых являются элементарными, а **3** другие – это всевозможные их объединения, являющиеся максимальными ортогональностями.

Перед тем как перейти к исследованию произвольной группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, рассмотрим группу $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$.

Пример 8. Пусть $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$.

$$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{24}\}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0), & a_1 &= (0, 1), & a_2 &= (0, 2), & a_3 &= (0, 3), & a_4 &= (0, 4), \\ a_5 &= (1, 0), & a_6 &= (1, 1), & a_7 &= (1, 2), & a_8 &= (1, 3), & a_9 &= (1, 4), \\ a_{10} &= (2, 0), & a_{11} &= (2, 1), & a_{12} &= (2, 2), & a_{13} &= (2, 3), & a_{14} &= (2, 4), \\ a_{15} &= (3, 0), & a_{16} &= (3, 1), & a_{17} &= (3, 2), & a_{18} &= (3, 3), & a_{19} &= (3, 4), \\ a_{20} &= (4, 0), & a_{21} &= (4, 1), & a_{22} &= (4, 2), & a_{23} &= (4, 3), & a_{24} &= (4, 4). \end{aligned}$$

Так как порядок группы $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ равен 25, то порядок любой её нетривиальной подгруппы равен 5.

Выпишем эти подгруппы:

$$\begin{aligned} A &= \{0, a_1, a_2, a_3, a_4\}, \\ B &= \{0, a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}\}, \\ C &= \{0, a_6, a_{12}, a_{18}, a_{24}\}, \\ D &= \{0, a_7, a_{14}, a_{16}, a_{23}\}, \\ E &= \{0, a_8, a_{11}, a_{19}, a_{22}\}, \\ F &= \{0, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}\}. \end{aligned}$$

С помощью (2) построим **15** элементарных ортогональностей, которые запишем в виде пар соответствующих им подгрупп:

- 1) $\perp_1: (A, B)$ $\perp_2: (A, C)$ $\perp_3: (A, D)$ $\perp_4: (A, E)$ $\perp_5: (A, F)$
- 2) $\perp_6: (B, C)$ $\perp_7: (B, D)$ $\perp_8: (B, E)$ $\perp_9: (B, F)$
- 3) $\perp_{10}: (C, D)$ $\perp_{11}: (C, E)$ $\perp_{12}: (C, F)$
- 4) $\perp_{13}: (D, E)$ $\perp_{14}: (D, F)$
- 5) $\perp_{15}: (E, F)$

Здесь в первой строке указаны пары, содержащие в качестве первой компоненты подгруппу *A*, во второй – подгруппу *B* и так далее, пока не останется единственная пара (E, F) .

Рассмотрим ортогональности, являющиеся объединениями **двух** элементарных ортогональностей, удовлетворяющих (3).

Каждую из ортогональностей первой строки можно объединить с шестью другими ортогональностями; каждую ортогональность второй строки можно объединить с тремя из оставшихся ортогональностей; ортогональности третьей строки объединяются с ортогональностями последующих строк единственным образом; ортогональности четвертой и пятой строчек не могут быть объединены, поскольку имеют общие элементы. Запишем полученные ортогональности в следующую таблицу.

$\perp_{1,10}$	$\perp_{1,11}$	$\perp_{1,12}$	$\perp_{1,13}$	$\perp_{1,14}$	$\perp_{1,15}$	$\perp_{6,13}$	$\perp_{6,14}$	$\perp_{6,15}$	$\perp_{10,15}$
$\perp_{2,7}$	$\perp_{2,8}$	$\perp_{2,9}$	$\perp_{2,13}$	$\perp_{2,14}$	$\perp_{2,15}$	$\perp_{7,11}$	$\perp_{7,12}$	$\perp_{7,15}$	$\perp_{11,14}$
$\perp_{3,6}$	$\perp_{3,8}$	$\perp_{3,9}$	$\perp_{3,11}$	$\perp_{3,12}$	$\perp_{3,15}$	$\perp_{8,10}$	$\perp_{8,12}$	$\perp_{8,14}$	$\perp_{12,13}$
$\perp_{4,6}$	$\perp_{4,7}$	$\perp_{4,9}$	$\perp_{4,10}$	$\perp_{4,12}$	$\perp_{4,14}$	$\perp_{9,10}$	$\perp_{9,11}$	$\perp_{9,13}$	
$\perp_{5,6}$	$\perp_{5,7}$	$\perp_{5,8}$	$\perp_{5,10}$	$\perp_{5,11}$	$\perp_{5,13}$				

Таким образом, при объединении элементарных ортогональностей в пары возникает **45** более сложных ортогональностей. Однако все они не являются максимальными.

Объединим ортогональности в **тройки**. Для наглядности запишем их в виде соответствующих объединений пар подгрупп.

$(A, B) \cup (C, D) \cup (E, F)$	$(A, C) \cup (B, D) \cup (E, F)$	$(A, D) \cup (B, C) \cup (E, F)$
$(A, B) \cup (C, E) \cup (D, F)$	$(A, C) \cup (B, E) \cup (D, F)$	$(A, D) \cup (B, E) \cup (C, F)$
$(A, B) \cup (C, F) \cup (D, E)$	$(A, C) \cup (B, F) \cup (D, E)$	$(A, D) \cup (B, F) \cup (C, E)$
$(A, E) \cup (B, C) \cup (D, F)$	$(A, F) \cup (B, C) \cup (D, E)$	
$(A, E) \cup (B, D) \cup (C, F)$	$(A, F) \cup (B, D) \cup (C, E)$	
$(A, E) \cup (B, F) \cup (C, D)$	$(A, F) \cup (B, E) \cup (C, D)$	

Аналогично предложению 6 показывается, что все эти **15** ортогональностей максимальны. При объединении элементарных ортогональностей по четыре возникающие отношения уже не являются ортогональностями, а значит, группа $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ имеет ровно **75** нетривиальных ортогональностей.

Обобщим полученные результаты. Рассмотрим произвольную группу $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где $p \geq 3, p$ – простое число:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p &= \{0, 1, 2, \dots, p-1\}, \\ \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p &= \{0, a_1, a_2, \dots, a_{p^2-1}\}.\end{aligned}$$

Порядок любой нетривиальной подгруппы группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ равен p . Так как каждая нетривиальная подгруппа группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ циклическая и содержит $p-1$ ненулевых элементов (каждый из которых является её образующим), то количество её подгрупп равно числу

$$\frac{p^2-1}{p-1} = p+1.$$

Таким образом, можно построить C_{p+1}^2 элементарных ортогональностей:

p ортогональностей, соответствующих парам (A, X) , где X – произвольная нетривиальная подгруппа, $X \neq A$;

$(p-1)$ ортогональностей, соответствующих парам (B, X) , где X – произвольная нетривиальная подгруппа, $X \neq A, B$;

...

одну ортогональность, соответствующую паре двух последних подгрупп.

Теорема 9. Число s всевозможных нетривиальных ортогональностей прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$, вычисляется по формуле

$$s = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{p-(2i-1)}^2}{(i+1)!}.$$

Доказательство. Число элементарных ортогональностей $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ равно C_{p+1}^2 . Объединим элементарные ортогональности в пары так, чтобы полученные отношения снова были ортогональностями. Выберем из C_{p+1}^2 пару ортогональностей, удовлетворяющую (3). Первую ортогональность можно выбрать C_{p+1}^2 способами, вторую – C_{p-1}^2 способами, исключив ортогональности, которые соответствуют парам подгрупп, содержащих в качестве хотя бы одной из компонент подгруппы из первой ортогональности. Так как $(X, Y) \cup (S, T) = (S, T) \cup (X, Y)$, то формула для подсчёта ортогональностей, являющихся объединениями двух элементарных, имеет следующий вид:

$$\frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2}{2!}.$$

С помощью аналогичных рассуждений можно получить формулу для подсчёта числа ортогональностей, соответствующих объединению максимального возможного числа элементарных ортогональностей в тройки:

$$\frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot C_{p-3}^2}{3!}.$$

Продолжая этот процесс, получим в конце формулу для вычисления числа ортогональностей, соответствующих объединению максимально возможного числа элементарных ортогональностей с соблюдением условия (3). При добавлении к таким ортогональностям новой элементарной ортогональности условие (3) уже не будет выполняться и полученное отношение не будет ортогональностью. Формула имеет вид

$$\frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot C_{p-3}^2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!}.$$

Таким образом, последняя формула соответствует числу максимальных ортогональностей группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где $p \geq 3$.

Просуммировав полученные результаты, имеем формулу для вычисления числа всевозможных нетривиальных ортогональностей прямой суммы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$:

$$\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{p-(2i-1)}^2}{(i+1)!}.$$

Для наглядности занесём результаты, полученные для всех исследуемых нами групп, в таблицу.

Группа	Число элементарных ортогональностей	Число максимальных ортогональностей	Число всевозможных нетривиальных ортогональностей
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	3	3	3
$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	6	3	9
$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$	15	15	75
$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$	C_{p+1}^2	$\frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot C_{p-3}^2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!}$	$\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{p-(2i-1)}^2}{(i+1)!}$

Таким образом, нам удалось полностью описать ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ и найти их число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 13.
2. Haukkanen P., Merikoski J.K., Tossavainen T. Axiomatizing perpendicularity and parallelism // Journal for Geometry and Graphics. 2011. V. 15. No. 2. P. 129–139.
3. Davis G. Rings with orthogonality relation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. V. 4. P. 163–178.
4. Векслер А.И. Linear spaces with disjoint elements and their conversion into vector lattices // Учёные записки Ленинградского государственного педагогического института имени А.И. Герцена. 1967. Вып. 328. С. 19–43.

Статья поступила 05.05.2015 г.

Fukson S. L. ORTHOGONALITIES IN $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$

DOI 10.17223/19988621/36/6

More and more geometric concepts penetrate into the space of the study of algebra. On March 2013, the International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences carried an article titled “Perpendicularity in an Abelian Group” written by Haukkanen et al. The main objective of that article was to introduce the concept of a binary relation of orthogonality in an arbitrary Abelian group. The ratio of orthogonality in different algebraic structures has already aroused the interest of mathematicians before. For example, orthogonality in the rings was studied by Davis in the paper “Rings with orthogonality relation” (Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 4, 1971), Veksler considers orthogonality in lattices and lattice-ordered groups in “Linear spaces with disjoint elements and their conversion into vector lattices” (Leningrad. Gos. Ped. Inst. Uchen. Zap., vol. 328, pp. 19–43, 1967). The purpose of the present paper is to get some results about orthogonalities for specific Abelian groups. We have investigated in detail the orthogonalities of a direct sum of cyclic groups $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. On the way to answer how many and which orthogonality this group has, we consider special cases, namely, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ and only after that we are able to summarize the results to an arbitrary group $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Haukkanen and others introduced the concept of orthogonality in an Abelian group with the help of axioms which are absolutely natural if we give a geometric interpretation to them.

Let $G = (G, +)$ be an additive Abelian Group. Let $\perp$ be a binary relation in G satisfying:

- (A1) $\forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b$,
- (A2) $\forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a$,
- (A3) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a$,
- (A4) $\forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c)$,
- (A5) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b$.

We call $\perp$ an *orthogonality* in G .

Definition. We call $\perp$ *maximal orthogonality* in G if it satisfies the axioms (A1) – (A5) and after adding thereto any of the other pair, the ratio obtained is not orthogonality in G .

We explore orthogonalities of groups $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ and consider the general case of a direct sum $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. With the help of our research, we were able to find the number of elementary, maximal, and all possible orthogonalities in the studied groups.

We present our results in the following table.

Group	The number of elementary orthogonalities	The number of maximal orthogonalities	The number of all possible orthogonalities
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	3	3	3
$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	6	3	9
$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$	15	15	75
$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$	C_{p+1}^2	$\frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot C_{p-3}^2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!}$	$\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{C_{p+1}^2 \cdot C_{p-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{p-(2i-1)}^2}{(i+1)!}$

Keywords: Orthogonality, group, Abelian group, direct sum, cyclic group

FUKSON Sofia Leonidovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

REFERENCES

1. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2013, vol. 13.
2. Haukkanen P., Merikoski J.K., Tossavainen T. Axiomatizing perpendicularity and parallelism. *Journal for Geometry and Graphics*, 2011, vol. 15, no. 2, pp. 129–139.
3. Davis G. Rings with orthogonality relation. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1971, vol. 4, pp. 163–178.
4. Veksler A.I. Linear spaces with disjoint elements and their conversion into vector lattices. *Uchenye zapiski Leningradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta imeni A.I. Gertsena*, 1967, no. 328, pp. 19–43. (in Russian)

МЕХАНИКА

УДК 536.46

DOI 10.17223/19988621/36/7

А.А. Дементьев, А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

**О ВЛИЯНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ГОРЮЧЕГО
В ГИБРИДНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ НА СКОРОСТЬ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ГОРЕНИЯ¹**

Представлены результаты расчетно-теоретического исследования зависимости скорости распространения фронта горения в гибридной газовзвеси от концентрации газообразного горючего в смеси, массовой концентрации реагирующих с кислородом воздуха частиц, их размеров. В математической модели учитывается тепловое расширение среды и связанное с ним движение фаз. Получено, что в случае малых начальных концентраций горючего в газе присутствие в газовой смеси реагирующих частиц увеличивает скорость распространения фронта горения. При значениях концентрации горючего в газе, близких к стехиометрической, частицы тормозят пламя.

Ключевые слова: *гибридная газовзвесь, реагирующие частицы, ламинарное пламя, скорость горения.*

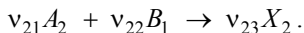
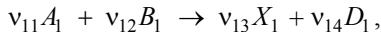
Газовзвеси порошков различных веществ встречаются в природе, технике, используются в различных технологиях. Порошки металлов, их окислов используются в современных порошковых технологиях. В процессах сушки, десублимации, дробления, перемалывания также получают газовзвеси порошков. В процессах добычи и переработки полезных ископаемых образуются газовзвеси реагирующих частиц. Особую опасность представляют газовзвеси угольной пыли в метановоздушной смеси, которые образуются при добыче угля шахтным методом [1, 2]. При возникновении очага возгорания в метановоздушной смеси в выработке угольной шахты распространяющийся фронт пламени возмущает атмосферу перед собой. Мелкодисперсные частицы угля поднимаются со стен выработок, смешиваются с газом и создают углеметановоздушную смесь. Изучение закономерностей распространения фронта горения в таких смесях является важной с позиций пожаро- и взрывоподавления и пожаробезопасности.

Физико-математическая постановка задачи

Рассмотрим процесс горения газовой смеси горючего и окислителя, в которой равномерно распределены твердые горючие частицы. Считаем, что реакция протекает гомогенно в газовой фазе и гетерогенно на поверхности частиц. Окисли-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-03-02578 а.

тель в газовой фазе расходуется в реакции с горючим газом и с частицами с образованием газообразных продуктов. Одновременно протекают две реакции:



Для записи математической модели рассматриваемого процесса введем следующие предположения: рассматривается газовзвесь реагирующих частиц в горючем газе с окислителем, занимающая полубесконечную область $0 \leq x < \infty$. В начальный момент времени газ и частицы покоятся, частицы равномерно распределены во взвеси. В координате $x = 0$ расположена непроницаемая горячая стенка с температурой равной адиабатической температуре сгорания газа в изобарических условиях (зажигание у «закрытого торца» [3]). Параметры состояния газа удовлетворяют уравнению состояния идеального газа. Учитывается перенос тепла в газовой смеси за счет теплового расширения смеси (конвективный теплоперенос) и теплопроводности. Теплообмен между частицами и газом определяется по закону Ньютона для теплоотдачи. Скорость тепловыделения в химических реакциях на поверхности частиц и в газе зависит от температуры по закону Аррениуса со вторым порядком реакции в газовой фазе и первым порядком для гетерогенной реакции на частицах. Константа скорости химической реакции определяется по методу сложения сопротивлений [4]. Предполагаем, что коэффициенты диффузии и теплопроводности постоянны и не зависят от температуры. Окислитель в реакции расходуется на две конкурирующие реакции – гомогенную в газе и гетерогенную на поверхности частиц; в балансе массы газа учитывается расход окислителя и массоприход газообразных продуктов от реакции на частицах. Учитывается изменение размера частиц твердого вещества при их сгорании. Предполагается, что горение протекает в ламинарном режиме в условиях постоянного давления. Применимость подобного подхода для описания распространения медленного фронта пламени с учетом теплового расширения газа обоснована в [5–7]. Энергия частиц изменяется за счет химической реакции на поверхности и теплообмена с газовой фазой. На частицы со стороны газа действует сила сопротивления, описываемая законом Стокса. Обратным влиянием движения частиц на движение газа пренебрегаем из-за малой их объемной концентрации. Форма частиц шаровая, между собой они не сталкиваются.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процессы в гибридной газовзвеси с учетом сделанных допущений, в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_g}{\partial \tau} + \bar{u}_g \frac{\partial \theta_g}{\partial \xi} = \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \xi^2} + \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp\left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g}\right) - \\ - \frac{B}{\chi} \frac{\bar{r}_k}{\bar{\rho}_g} \bar{n}(t) (\theta_g - \theta_k) - \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{B}{\chi} \left(\theta_g - C \theta_g + \frac{1 - C}{\beta} \right) A; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} + \bar{u}_g \frac{\partial C_1}{\partial \xi} = \frac{Le}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 C_1}{\partial \xi^2} - \gamma \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp\left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g}\right) - \frac{B}{\chi} \left(\frac{\nu_{23} M_{23}}{\nu_{22} M_{22}} - 1 \right) \frac{C_1}{\bar{\rho}_g} A; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial \tau} + \bar{u}_g \frac{\partial C_2}{\partial \xi} = \frac{\text{Le}}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 C_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\bar{\rho}_g Y_{2,0}^*} \frac{B}{\chi} A \left[1 + C_2 Y_{2,0}^* \left(\frac{\nu_{23} M_{23}}{\nu_{22} M_{22}} - 1 \right) \right] - \\ - \left(\frac{\nu_{12} M_{12}}{\nu_{11} M_{11}} \right) \left(\frac{Y_{1,0}^*}{Y_{2,0}^*} \right) \gamma \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp \left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{u}_g}{\partial \xi} = \frac{B}{\chi} A \left(\frac{\nu_{23} M_{23}}{\nu_{22} M_{22}} - 1 \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{u}_k}{\partial \xi} = - \frac{\nu_{21} M_{21}}{\nu_{22} M_{22}} \frac{B}{\chi Z_2} \frac{u_k}{\rho_k} A; \quad (5)$$

$$\bar{\rho}_g = (1 - \beta / \gamma) / (1 + \beta \theta_g); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} + \bar{u}_k \frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{(\theta_g - \theta_k)}{\bar{r}_k \chi} + \frac{\delta}{\chi Z_1} \left(\frac{Y_{2,0}^*}{Y_{1,0}^*} \right) \frac{C_2 \bar{\rho}_g \bar{J}}{\bar{r}_k^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \tau} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \xi} = \frac{3}{2} \frac{\text{Pr} C}{\text{Nu} \chi} \frac{(\bar{u}_g - \bar{u}_k)}{\bar{r}_k} + \frac{\nu_{21} M_{21}}{\nu_{22} M_{22}} \frac{B}{\chi Z_2} \frac{\bar{u}_k}{\bar{\rho}_k} A; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{n} \bar{u}_k}{\partial \xi} = 0; \quad (9)$$

$$\bar{r}_k = (\bar{\rho}_k / \bar{n})^{\frac{1}{3}}, \quad (10)$$

$$A = \mu \text{Le} \frac{\text{Nu}_D}{\text{Nu}} Y_{2,0}^* \bar{J} C_2 \bar{r}_k^2 \bar{\rho}_g \bar{n}, \quad \bar{J} = \frac{\exp(E_{kg} \theta_k / (1 + \beta \theta_k))}{\bar{r}_k \mu \exp(E_{kg} \theta_k / (1 + \beta \theta_k)) + 1}, \quad E_{kg} = \frac{E_k}{E_g}.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \theta_g(0, \tau) = 0, \quad \partial \theta_g(\infty, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \partial \theta_k(0, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \partial \bar{\rho}_k(0, \tau) / \partial \xi = 0, \\ \partial \bar{n}(0, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \partial C_1(0, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \partial C_2(0, \tau) / \partial \xi = 0, \\ \partial C_1(\infty, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \partial C_2(\infty, \tau) / \partial \xi = 0, \quad \bar{u}_g(0, \tau) = 0, \quad \bar{u}_k(0, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \theta_g(\xi, 0) = -1/\gamma, \quad \theta_k(\xi, 0) = -1/\gamma, \quad C_1(\xi, 0) = C_{1,0}, \quad C_2(\xi, 0) = 1, \\ \bar{u}_g(\xi, 0) = 0, \quad \bar{u}_k(\xi, 0) = 0, \quad \bar{\rho}_g(\xi, 0) = 1, \quad \bar{\rho}_k(\xi, 0) = 1, \quad \bar{n}(\xi, 0) = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

При обезразмеривании использованы следующие масштабные величины:

$$\begin{aligned} x_* = \sqrt{\lambda t_* / (c_g \rho_{g,0})} - \text{масштаб координаты}, \quad t_* = \frac{RT_a^2 c_g}{QE_g \rho_{g,0} Y_{1,0}^* Y_{2,0}^* k_{0,g} \exp(-E_g / RT_a)} \\ - \text{масштаб времени}, \quad V_* = x_* / t_* - \text{скорости}, \quad \rho_{*,g} = \rho_{g,0} - \text{плотности газа}, \quad \rho_{*,k} = \rho_{k,0} \\ - \text{приведенная плотность частиц}, \quad T_* = RT_a^2 / E_g - \text{температуры}, \quad Y_{1,0}^* = \rho_{1,0} / \rho_{g,0} - \end{aligned}$$

концентрации горючего, $Y_{2,0}^* = \rho_{2,0} / \rho_{g,0}$ – концентрации окислителя. Безразмерные переменные: $\tau = t / t_*$ – время; $\xi = x / x_*$ – координата; $\theta_{g(k)} = (E / RT_a^2)(T_{g(k)} - T_a)$ – температура газа (частиц); $C_1 = Y_1 / Y_{1,0}$, $C_2 = Y_2 / Y_{2,0}$ – относительные концентрации горючего и окислителя в газовой фазе, где $Y_{1,0} = \rho_1 / \rho_{g,0}$, $Y_{2,0} = \rho_2 / \rho_{g,0}$, $Y_1 = \rho_1 / \rho_g$, $Y_2 = \rho_2 / \rho_g$; $\bar{\rho}_g = \rho_g / \rho_{g,0}$ – плотность газа; $\bar{\rho}_k = \rho_k / \rho_{k,0}$ – приведенная плотность частиц; $\bar{u}_g = u_g / V_*$ – скорость газа; $\bar{u}_k = u_k / V_*$ – скорость частиц; $\bar{n}$ – число частиц в единице объема; $\bar{r}_k$ – радиус частицы.

Выбранным масштабам соответствуют следующие безразмерные параметры подобия: $\delta = q \rho_{k,0} r_{k,0} (E_g / RT_a^2) k_{0,k} \exp(-E_k / RT_a) Y_{1,0} / (\text{Nu}_T \lambda)$ – параметр, характеризующий интенсивность теплообмена частицы (отношение скорости тепловыделения в химической реакции к скорости теплообмена), $\mu = k_{0,k} \exp(-E_k / RT_k) / (\text{Nu}_D D)$ – параметр, характеризующий интенсивность массообмена частицы (отношение скоростей химической реакции и массообмена), $\text{Pr} = \mu_g c_g / \lambda$ – число Прандтля, $\text{Nu} = \alpha r_{k,0} / \lambda$ – число Нуссельта, $\text{Nu}_D = \beta_m r_{k,0} / D$ – диффузионное число Нуссельта, определяет соотношение между массообменом и диффузией, $\text{Le} = D c_g \rho_{g,0} / \lambda$ – число Льюиса, $C = c_k / c_g$ – отношение теплоемкостей, $B = (4/3) \pi r_{k,0}^3 c_k \rho_k^0 n_0 / (c_g \rho_{g,0})$ – начальная массовая концентрация частиц, $\chi = r_{k,0}^2 c_k \rho_k^0 / (3 \text{Nu} \lambda t_*)$ – начальный размер частиц, $\gamma = c_g RT_a^2 / (Q E \rho_{g,0} Y_{1,0})$ – параметр Тодеса, $\beta = RT_a / E$ – параметр Аррениуса, характеризует энергию активации реакции, $Z_1 = \rho_k^0 / \rho_{g,0}$ – отношение плотности конденсированной фазы к начальной плотности газа, $Z_2 = \rho_{k,0} / \rho_{g,0}$ – отношение начальной приведенной плотности частиц к начальной плотности газа, $E_{kg} = E_k / E_g$ – отношение энергий активации горючего в конденсированной и газовой фазах. Принятые обозначения: t – время; x – координата; T – температура; ρ – плотность; ρ_k^0 – плотность вещества частиц; u_g – скорость газа; u_k – скорость частиц; c – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; D – коэффициент диффузии; μ – вязкость; α – коэффициент теплоотдачи; r – радиус частиц; n – количество частиц в единице объема; R – универсальная газовая постоянная; j – скорость гетерогенной химической реакции; Y – относительная концентрация; Q – тепловой эффект реакции в газовой фазе; q – тепловой эффект гетерогенной реакции на поверхности частиц; k – предэкспоненциальный множитель; E – энергия активации химической реакции; U_{fr} – скорость распространения фронта горения; β_m – коэффициент массоотдачи; τ_{fr} – сила, действующая на частицы со стороны газа; M_{ij}, ν_{ij} – молекулярные массы и стехиометрические коэффициенты в реакциях. Индексы: g – газ, k – частицы, * – масштаб, 0 – начальные условия, 1 – горючее, 2 – окислитель.

Система уравнений (1) – (10) с граничными и начальными условиями (11), (12) решалась численно. Уравнения (1) – (3) решались по неявной разностной схеме, конвективные слагаемые аппроксимировались разностями против потока. Значения температуры газа на новом временном слое использовались для нахождения плотности газа из уравнения (6). Затем из уравнения сохранения массы (4) определяли скорость газа. Уравнения (5), (7) – (9) решались по явной разностной схеме.

Расчеты проводились при значениях параметров: $\delta = 700$, $\mu = 0.25$, $\gamma = 0.1$, $\beta = 0.07$, $Le = 1$, $Nu = 1$, $v_1\mu_1 = 16$, $v_2\mu_2 = 64$, $Y_{1,0} = 0.05$, $Y_{2,0} = 0.2$, $Pr = 1$, $C = 1$, $Z_1 = 1000$. Параметры, характеризующие частицы, варьировались в интервале значений: $B = 0.005–0.1$, $\chi = 100–10000$, концентрация горючего $C_{1,0} = 0.6–1.0$.

На рис. 1 показаны распределения по пространству безразмерных значений параметров среды, построенные через промежутки времени, соответствующие перемещению фронта горения на расстояние $\Delta\xi = 3000$. Положение фронта горения определялось пространственной координатой ξ , в которой содержание горючего равнялось половине от входного значения $C_{1,0}$.

Как для относительно мелких частиц ($\chi = 100$, рис. 1), так и для относительно крупных, при данных параметрах газозвеси газ и частицы движутся вместе, с небольшим отличием скорости газа и частиц (рис. 1, *a, z, d*). При значении начальной концентрации газового горючего $C_{1,0} = 1$ реакция идет преимущественно в газовой фазе, и частицы в этой реакции практически не принимают участия. В случае же недостатка газофазного горючего, как показано на рис. 1, реакция на частицах оказывает влияние на процесс горения. В присутствии мелких частиц (рис. 1) реакция протекает активнее, чем в присутствии крупных. В случае мелких частиц окислитель расходуется полностью (рис. 1, *б*) в узком фронте реакции, что вызывает больший рост температуры (рис. 1, *a*) по сравнению со случаем крупных частиц, где окислитель, оставшийся от реакции в газовой фазе, продолжает медленно реагировать с частицами за фронтом. Этот эффект объясняется большей суммарной площадью поверхности мелких частиц дисперсной фазы.

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов установившейся скорости распространения фронта пламени. Видно, что наличие реагирующих частиц дисперсной фазы приводит к уменьшению скорости горения при больших значениях концентрации горючего в газовой фазе. Это происходит потому, что, нагреваясь, частицы понижают температуру во фронте пламени. Также они забирают часть окислителя из газовой фазы на реакцию. А так как тепловой эффект их сгорания меньше, чем реакции в газовой фазе, то это также приводит к уменьшению скорости горения. При уменьшении концентрации горючего наличие реагирующих частиц малых размеров приводит к увеличению скорости фронта горения, по сравнению со скоростью в газе без частиц. Это связано с увеличением общего теплового эффекта от реакций горения газового и дисперсного горючего. Для крупных частиц такого эффекта не наблюдается.

С ростом концентрации газообразного горючего при фиксированной массовой концентрации *k*-фазы, реакционные способности реагирующих частиц снижаются. Выгорание частиц уменьшается настолько, что можно рассматривать реагирующие частицы как инертные. Скорость распространения фронта пламени по сравнению с чистым газом уменьшается (рис. 2, *в* и 3).

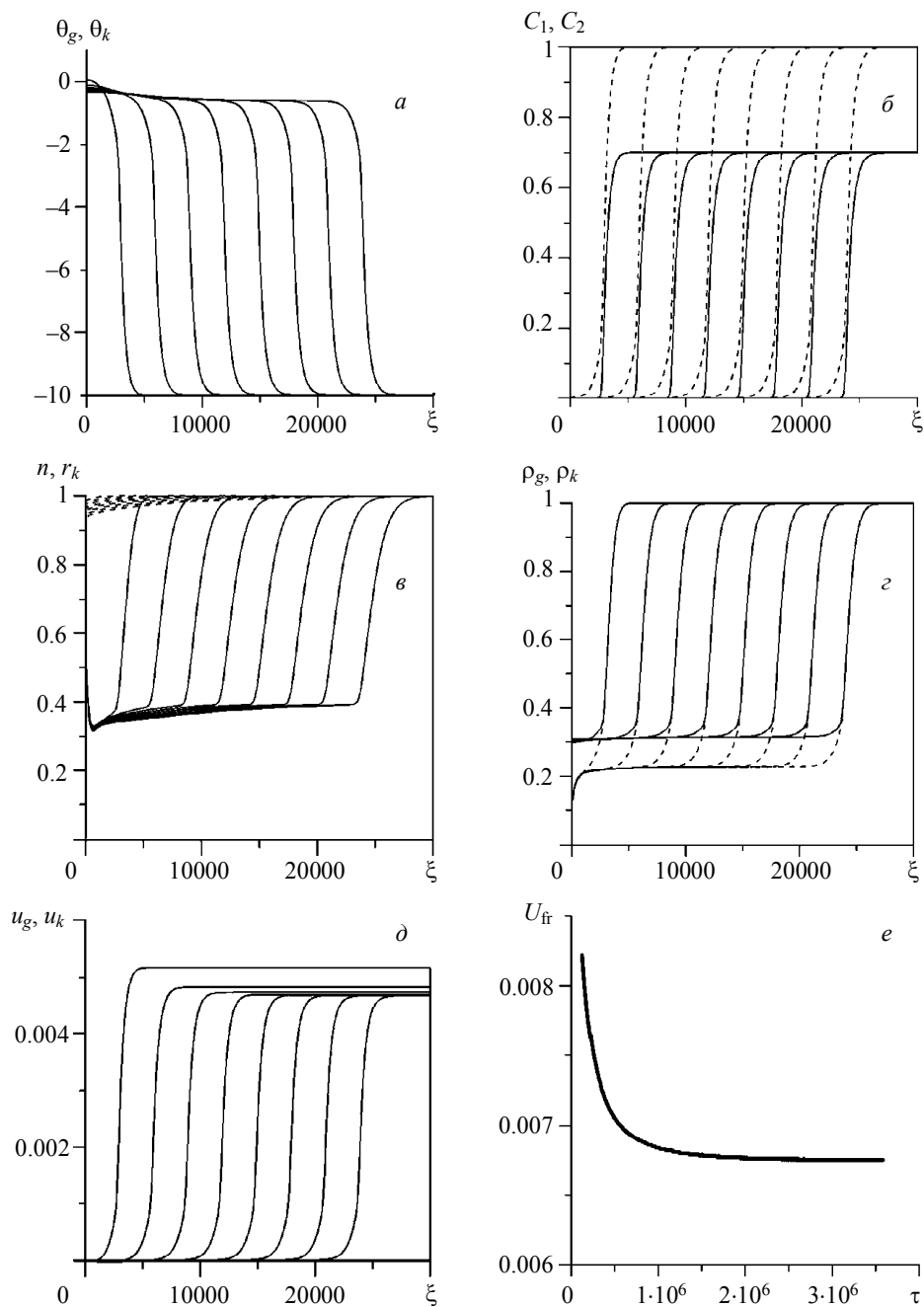


Рис. 1. Распределение безразмерных параметров газозвеси при $\chi = 100$, $B = 0.06$, $C_{1,0} = 0.7$. Температуры частиц и газа (*a*), концентрации горючего и окислителя (пунктирная линия) (*б*), относительного числа частиц в единице объема газа и радиуса частиц (*в*), плотности газа и приведенной плотности дисперсной фазы (пунктирная линия) (*г*), скорости движения газа и частиц (*д*), зависимость скорости распространения фронта пламени от безразмерного времени (*е*)

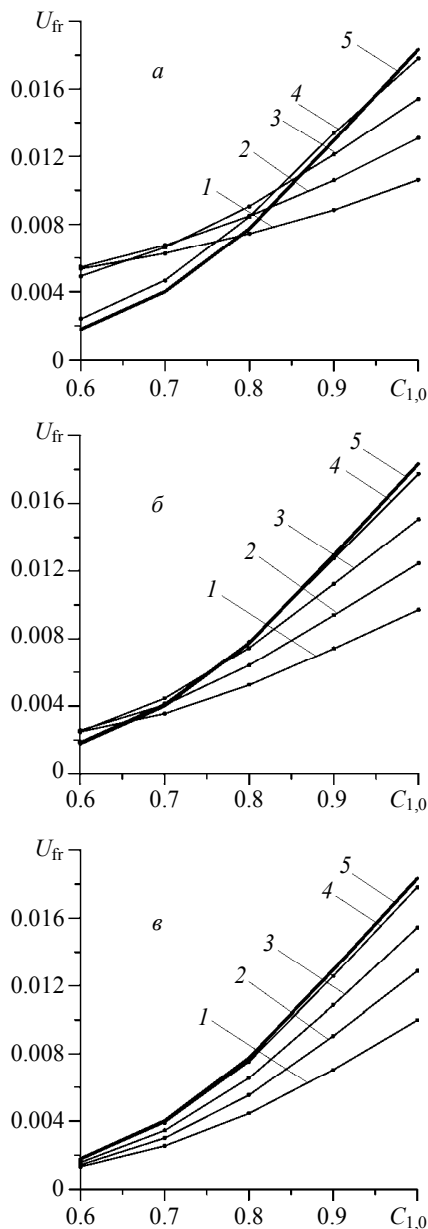


Рис. 2. Зависимости установившейся скорости фронта пламени U_{fr} от безразмерной начальной концентрации горючего в газовой фазе $C_{1,0}$, при различных значениях параметров дисперсной фазы (размеров частиц и их массовой концентрации): *a* – $\chi = 100$; *б* – $\chi = 1000$, *в* – $\chi = 10000$; кр. 1 – $B = 0,1$; кр. 2 – $B = 0,06$; кр. 3 – $B = 0,03$; кр. 4 – $B = 0,005$; кр. 5 – беспылевая газовая смесь

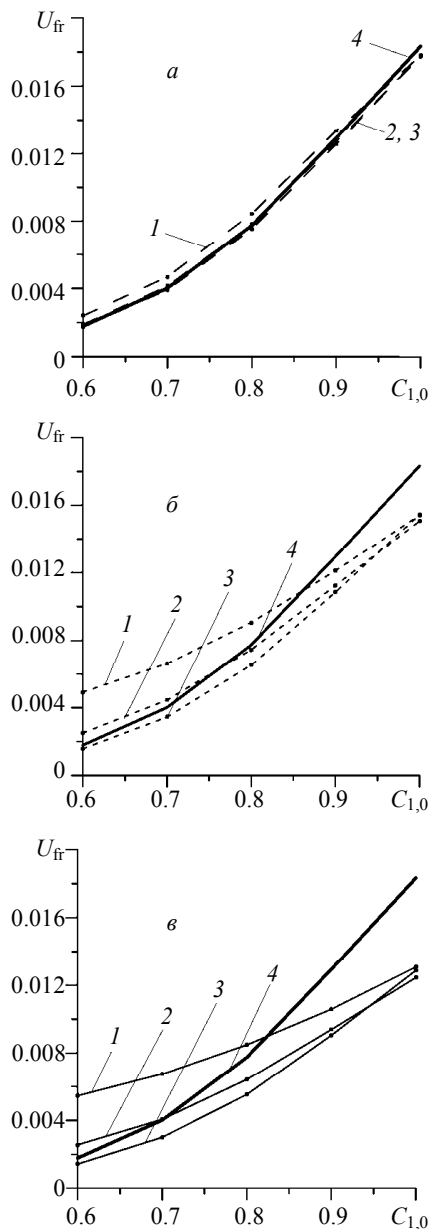


Рис. 3. Зависимости установившейся скорости фронта пламени от начальной концентрации горючего в газовой фазе $C_{1,0}$, при различных значениях параметров дисперсной фазы (размеров частиц и их массовой концентрации): *a* – $B = 0,005$; *б* – $B = 0,03$; *в* – $B = 0,06$; кр. 1 – $\chi = 100$; кр. 2 – $\chi = 1000$; кр. 3 – $\chi = 10000$; кр. 4 – незапыленная газовая смесь

Это может быть объяснено тем, что начинает преобладать реакция в газовой фазе. Для частиц малого размера ($\chi = 100$) при начальных значениях концентрации горючего $C_{1,0} < 0.8$ наблюдается некоторый прирост скорости горения, по сравнению с газом без частиц (рис. 3). Это происходит благодаря большой площади поверхности частиц малых размеров.

Выводы

Получены зависимости установившейся скорости фронта пламени от концентрации горючего в газовой фазе при различных значениях массовой концентрации и размерах реагирующих с окислителем частиц. Показано, что в случае малых начальных концентраций горючего в газе ($C_{1,0}$) присутствие в газовой смеси реагирующих частиц увеличивает скорость горения. При значениях концентрации горючего в газе, близкой к стехиометрической, частицы тормозят скорость распространения пламени. Это следует учитывать при проектировании автоматических систем огнепреграждения и пожаровзрывобезопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корольченко А.Я. Пожаровзрывоопасность промышленной пыли. М.: Химия, 1986. 216 с.
2. Таубкин С.И., Таубкин И.С. Пожаро- и взрывоопасность пылевидных материалов и технологических процессов их переработки. М.: Химия, 1976. 264 с.
3. Dement'ev A.A., Krainov A.Yu. Effect of inert particles on the rate of flame propagation in igniting it from a «closed end» and an «open end» // 7 ISFS: book of abstracts. 2011. URL: <http://www.kinetics.nsc.ru/kcp/7ISFS/CD/Theses/OP-28.pdf> (дата обращения 20.08.2012).
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 492 с.
5. Мержанов А.Г., Хайкин Б.И., Шкадинский К.Г. Установление стационарного распространения пламени при зажигании газа накалиной поверхностью // ПМТФ. 1969. № 5. С. 42–48.
6. Шкадинский К.Г., Барзыкин В.В. Закономерности зажигания газов накалиной поверхностью с учетом диффузии и гидродинамики // ФГВ. 1968. Т. 4. № 2. С. 176–181.
7. Дементьев А.А., Крайнов А.Ю. К вопросу о распространении ламинарного пламени в газе с инертной пылью // ФГВ. 2011. Т. 47. № 4. С. 70–75.

Статья поступила 11.06.2015 г.

Dement'ev A.A., Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. ON THE INFLUENCE OF THE FUEL CONCENTRATION IN A HYBRID GAS-SUSPENSION ON THE SPEED OF THE COMBUSTION FRONT PROPAGATION

DOI 10.17223/19988621/36/7

A physico-mathematical model of combustion of the hybrid gas suspension with allowance for the heat expansion of the gas mixture and the movement of the phases is presented. Distributions of medium parameters in the combustion front are presented. Results of the numerical study of the dependence of the combustion front velocity in the hybrid gas suspension on the concentration of the gas fuel in the mixture, size of the reacting particles, and the mass concentration of the particles. The presence of reacting particles of the dispersed phase decreases the combustion rate at large values of fuel concentration in the gas phase. This occurs due to the fact that heated particles decrease the temperature in the front of the flame. They also take a part of the oxidizer from the gas phase for the reaction. Since the thermal effect from their combustion is lower than that of the reaction in the gas phase, this also leads to a decrease in the combustion rate. With a decrease in the concentration of the fuel, the presence of small-size reacting particles leads to an increase in the combustion rate in comparison with the case of combustion in a gas mixture with-

out particles. It is explained by the increase in the general heat effect of combustion reactions of the gas and dispersible fuel.

Keywords: hybrid gas suspension, reactant, laminar flame, combustion rate

DEMENT'EV Aleksandr Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: daa024@ftf.tsu.ru

KRAINOV Alexey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

MOISEEVA Ksenia Mihailovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: moiseeva_km@t-sk.ru

REFERENCES

1. Korol'chenko A.Ya. *Pozharovzryvoopasnost' promyshlennoy pyli*. Moscow, Khimiya Publ., 1986. 216 p. (in Russian)
2. Taubkin S.I., Taubkin I.S. *Pozharo- i vzryvoopasnost' pylevidnykh materialov i tekhnologicheskikh protsessov ikh pererabotki*. Moscow, Khimiya Publ., 1976. 264 p. (in Russian)
3. Dementiev A.A., Krainov A.Yu. Effect of inert particles on the rate of flame propagation in igniting it from a «closed end» and an «open end». *7 ISFS: book of abstracts*, 2011. URL: <http://www.kinetics.nsc.ru/kcp/7ISFS/CD/Theses/OP-28.pdf> (data obrashcheniya 20.08.2012).
4. Frank-Kamenetskiy D.A. *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 492 p. (in Russian)
5. Merzhanov A.G., Khaikin B.I., Shkadinskii K.G. Establishment of steady flame propagation when igniting a gas by a heated surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1969, no. 5(10), pp. 725–730.
6. Shkadinskii K.G., Barzykin V.V. Hot-surface ignition of gases with allowance for diffusion and hydrodynamics. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1968, no. 2 (4), pp. 100–104.
7. Dement'ev, A.A., Krainov, A. Yu. On the problem of laminar flame propagation in a gas with an inert dust. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 436–441.

УДК 531.58
DOI 10.17223/19988621/36/8

Б.Т. Добрица, Д.Б. Добрица

РАБОТОСПОСОБНОСТЬ ЗАЩИТНЫХ ЭКРАНОВ С ДВОЙНОЙ СЕТКОЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЧАСТИЦ

Рассматриваются результаты экспериментального и теоретического исследования работоспособности защитных экранов с двойной сеткой при воздействии высокоскоростных частиц. Экспериментальные работы с использованием пороховых и легкогазовых баллистических установок проводились для испытания нескольких вариантов защитных экранов, предназначенных для защиты топливного бака космического корабля от воздействия высокоскоростных метеорно-техногенных частиц. Рассмотрены баллистические предельные зависимости для сеточных экранов, показавших в результате существенно большую эффективность по сравнению с эквивалентным (по массе) щитом Уиппла (экраном с двойной стенкой).

Ключевые слова: *космический аппарат, метеорно-техногенные тела, легкогазовая установка, щит Уиппла, сеточный экран, баллистическая предельная зависимость, высокоскоростное соударение.*

Одним из факторов, определяющих надежность функционирования космических аппаратов (КА) и их узлов в условиях космического полета, является защита от воздействия метеорно-техногенных тел (МТТ), которые ударяются о внешние элементы конструкции КА со скоростями до нескольких десятков километров в секунду. Техногенные и микрометеорные тела представляют собой реальную и весьма серьезную угрозу для безопасности и функциональных возможностей КА.

Необходимость защиты элементов КА, критичных к воздействию МТТ, и параметры такой защиты определяются следующими факторами:

- назначение КА;
- особенности конструкции КА, его целевой аппаратуры и устанавливаемых агрегатов и систем;
- параметры орбиты КА и траектории перелета;
- заданный срок активного существования КА;
- особенности метеорно-техногенной обстановки в околоспутниковой зоне в процессе функционирования КА.

При решении задачи защиты внешних элементов КА от воздействия МТТ необходимо учитывать особенности конструкции внешних элементов создаваемого аппарата, состояние их после воздействия и признаки механического повреждения, ухудшающие эксплуатационные характеристики элементов.

В работе [1] обобщаются результаты исследований НАСА сеточных экранов с двойным бампером, как одна из концепций защитных экранов низкого веса. Как показали экспериментальные исследования, экраны такой конструкции продемонстрировали экономию массы для диапазона скоростей легкогазовых установок (ЛГУ) по сравнению с обычным щитом Уиппла, представляющим собой две пластины из алюминиевого листа, внешняя из которых по отношению к налетающей частице служит защитным экраном, приблизительно 30–50 % при нормальном уг-

ле воздействия (при угле наклона воздействия 45° достигалась еще большая экономия массы экрана, приблизительно 70 %, при сохранении его работоспособности).

Данный тип защитного экрана с двойным бампером (MDB) был сконструирован путем добавления сетки с мелким просветом перед стандартным щитом Уиппла и вставки слоя ткани высокой прочности между вторым бампером и задней стенкой. По результатам испытаний были разработаны формулы, которые позволяют инженеру-конструктору определить размеры элементов экрана применительно к космическому кораблю.

В работе [1, с. 178] приведены баллистические предельные уравнения, определяющие работоспособность щита MDB. Уравнения даются в форме, которая связывает критический диаметр частицы d со скоростью воздействия v , углом воздействия, плотностью частицы и параметрами мишени. Воздействия частицы большей критического размера приводят к пробоем защиты (по факту это перфорация или отделение осколка на задней стенке щита), в то время как частицы меньшего размера не приводят к пробоем.

Подобные уравнения задают работоспособность защитной конструкции с учетом полного спектра условий воздействия, ожидаемых на орбите, и используются в исследованиях вероятности пробоя при воздействии МТТ с помощью специальных программ.

Для $V \geq 6.4/(\cos \theta)^{1/3}$:

$$d_c = 0.6(t_w \rho_w)^{1/3} \rho_p^{-1/3} V^{-1/3} (\cos \theta)^{-1/3} S^{1/2} (\sigma/40)^{1/6}. \quad (1)$$

Для $2.8/(\cos \theta)^{0.5} < V < 6.4/(\cos \theta)^{1/3}$:

$$\begin{aligned} d_c = & 1.11 \rho_p^{-0.5} \left[t_w (\sigma/40)^{0.5} + 0.37(m_b + m_l) \right] (\cos \theta)^{-4/3} \times \\ & \times \left[\left(6.4/(\cos \theta)^{1/3} - V \right) / \left(6.4/(\cos \theta)^{1/3} - 2.8/(\cos \theta)^{0.5} \right) \right] + \\ & + 0.323(t_w \rho_w)^{1/3} \rho_p^{-1/3} (\cos \theta)^{-2/9} S^{1/2} (\sigma/40)^{1/6} \times \\ & \times \left[\left(V - 2.8/(\cos \theta)^{0.5} \right) / \left(6.4/(\cos \theta)^{1/3} - 2.8/(\cos \theta)^{0.5} \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Для $V < 2.8/(\cos \theta)^{0.5}$:

$$d_c = 2.2 \left[t_w (\sigma/40)^{0.5} + 0.37(m_b + m_l) \right] / \left[(\cos \theta)^{5/3} \rho_p^{0.5} V^{2/3} \right]. \quad (3)$$

Здесь:

- d_c – диаметр снаряда, вызывающий пробой защищаемой стенки (см),
- ρ – плотность (г/см³),
- m – поверхностная плотность (г/см²),
- S – полный интервал между внешним бампером и задней стенкой (см),
- σ – допустимая прочность на разрыв задней стенки (ksi),
- t – толщина (см),
- θ – угол воздействия, измеренный от поверхности, нормальной (градус),
- V – скорость снаряда (км/с);
- индексы:
- b – бамперы (первый и второй бампер в сеточном экране двойного бампера),

I – средний слой ткани в щите MDB,

p – снаряд,

w – задняя стенка.

На рис. 1 представлена построенная с использованием формул (1) – (3) баллистическая предельная зависимость (БПЗ) для типовой конфигурации экрана с двойным сеточным бампером [1, с. 179] совместно с экспериментальными точками. Общая поверхностная плотность экрана составляет 0.32 г/см^2 (при поверхностной плотности, входящей в конструкцию задней стенки из сплава Al2024T1, равной 0.142 г/см^2). Расстояние между задней стенкой и внешним бампером составляет 10.16 см.

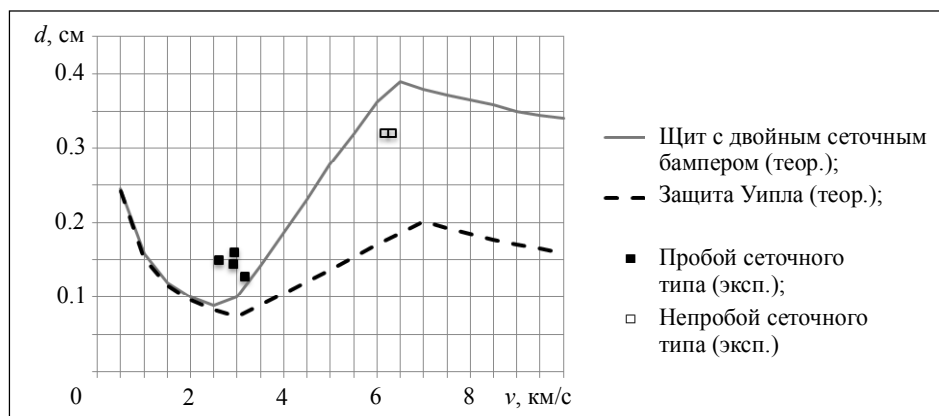


Рис. 1. Баллистическая предельная зависимость для щита с двойным сеточным бампером и эквивалентного щита Уиппла

БПЗ экрана с двойным сеточным бампером изображена совместно с БПЗ обычного «щита Уиппла» с эквивалентной поверхностной плотностью для наглядного сравнения работоспособности этих конструкций. Обе кривые строились для нормального угла подлета. Для расчета работоспособности типового щита Уиппла использовались уравнения Кристиансена и Керр для расчета двойной стенки [2, с. 97].

Исследованию проблемы защиты космических аппаратов от столкновения их с метеорными и техногенными частицами посвящена работа [3], в которой проводилось численное моделирование и экспериментальное определение предельной стойкости элементов конструкции КА «Спектр-УФ». В экспериментах и при численном моделировании рассматривался образец, представляющий собой реальный фрагмент бака астрофизического спутника «Спектр-УФ» с установленной противометеорной защитой. Эксперименты проводились с алюминиевыми шариками диаметром 1.5–2.5 мм при скоростях соударения 2.03–3.95 км/с. Защитная пластина имела толщину 1.7 мм, стенка бака – 1.9 мм, расстояние между ними – 38 мм, оба элемента образца – алюминиевые (конструкция щита Уиппла).

Сеточный экран с двойным бампером в качестве одного из объектов исследования тестировался в научно-исследовательской работе, выполненной НИИ ПММ ТГУ по заказу НПО им. Лавочкина [4]. В рамках этой работы проводились эксперименты по высокоскоростному соударению элементов конструкций космического аппарата с использованием пороховых и легкогазовых баллистических устано-

вок и численное моделирование с использованием трехмерного конечно-разностного метода. При проведении экспериментальных работ было испытано несколько вариантов защитных экранов, предназначенных для защиты от воздействия высокоскоростных метеорно-техногенных частиц топливного бака космического корабля, в том числе экран с двойной сеткой и эквивалентный по массе щит Уиппла. Особенности метательного процесса и общие теоретико-экспериментальные результаты проделанной работы изложены в статье [5].

Конструкция экрана с двойной сеткой и его внешний вид изображены на рис. 2, 3. В качестве внешнего экрана была выбрана тканая сетка из нержавеющей стали с параметрами $a = 0.5$ мм и $d = 0.3$ мм (где a и d – просвет ячейки и диаметр проволоки), второй бампер представлял собой такую же сетку с параметрами $a = 0.3$ мм и $d = 0.2$ мм. В качестве аналога топливного бака КА использовался лист из сплава АМгб толщиной 2 мм. Расстояние между внешним и вторым бампером составляло 15 мм, между вторым бампером и фрагментом бака – 35 мм.

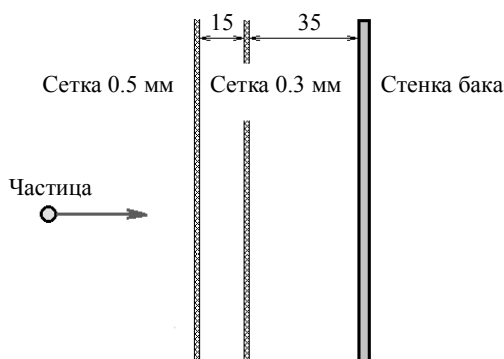


Рис. 2. Схема двойного сеточного экрана, применявшегося в экспериментах

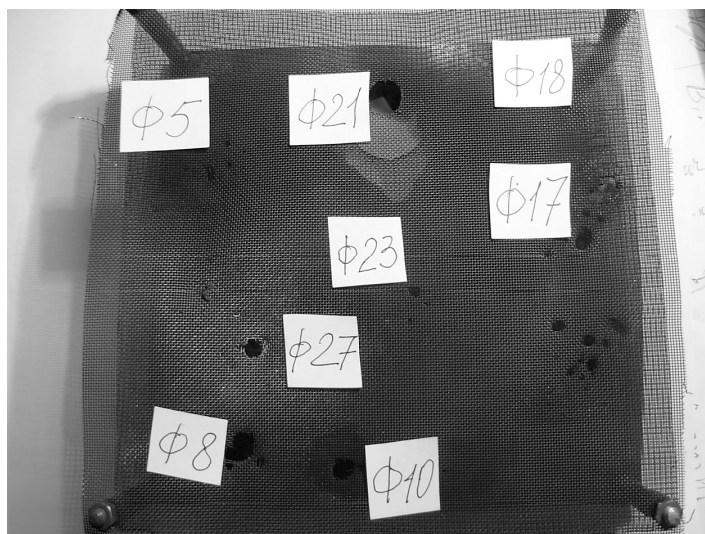


Рис. 3. Лицевая сторона сборки «сетки – элемент бака»

Испытания на стойкость данной экранной конструкции к высокоскоростному воздействию твердых частиц проводились с помощью метательных установок – пороховой пушки калибром 8 мм и легкогазовой пушки МПХ 23/8 калибра 8 мм. Результаты испытаний показали значительное увеличение работоспособности сеточного экрана по сравнению с обычным экраном аналогичной поверхностной плотности. На рис. 4 показаны экспериментальные точки для данного сеточного экрана и эквивалентного щита Уиппла (толщина бампера из АМг6 1.0 мм), полученные в ходе испытаний, и баллистические предельные зависимости для эквивалентного щита Уиппла, а также для щита Уиппла с большей (1.5 мм) толщиной бампера.

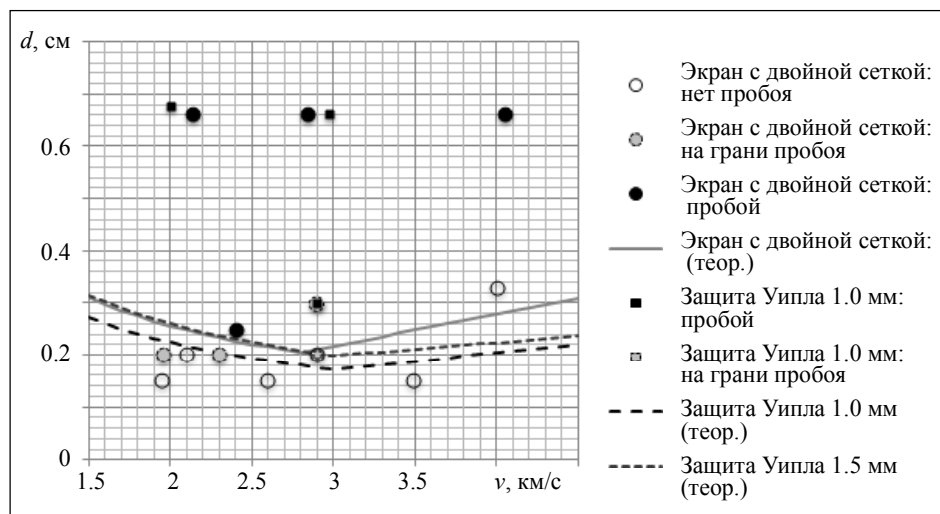


Рис. 4. Экспериментальные точки экрана и кривые БПЗ для экрана с двойной сеткой [4] и эквивалентного ему щита Уиппла

Основная часть экспериментов проводилась с использованием дюралюминиевых шариков в качестве ударника. Однако в нескольких опытах ($d > 0.4$ мм на рис. 4) использовались и другие материалы в качестве ударника – поддон из поликарбоната с железным шариком или с железной шайбой (или без них). Для данных экспериментов нанесенный на графике диаметр ударника пересчитан по его массе в эквивалент дюралюминиевого шарика.

Для данной конструкции двойного сеточного экрана суммарная поверхностная плотность двух сеток составляет 2.51 кг/м^2 , что соответствует пластине из АМг6 толщиной 0.95 мм. Теоретические баллистические предельные зависимости для двойного сеточного экрана и щита Уиппла с бампером из АМг6 толщиной 1 мм (при толщине алюминиевой задней стенки 2 мм), использовавшихся в экспериментах, приведены на рис. 5.

В целом, по результатам экспериментов [4] можно отметить, что экран с двойной сеткой, как и в серии экспериментов [1], показал существенно большую эффективность по сравнению с эквивалентной (по массе) защитой Уиппла, о чем непосредственно свидетельствовали, в частности, эксперименты при скорости ударника 2.9 км/с.

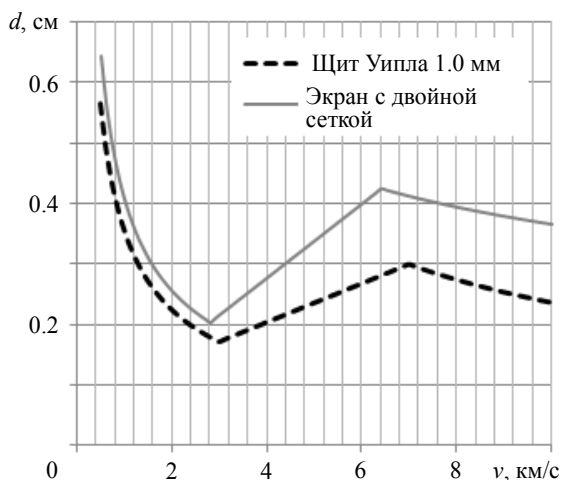


Рис. 5. Баллистическая предельная зависимость для экрана с двойным сеточным бампером (НИИ ПММ ТГУ) и эквивалентного щита Уиппла

ЛИТЕРАТУРА

1. Christiansen E.L., Kerr J.H. Mesh double-bumper shield: A low-weight alternative for spacecraft meteoroid and orbital debris protection // Int. J. Impact Engineering. 1993. V. 14. P. 169–180.
2. Christiansen E.L., Kerr J.H. Ballistic limit equations for spacecraft shielding // Int. J. Impact Engineering. 2001. V. 26. P. 93–104.
3. Герасимов А.В., Паиков С.В., Христенко Ю.Ф. Защита космических аппаратов от техногенных и естественных осколков. Эксперимент и численное моделирование // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4(16). С. 70–78.
4. Герасимов А.В., Христенко Ю.Ф. и др. Отчет об опытно-конструкторской работе «Численное исследование защитных свойств сеточных конструкций защитных экранов и рациональное проектирование их весовых характеристик». Отчет по договору 05/10 от 01.04.2010. Томск, 2010. 106 с.
5. Герасимов А.В., Паиков С.В., Христенко Ю.Ф. Теоретико-экспериментальное исследование ударного взаимодействия осколков с различными видами защиты космических аппаратов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела. 2011. № 4 (4). С. 1433–1435.

Статья поступила 23.06.2015 г.

Dobritsa B.T., Dobritsa D.B. SERVICEABILITY OF MESH DOUBLE-BUMPER SHIELDS UNDER THE ACTION OF HIGH-VELOCITY PARTICLES

DOI 10.17223/19988621/36/8

Results of experimental and theoretical research of hypervelocity impact protection performance of the mesh double-bumper shields are considered. The experimental works with use of powder and light-gas guns were carried out for testing several options of the shields intended for hypervelocity impact protection of a fuel tank of the spacecraft from meteoroids and orbital debris particles. Ballistic limit equations for the mesh shields that showed greater performance in comparison with the mass equivalent Whipple shield are considered.

Keywords: spacecraft, meteoroids and orbital debris, light-gas gun, Whipple shield, mesh shield, ballistic limit equation, hypervelocity impact.

Dobritsa Boris Timofeevich (Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation)

E-mail: fs11@bmstu.ru

Dobritsa Dmitry Borisovich (FSUI named after S.A.Lavochkin, Khimki, Russian Federation)

E-mail: dobrica@laspace.ru

REFERENCES

1. Christiansen E.L., Kerr J.H. Mesh double-bumper shield: A low-weight alternative for spacecraft meteoroid and orbital debris protection. *Int. J. Impact Engineering*, 1993, vol. 14, pp. 169–180.
2. Christiansen E.L., Kerr J.H. Ballistic limit equations for spacecraft shielding. *Int. J. Impact Engineering*, 2001, vol. 26, pp. 93–104.
3. Gerasimov A.V., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Zashchita kosmicheskikh apparatov ot tekhnogennykh i estestvennykh oskolkov. Eksperiment i chislennoe modelirovanie. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no.4(16). pp.70–78. (in Russian)
4. Gerasimov A.V., Khristenko Yu.F. i dr. *Otchet ob opytно-konstruktorskoy rabote «Chislennoe issledovanie zashchitnykh svoystv setochnykh konstruktsey zashchitnykh ekranov i ratsional'noe proektirovanie ikh vesovykh kharakteristik»*. Otchet po dogovoru 05/10 ot 01.04.2010. Tomsk, 2010. 106 p. (in Russian)
5. Gerasimov A.V., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Teoretiko-eksperimental'noe issledovanie udarnogo vzaimodeystviya oskolkov s razlichnymi vidami zashchity kosmicheskikh apparatov. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*, 2011, no. 4 (4), pp. 1433–1435. (in Russian)

УДК 531.62
DOI 10.17223/19988621/36/9

Ю.И. Дорогов

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ ВЫПУЧИВАНИЮ

Исследуется потеря устойчивости прямолинейного упругого стержня при наличии препятствий выпучиванию и различных способах закрепления концов стержня. В качестве физических препятствий рассмотрены поперечные силы и моменты. В качестве геометрического препятствия рассматриваются жёсткие стенки, расположенные вблизи стержня. Показано, что поперечные силы и моменты оказывают существенное влияние на значение критической силы. Установлена величина критической силы, при которой происходит вторичная потеря устойчивости стержня, расположенного вблизи абсолютно жёсткой стенки.

Ключевые слова: *устойчивость стержня, изопериметрическое условие, потеря устойчивости.*

1. Введение

В данной работе исследуется устойчивость прямолинейного упругого стержня длины L , сжимаемого продольной силой P , при наличии препятствий выпучиванию. Рассматриваются два типа препятствий: физические и геометрические. К физическим препятствиям отнесена сосредоточенная сила F , приложенная в срединном или концевом сечениях и противодействующая изгибу стержня при потере устойчивости, а также распределённая по длине стержня нагрузка с интенсивностью q и моменты M , приложенные на концах стержня. В качестве геометрических препятствий рассматриваются жёсткие стенки, расположенные вблизи стержня и мешающие изгибу стержня при потере устойчивости. Предполагается, что стенки абсолютно жёсткие и смещение стержня за их пределы невозможно.

Рассматриваются стержни с шарнирными и заделанными закреплениями концов. При этом один конец стержня остаётся неподвижным при изгибе вследствие потери устойчивости, а другой смещается. Длина l проекции стержня на его прямолинейную первоначальную ось изменяется в процессе изгиба стержня. Граничные условия, выражающие условия закрепления стержня, устанавливаются в соответствии с этим изменением.

При решении задачи используются линейные дифференциальные уравнение 3-го и 4-го порядков. При этом краевые задачи имеют решения, определённые лишь с точностью до некоторого неопределённого множителя [1–4]. Для определения этого множителя используется изопериметрическое условие [5], выражающее неизменность длины стержня при изгибе.

Стержень с грузом и упругой опорой посередине рассматривался в [6]. Устойчивость тяжёлого горизонтального стержня, лежащего на абсолютно жёсткой поверхности исследовалась в [7]. Различные случаи препятствий и несовершенств закреплений представлены в [8–14].

2. Стержень на двух шарнирных опорах

Рассмотрим стержень, шарнирно опёртый на концах (рис. 1) и сжимаемый продольной силой P . В середине пролёта к стержню приложена сосредоточенная сила F .

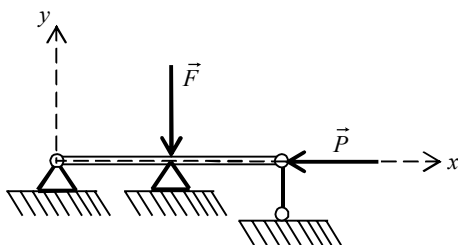


Рис. 1

Традиционно при исследовании стержня на устойчивость под действием продольной и поперечной сил полагают, что поперечная сила направлена в сторону выпуклости стержня и способствует потере устойчивости и последующему изгибу. Строго говоря, в этом случае, стержень изогнут уже при самых малых значениях поперечной силы F . Это задача о продольно-поперечном изгибе стержня, а не задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Для исследования устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня предположим, что стержень изгибается в сторону, противоположную направлению действия поперечной силы F . Такой изгиб становится возможным, если срединное сечение подпирается с противоположной стороны жёсткой опорой, например стенкой, которая препятствует изгибу стержня в её направлении. Стержень может изгибаться только в противоположную от стенки сторону. В этом случае стержень остаётся прямолинейным при начальных значениях продольной сжимающей силы. Так как поперечная сила F противодействует изгибу, то критическая сила превосходит значение силы Эйлера.

Поместим начало системы координат в неподвижной опоре. Ось Ox совместим с неизогнутой осью стержня и направим в сторону подвижного конца, а ось Oy направим перпендикулярно оси Ox в сторону выпуклости стержня.

Рассмотрим условия, при которых становится возможной изогнутая форма равновесия. На концах стержня действуют реакции опор R . Уравнение равновесия моментов имеет вид

$$EJy'' + Py - Rx = 0 \quad \text{при } x \leq \frac{l}{2},$$

$$EJy'' + Py - Rx + F\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0 \quad \text{при } x > \frac{l}{2}.$$

Здесь E – модуль упругости материала стержня; J – минимальное значение момента инерции поперечного сечения стержня.

Дифференцируя оба уравнения дважды, приведём их к линейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{P/EJ}$ – коэффициент.

При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \quad (2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнению (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), становится возможным при $\alpha = \pi/l$ и определяется с точностью до произвольного постоянного коэффициента C .

$$y(x) = C \sin \alpha x. \quad (3)$$

Неизвестный коэффициент C определим из условия постоянства длины изогнутой оси стержня

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{const}.$$

Полагая, что на начальном этапе процесса потери устойчивости $y'(x) \ll 1$, разложим подынтегральное выражения в ряд Маклорена с двумя первыми членами:

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{(y')^2}{2} \right] dx. \quad (4)$$

Подставляя производную функции (3) в подынтегральное выражение, после интегрирования и преобразования получим

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)} \sin \frac{\pi x}{l},$$

и изогнутая форма равновесия стержня становится возможной при значении нагрузки

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (6)$$

Значение нагрузки (6) остаётся неопределённым, так как не определена длина проекции l , при которой происходит потеря устойчивости.

Линейная плотность упругой энергии стержня в сжато-изогнутом состоянии

$$\tau = \frac{P^2}{2ES} + \frac{EJ(y'')^2}{2}.$$

Здесь S – площадь поперечного сечения стержня.

Интегрируя последнее выражение по длине стержня, получим значение упругой энергии, накопленной стержнем в изогнутом состоянии:

$$W = \frac{P_e^2 L}{2ES} + P_e (L-l).$$

При отсутствии поперечных нагрузок работа сжимающей силы P равна упругой энергии сжато-изогнутого стержня $A_p = W$. Поэтому при действии поперечной силы F , препятствующей изгибу, суммарная работа сил P и F оказывается меньше, чем необходимая упругая энергия стержня. Работы сжимающей силы оказывается недостаточно для изгиба стержня и преодоления действия поперечной силы. Дополнительная упругая энергия должна быть накоплена в стержне на этапе его сжатия, то есть до потери устойчивости.

Работа поперечной сосредоточенной силы F

$$A_F = -Fy\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{2F}{\pi}\sqrt{l(L-l)} \approx -\frac{2F}{\pi}\sqrt{L(L-l)},$$

так как потеря устойчивости происходит при значении $l \approx L$.

Предположим, что стержень нагружается перемещением до значения абсолютной деформации равного Δx . После смены прямолинейной формы равновесия стержня на изогнутую форму смещение концов стержня не изменится. Это смещение равно сумме деформации сжатия стержня εL , оставшейся после изгиба стержня, и смещения конца стержня $L-l$, возникшей в результате изгиба:

$$\Delta x = \varepsilon L + L - l.$$

Здесь $\varepsilon = P_e/(ES)$ – относительная остаточная деформация сжатия стержня.

С учётом этого и согласно закону Гука, сжимающая сила

$$P = \frac{ES\Delta x}{L} = P_e + ES\frac{(L-l)}{L}. \quad (7)$$

Работа сжимающей силы P равна

$$A_p = \frac{P\Delta x}{2} = \frac{P_e^2 L}{2ES} + P_e(L-l) + \frac{ES}{2L}(L-l)^2.$$

Работа внешних сил равна упругой энергии, накопленной стержнем, то есть

$$A_p + A_F = W. \quad (8)$$

Подставляя в последнее равенство найденные выражения для A_p, A_F, W , преобразуем его к виду

$$L-l = L\left(\frac{4F}{\pi ES}\right)^{2/3}.$$

Подставляя полученное значение $L-l$ в формулу (7), после преобразования получим

$$P = P_e + \sqrt[3]{\left(\frac{4F}{\pi}\right)^2 ES}. \quad (9)$$

При точечной подпорке в середине пролёта возможен двусторонний изгиб стержня, при котором конфигурация изогнутой оси стержня становится двояковыпуклой. Стержень изгибается так, как будто он закреплён шарнирно в срединном сечении. Потеря устойчивости стержня с последующим двусторонним изгибом оси, становится возможной при значении сжимающей силы равном $4P_e$. Для определения пограничного значения поперечной силы, при котором потеря устойчивости стержня происходит с последующим двусторонним изгибом стержня, приравняем выражение (9) значению $4P_e$ и разрешим полученное уравнение отно-

сительно F . После преобразования получим

$$F = \frac{3\sqrt{3}\pi^2}{4\Lambda} P_e. \quad (10)$$

Здесь $\Lambda = L/i$ – гибкость стержня, $i = \sqrt{J/S}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Значение поперечной силы (10) может быть использовано для оценки нижней границы реакции срединной опоры при потере устойчивости стержня, закреплённого тремя шарнирными опорами.

Рассмотрим стержень, опирающийся всей своей длиной на абсолютно жёсткую плоскость и закреплённый на концах при помощи шарниров. В случае, когда поперечная нагрузка распределена по длине стержня с интенсивностью q (рис. 2), уравнение моментов имеет вид

$$EJy'' + \frac{qx^2}{2} - Rx + Py = 0.$$

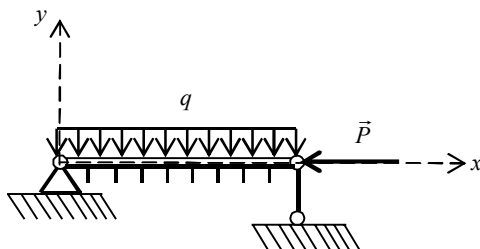


Рис. 2

Дифференцируя уравнение моментов дважды по переменной x , перепишем его в виде

$$y^{(4)} + \alpha^2 y'' + \beta = 0. \quad (11)$$

Здесь $\beta = q/EJ$. Граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде (2).

Общее решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$y(x) = -\frac{\beta x^2}{2\alpha^2} + C_1 x + C_2 + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Вычисляя производную второго порядка и подставляя выражение для прогибов и их вторую производную в граничные условия (2), после преобразования получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0, 5\beta l \alpha^{-2}, \quad C_2 = -C_3 = \beta \alpha^{-4}, \\ \beta \alpha^{-4} (1 - \cos \alpha l) + C_4 \sin \alpha l &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\sin \frac{\alpha l}{2} \left(\beta \alpha^{-4} \sin \frac{\alpha l}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha l}{2} \right) = 0.$$

Отсюда либо $\alpha l = 2\pi k$, либо $C_4 = -\beta \alpha^{-4} \operatorname{tg}(\alpha l/2)$.

В первом случае, при $\alpha = 2\pi k/l$, минимальное значение критической силы равно $P = 4P_e$. Это значение получается при $k = 1$.

Во втором случае для прогибов получаем формулу

$$y(x) = \frac{\beta x(l-x)}{2\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha^4}(1 - \cos \alpha x) - \frac{\beta}{\alpha^4} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x.$$

При $\alpha l \leq \pi$ стержень остаётся прямолинейным и $y(x) = 0$. При $\alpha l \rightarrow \pi + 0$ первыми двумя слагаемыми можно пренебречь по сравнению со слагаемым $-\beta \alpha^{-4} \operatorname{tg}(\alpha l/2) \sin \alpha x$, которое становится бесконечно большим. Поэтому уравнение изогнутой оси стержня может быть принято в виде (3). При этом коэффициент C определяется формулой (5).

Работа распределённой нагрузки

$$A_q = \int_0^l qy(x)dx = \frac{qC}{\alpha}(1 - \cos \alpha l) = \frac{2qlC}{\pi} \approx \frac{4qL^{3/2}}{\pi^2}(L-l)^{1/2}.$$

Составим уравнение энергетического баланса (8) и преобразуем его к виду

$$L-l = 4L^{5/3} \left(\frac{q}{\pi^2 ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда для критической силы получим

$$P = P_e + 4\sqrt[3]{\frac{(qL)^2 ES}{\pi^4}}.$$

Здесь P_e – сила Эйлера для стержня с шарнирно закреплёнными концами, определяемая формулой (6).

В случае, когда на концах стержня приложены одинаковые моменты, препятствующие повороту концевых сечений, дифференциальное уравнение изгиба имеет вид (1). При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = \frac{M}{EJ}. \quad (12)$$

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (12) становится возможным при $\alpha = \pi/l$ и определяется формулой (3) с точностью до произвольного постоянного коэффициента C .

Коэффициент C , определённый из условия постоянства длины изогнутой оси стержня (4), также выражается формулой (5).

Повторим вышеизложенные рассуждения об энергии. Составляя уравнение энергетического баланса, преобразуем его к виду

$$L-l = 4L^{1/3} \left(\frac{M}{ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда

$$P = P_e + 4\sqrt[3]{\frac{M^2 ES}{L^2}}.$$

Здесь P_e – сила Эйлера для стержня с шарнирно закреплёнными концами, определяемая формулой (6).

3. Стержень с заделанными концами

Рассмотрим стержень с одним заделанным и одним свободным концом. К свободному концу стержня приложены две сосредоточенные силы: продольная сила P и поперечная сила F , направленная перпендикулярно к P (рис. 3).

Выберем подвижную систему координат с началом в свободном конце. Ось Ox направим параллельно первоначальной неизогнутой оси стержня в сторону заделанного конца, а ось Oy направим перпендикулярно оси Ox в сторону, противоположную смещению свободного конца (рис. 3).

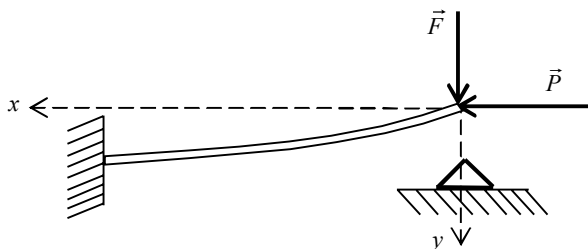


Рис. 3

Уравнение моментов запишется в виде

$$y''' + \alpha^2 y' - \beta = 0. \quad (13)$$

Здесь $\beta = F/EJ$.

Граничные условия, соответствующие условиям закрепления,

$$y(0) = y''(0) = y'(l) = 0. \quad (14)$$

Общее решение дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$y(x) = C_1 + \frac{\beta}{\alpha^2} x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Граничным условиям (14) удовлетворяет решение

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x + C_4 \sin \alpha x, \quad (15)$$

где $C_4 = -\frac{\beta}{\alpha^3 \cos \alpha l}$.

Физическому смыслу задачи отвечают положительные значения прогибов y , которые становятся возможными при значениях нагрузки, соответствующих неравенству $\alpha l > \pi/2$. Следовательно, изогнутая форма равновесия стержня становится возможной при нагрузке, соответствующей значению $\alpha l = \pi/2$. При этом критическое значение нагрузки равно $0,25P_e$.

При значениях величины αl , близких к значению $\pi/2$, коэффициент C_4 становится неограниченно большим. Первым конечным слагаемым в выражении (15) можно пренебречь в сравнении со вторым бесконечным слагаемым и принять выражение прогибов в виде (3) при соответствующем значении $\alpha = \pi/2l$.

Неограниченность прогибов является следствием применения линеаризованного дифференциального уравнения прогибов, при составлении которого кривизна изогнутой оси стержня заменялась второй производной y'' от функции прогибов. На практике прогибы не могут быть бесконечными, так как длина стержня остаётся почти неизменной. Полученный результат, скорее, позволяет пренебречь конечными слагаемыми в выражении (15) и представить конфигурацию изогнутой оси стержня, на начальном этапе изгиба, в виде синусоиды

$$y(x) = C \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (16)$$

Неопределённый коэффициент C найдём из условия (4). Для функции прогибов $y(x)$, определяемой выражением (16), получим

$$C(l) = \frac{4}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (17)$$

Повторим рассуждения второй главы и составим уравнение энергетического баланса (8). Выражая из получающегося уравнения $L-l$ и подставляя найденную разность в формулу (7), после преобразования получим

$$P = 0,25P_e + 4\sqrt[3]{\frac{F^2 ES}{\pi^2}}.$$

Рассмотрим стержень с двумя заделанными концами, в срединном сечении которого приложена сосредоточенная сила F . В этом случае дифференциальное уравнение изгиба имеет вид (1). При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления (рис. 4), запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0. \quad (18)$$

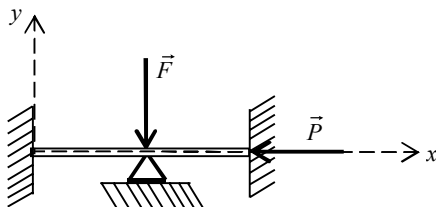


Рис. 4

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (18), становится возможным при $\alpha = 2\pi/l$ и определяется с точностью до произвольного постоянного коэффициента C :

$$y(x) = C(1 - \cos \alpha x).$$

Неизвестный коэффициент C , определённый из условия постоянства длины изогнутой оси стержня (4), равен

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (19)$$

Составим уравнение энергетического баланса (8) и преобразуем его к виду

$$L - l = L \left(\frac{2F}{\pi ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда

$$P = 4P_e + 3 \sqrt[3]{\frac{4F^2 ES}{\pi^2}}.$$

4. Потеря устойчивости стержня вблизи жёсткой стенки

Рассмотрим прямолинейный стержень, закреплённый шарнирно на малом расстоянии δ от жёсткой стенки и параллельный ей (рис. 5). При значении силы равном силе Эйлера стержень отклонится от прямолинейного положения и, изгибаясь, упрётся в жёсткую стенку. Предполагается, что при потере устойчивости, стержень начнёт отклоняться в сторону стенки. Вначале стержень коснётся стенки в крайних точках срединного сечения. По мере увеличения прогиба область контакта стержня и стенки начнёт увеличиваться. При этом часть стержня, касающегося стенки, остаётся прямолинейной. При некотором критическом значении нагрузки прямолинейная часть стержня вновь изогнётся и стержень оторвётся от стенки, изгибаясь по всей длине в противоположную сторону. Происходит вторичная потеря устойчивости стержня.

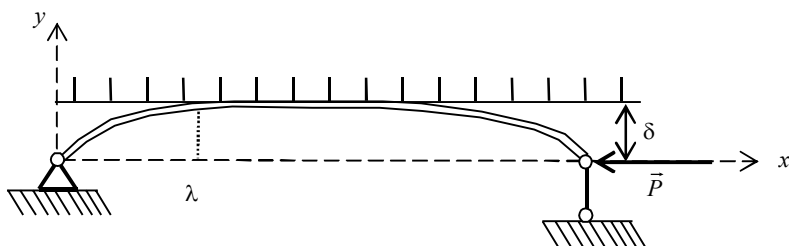


Рис. 5

Кроме продольной сжимающей силы P на стержень действуют сосредоточенные поперечные реакции со стороны шарнирных опор и распределённая реакция со стороны жёсткой стенки.

Обозначим абсцисс сечения стержня, ближайшего к началу координат и касающегося стенки, через λ . Тогда длина области контакта стержня и стенки равна $l - 2\lambda$.

Дифференциальное уравнение изгиба стержня на участке $x \in [0, \lambda]$ может быть записано в виде (1). Граничные условия для данного участка запишутся в виде

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(\lambda) = \delta, \quad y'(\lambda) = 0. \quad (20)$$

Предполагая, что стержень прямолинеен по всему участку контакта со стенкой, получим дополнительное условие

$$y''(\lambda) = 0. \quad (21)$$

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1) в граничные условия (20) и (21), получим систему уравнений относительно произвольных по-

стоянных C_1, C_2, C_3, C_4 . Нетривиальное решение этой системы возможно, если

$$\alpha\lambda = \pi. \quad (22)$$

При этом $C_1 = \frac{\delta}{\lambda}$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$.

Уравнение изогнутой оси стержня

$$y(x) = \frac{\delta}{\lambda}x + \sin \alpha x.$$

Учитывая определение коэффициента α , из условия (22) найдём выражение зависимости сжимающей силы P и координаты λ :

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2}, \quad (23)$$

или
$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}}. \quad (24)$$

Рассматривая устойчивость прямолинейного участка стержня, соприкасающегося с жёсткой стенкой, найдём критическое значение силы, при котором начнётся изгиб этого участка и его отрыв от стенки. Это значение определяется формулой Эйлера для данного участка

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{(l - 2\lambda)^2}. \quad (25)$$

Приравняв выражения силы, определяемые формулами (23) и (25), найдём λ из полученного уравнения

$$\lambda = \frac{l}{4}.$$

Тогда критическое значение сжимающей силы, при котором произойдёт вторичная потеря устойчивости и отрыв стержня от стенки,

$$P = \frac{16\pi^2 EJ}{l^2} = 16P_e.$$

Рассмотрим стержень, находящийся посередине между двумя жёсткими стенками. Когда сжимающая сила достигнет критического значения равного $16P_e$, стержень начнёт отрываться от стенки и менять форму равновесия с односторонней выпуклостью на форму равновесия с двусторонней выпуклостью. Одна половина стержня останется выпуклой в ту же сторону, в которую стержень был изогнут до достижения критической силы, а другая половина стержня изогнётся в противоположную сторону.

При дальнейшем увеличении сжимающей силы наступит момент, когда установившаяся конфигурация изогнутой оси стержня с двумя полуволнами перестанет быть устойчивой и стержень сменит её на конфигурацию с тремя полуволнами. Выясним, при каком значении сжимающей силы это произойдёт.

Для крайнего изогнутого участка стержня $x \in [0, \lambda]$ справедливы те же граничные условия (20), (21) и уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (1). При этом значение сжимающей силы P и координаты λ связаны соотношениями (23), (24).

В силу симметрии, участки стержня с односторонней выпуклостью имеют одинаковую длину. Рассматривая устойчивость прямолинейного участка, касающегося жёсткой стенки, для критической силы, при которой происходит потеря устойчивости установившейся двусторонней конфигурации изогнутой оси стержня, получим

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2} - 2\lambda\right)^2}. \quad (26)$$

Приравнявая значения силы P , определяемые по формулам (23) и (26), получим уравнение относительно λ , из которого найдём $\lambda = l/8$.

Подставляя λ в формулу (23), найдём значение критической силы, при котором изогнутая форма стержня с двумя полуволнами потеряет устойчивость:

$$P = \frac{64\pi^2 EJ}{l^2} = 64P_e.$$

Аналогично, далее найдём значение критической силы, при котором форма равновесия изогнутой оси стержня с n полуволнами перестает быть устойчивой и стержень принимает форму равновесия с $n+1$ полуволнами:

$$P = \frac{16n^2\pi^2 EJ}{l^2} = 16n^2 P_e.$$

В случае жёсткого закрепления граничные условия для части стержня, соответствующей $x \in [0, \lambda]$, запишутся в виде

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(\lambda) = \delta, \quad y'(\lambda) = 0.$$

Справедливо также дополнительное граничное условие, выражающее условие прямолинейности стержня на участке контакта со стенкой

$$y''(\lambda) = 0.$$

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1) в эти граничные условия, получим

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 + C_3 = 0, \\ y'(0) &= C_1 + \alpha C_4 = 0, \\ y(\lambda) &= C_1 \lambda + C_2 + C_3 \cos \alpha \lambda + C_4 \sin \alpha \lambda = \delta, \\ y'(\lambda) &= C_1 - \alpha C_3 \sin \alpha \lambda + \alpha C_4 \cos \alpha \lambda = 0, \\ y''(\lambda) &= -\alpha^2 C_3 \cos \alpha \lambda - \alpha^2 C_4 \sin \alpha \lambda = 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражая C_1, C_3 из первых двух уравнений системы через C_2, C_4 и подставляя их в последние три уравнения системы, преобразуем систему к виду

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -C_2, \quad C_1 = -\alpha C_4, \\ C_2(1 - \cos \alpha \lambda) - C_4(\alpha \lambda - \sin \alpha \lambda) &= \delta, \\ C_2 \sin \alpha \lambda - C_4(1 - \cos \alpha \lambda) &= 0, \\ C_2 \cos \alpha \lambda - C_4 \sin \alpha \lambda &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Нетривиальное решение полученной системы возможно, если

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \lambda & \cos \alpha \lambda - 1 \\ \cos \alpha \lambda & -\sin \alpha \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $\cos \alpha \lambda = 1$ или $\alpha \lambda = 2\pi$. При этом значение сжимающей силы

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\lambda^2}. \quad (27)$$

Коэффициенты $C_1 = \delta/\lambda$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -\delta/\alpha\lambda$.

Уравнение изогнутой оси стержня на участке $x \in [0, \lambda]$

$$y(x) = \frac{\delta}{\lambda}x - \frac{\delta}{\alpha\lambda} \sin \alpha x.$$

Рассмотрим устойчивость прямолинейного участка стержня, соприкасающегося со стенкой. Критическая сила, при которой этот участок потеряет устойчивость прямолинейной формы, выражается формулой (25). Приравнявая значения критической силы, получаемые по формулам (25), (27) и разрешая полученное уравнение относительно λ , найдём $\lambda = l/3$. Тогда значение критической силы, при которой произойдёт вторичная потеря устойчивости, равно

$$P = \frac{36\pi^2 EJ}{l^2} = 36P_e.$$

Выводы

1. Предложенный метод позволяет учитывать влияние поперечных сил и моментов, препятствующих выпучиванию стержня при потере устойчивости, на критическую силу, при которой происходит потеря устойчивости. Показано, что поперечные и моментные нагрузки оказывают существенное влияние на значение критической силы.

2. Получено значение критической силы, при которой происходит вторичная потеря устойчивости стержня, расположенного вблизи абсолютно жёсткой стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
5. Дорогов Ю.И. Применение изопериметрического условия в задачах потери устойчивости стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 71–81.
6. Дорогов Ю.И. Потеря устойчивости горизонтального стержня с грузом и упругой опорой посередине // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 2 С. 31–39.
7. Дорогов Ю.И. Об устойчивости горизонтального стержня, лежащего на жёстком основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1 С. 58–65.
8. Дорогов Ю.И. Об устойчивости формы незакрепленного упругого стержня с жёсткими полками на концах // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 462–473.

9. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с жесткими окончаниями // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 3 С. 16–21.
10. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 2. С. 255–266.
11. Дорогов Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 1. С. 84–96.
12. Дорогов Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 4. С. 575–586.
13. Дорогов Ю.И. О нисходящей ветви диаграммы деформирования // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. № 2. С. 281–288.
14. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жесткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. № 3. С. 300–311.

Статья поступила 07.05.2015 г.

Dorogov Yu. I. STABILITY OF A COLUMN IN THE PRESENCE OF OBSTACLES TO BUCKLING

DOI 10.17223/19988621/36/9

Loss of stability of the rectilinear elastic column in the presence of obstacles to a buckling is investigated. Various ways of fixing the ends of the column are considered. For the physical obstacles, transverse forces and the moments are considered. As a geometrical obstacle, the rigid walls located near the column are considered. It is shown that transverse forces and the moments have essential impact on value of critical force. The critical force with at which there occurs a secondary loss of stability of the column located near absolutely rigid wall is established.

Keywords: buckling of a column, isoperimetric condition, loss of stability

DOROGOV Yury Ivanovich (Candidate of Technical Sciences, Branch of Moscow Power Engineering Institute (National Research University, Volzhskiy, Russian Federation)
E-mail: ydorogov@yandex.ru

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' sterzhney plastin i obolochek*. Moscow, Nauka Publ., 1971. (in Russian)
2. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemyykh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1967. (in Russian)
3. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1987. (in Russian)
4. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. Moscow, Nauka Publ., 1988. (in Russian)
5. Dorogov Yu.I. Primenenie izoperimetricheskogo usloviya v zadachakh poteri ustoychivosti sterzhnya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 71–81. (in Russian)
6. Dorogov Yu.I. Poterya ustoychivosti gorizontalnogo sterzhnya s gruzom i uprugoy oporoy posredine. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2014, no. 2 S. 31–39. (in Russian)
7. Dorogov Yu.I. Ob ustoychivosti gorizontalnogo sterzhnya, lezhashchego na zhestkom osnovanii. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2015, no. 1 S. 58–65. (in Russian)
8. Dorogov Yu. I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, no. 3, pp. 338–345.
9. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s zhestkimi okonchaniyami. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2013, no. 3 S. 16–21. (in Russian)
10. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s iskrivlennymi tortsami. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh*, 2012, no. 2, pp. 255–266. (in Russian)
11. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' uprugogo sterzhnya s razrushayushchey oporoy. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh*, 2010, no. 1, pp. 84–96. (in Russian)

12. Dorogov Yu.I. Prodol'nyy izgib sterzhnya s razrushayushchimisya zadelkami. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2010, no. 4, pp. 575–586. (in Russian)
13. Dorogov Yu.I. O niskhodyashchey vetvi diagrammy deformirovaniya. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2009, no. 2, pp. 281–288. (in Russian)
14. Dorogov Yu.I. O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo sterzhnya s razrushayushcheysya oporoy. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2006, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)

УДК 532.529:662.62

DOI 10.17223/19988621/36/10

О.В. Матвиенко, А.О. Андропова**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ
ВБЛИЗИ ПОДВИЖНОЙ СТЕНКИ**

Проведено исследование движения частицы в окрестности подвижной стенки. Результаты расчетов показывают, что увеличение частоты колебания пластины ω увеличивает частоту изменения скорости частицы. С ростом ω колебательный режим изменения скорости частицы наблюдается в более тонком слое, прилегающем к пластине. С увеличением диаметра частиц увеличивается их инерционность. Амплитуда колебаний частицы уменьшается с увеличением частоты колебаний пластины.

Ключевые слова: *механика жидкости, частицы, дисперсная фаза, подвижная стенка, осаждение.*

Процессы извлечения из воздуха взвешенных частиц включают, как правило, осаждение частиц на сухие или смоченные поверхности и удаление осадков с поверхностей осаждения [1]. В пылеуловителях и сепарационных устройствах применяют следующие способы отделения взвешенных частиц от взвешивающей среды: осаждение в гравитационном поле, осаждение под действием сил инерции, а также осаждение в центробежном поле [2]. Осаждение под действием гравитационных сил происходит из-за различной кривизны траектории движения составляющих выброса (газа и частиц), вектор скорости движения которого направлен горизонтально. Для этого необходимо создать соответствующий режим движения загрязненного газа в аппарате с учетом размера частиц и их плотности. Инерционное осаждение основано на том, что частицы аэрозоля и взвешивающая среда ввиду значительной разности плотностей обладают различной инерцией [3]. Инерционное осаждение происходит путем резкого изменения направления вектора скорости движения выброса, при этом твердые частицы под действием инерционных сил, двигаясь по инерции в прежнем направлении, отделяются от газовой среды и попадают в приемный бункер. При центробежном разделении выбросу придается вращательное движение внутри циклонного аппарата, при этом твердые частицы отбрасываются центробежной силой на периферию аппарата к его стенке, так как центробежное ускорение в циклоне на несколько порядков больше ускорения силы тяжести, что позволяет удалить из выброса даже весьма мелкие частицы [4].

Целью настоящей работы является исследование движения одиночной частицы в потоке жидкости, вблизи плоской стенки, которая совершает в своей плоскости гармонические колебания.

Поле течения жидкости

Задача о движении жидкости вблизи колеблющейся в своей плоскости стенки известна как вторая задача Стокса [5]. Пусть неограниченная плоская стенка совершает в своей плоскости прямолинейные гармонические колебания. Ось x расположим в плоскости стенки, а ось z направим перпендикулярно к стенке. Так как

жидкость прилипает к стенке, то колебания последней приводят к тому, что жидкость на самой стенке ($z = 0$) обладает некоторой скоростью, меняющейся по закону $U_x(0, t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

Движение жидкости вблизи стенки описывает дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями, имеющими следующий вид:

$$\text{для } t \leq 0: \quad U_x(z, t) = 0, \quad (2)$$

$$\text{для } t > 0: \quad z = 0, \quad U_x(0, t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha); \quad (3)$$

$$z \rightarrow \infty, \quad U_x(\infty, t) = 0. \quad (4)$$

Решение дифференциального уравнения (1) с условиями (2) – (4) имеет вид

$$U_z(z, t) = U_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z + \alpha\right). \quad (5)$$

Таким образом, жидкость вблизи стенки совершает колебательное движение с убывающей по мере удаления от стенки амплитудой $U_0 \exp(-\eta)$, причем колебание слоя жидкости, находящегося от стенки на расстоянии z , имеет по сравнению с колебанием стенки смещение по фазе $\eta = z\sqrt{\omega/2\nu}$ в направлении, противоположном движению стенки.

На рис. 1 изображены кривые распределения скоростей для различных моментов времени. Два слоя, находящиеся один от другого на расстоянии $2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$, колеблются в одинаковой фазе. Это расстояние можно рассматривать как своего рода длину волны колебания. Слой жидкости, приводимый стенкой в колебательное движение, имеет толщину $\delta \sim \sqrt{\nu/\omega}$. Следовательно, он тем тоньше, чем больше частота колебаний и чем меньше кинематическая вязкость.

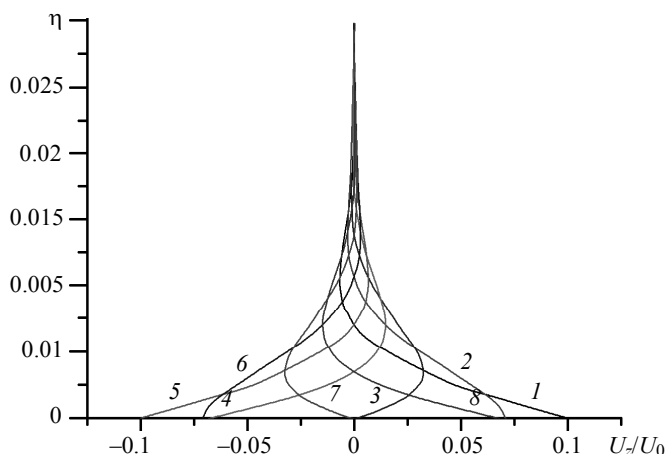


Рис. 1. Распределение скоростей вблизи плоской стенки, совершающей колебания в собственной плоскости (кр. 1 – 0°; кр. 2 – 45°; кр. 3 – 90°; кр. 4 – 135°; кр. 5 – 180°; кр. 6 – 225°; кр. 7 – 270°; кр. 8 – 315°)

Уравнения движения частицы

Уравнение движения центра масс одиночной частицы можно записать в виде

$$\rho V \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (6)$$

где ρ – средняя плотность частицы; V – ее объем; $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$ – главный вектор внешних действующих сил.

Рассмотрим более подробно систему сил, действующих на частицу. Силу тяжести можно определить по формуле

$$\mathbf{F}_G = \rho V \mathbf{g}. \quad (7)$$

Наличие локального градиента давления приводит к появлению силы, направленной в сторону градиента давления [2, 6]:

$$\mathbf{F}_p = - \int_s p \mathbf{n} ds = - \int_V \text{grad}(p) dV \approx - \text{grad}(p) V. \quad (8)$$

Градиент давления, создаваемый статическим давлением равен $\text{grad}(p) = -\rho_e \mathbf{g}$. Складывая силу тяжести и силу, вызванную градиентом статического давления, получим выталкивающую силу Архимеда [3, 7]:

$$\mathbf{F}_A = (\rho - \rho_e) V \mathbf{g}. \quad (9)$$

Сила, связанная с неоднородностью касательных напряжений τ , имеет вид [2]

$$\mathbf{F}_\tau = \int \text{div}(\tau) dV \approx \text{div}(\tau) V, \quad (10)$$

где τ – тензор касательных напряжений.

Сила сопротивления в однородном потоке газа определяется как [3, 8]:

$$\mathbf{F}_D = - \frac{C_D}{8} \pi d_p^2 \rho_e |\mathbf{v} - \mathbf{v}_e| (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e), \quad (11)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; d_p – диаметр частицы; $\mathbf{v}_e$ – скорость несущей среды.

При ускоренном движении частицы силы аэродинамического сопротивления будут отличаться от сил, свойственных стационарному течению. В частности, возникает сила, связанная с необходимостью привести в ускоренное движение вытесненные частицей массы несущей среды. Эта сила, называемая силой присоединенных масс, связана с относительным ускорением следующей формулой [8]:

$$\mathbf{F}_{vm} = \frac{C_{vm}}{6} \pi d_p^3 \rho_e \left[\frac{D\mathbf{v}_e}{Dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right], \quad (12)$$

где $C_{vm} = 0.5$ – коэффициент присоединенных масс.

Уравнения Навье – Стокса [9, 10], описывающие движения несущей среды, позволяют определить связь между градиентом давления, сдвиговыми напряжениями и характеристиками движения потока:

$$\rho_e \frac{D\mathbf{v}_e}{Dt} = - \text{grad}(p) + \text{div}(\tau) + \rho_e \mathbf{g}. \quad (13)$$

Комбинируя это выражение с формулой для силы присоединенных масс и с законом движения, окончательно получим уравнение движения одиночной частицы в форме Буссинеска – Бассе – Озеена [2]:

$$\rho V (1 + C_{vm}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_D + (1 + C_{vm}) \rho_e V \frac{D\mathbf{v}_e}{Dt} + \frac{(\rho - \rho_e)}{\rho} \mathbf{F}_G. \quad (14)$$

Для расчета траекторий движения капли приведенная выше система уравнений дополняется следующими кинематическими соотношениями:

$$\frac{dx_p}{dt} = v_x, \quad \frac{dy_p}{dt} = v_y, \quad \frac{dz_p}{dt} = v_z, \quad (15)$$

где x_p , y_p , z_p – координаты частицы в декартовой системе координат.

Коэффициент аэродинамического сопротивления

Коэффициент сопротивления одиночной твердой частицы C_D в простейшем случае является однозначной функцией относительного числа Рейнольдса $Re = \rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_e| d / \mu$, построенного по плотности частицы, ее относительной скорости, диаметру и динамической вязкости жидкости. Зависимость $C_D(Re)$ в этом случае называется стандартной кривой сопротивления и имеет четыре характерных участка (режима обтекания).

При низких числах Рейнольдса $Re < 1$ поток практически симметричен относительно плоскости симметрии, ортогональной к направлению движения, так как инерциальные силы слишком малы, чтобы воспрепятствовать смыканию линий тока позади частицы.

Для этого режима решение уравнения Навье – Стокса в пренебрежении и инерциальными членами дает формулу Стокса: $C_D = 24/Re$.

С ростом Re увеличивается влияние сил инерции и картина обтекания теряет симметрию. При значениях числа Рейнольдса, лежащих в диапазоне $Re \sim 10 - 25$ потока, и за частицей образуется зона с замкнутыми линиями тока или со стационарным кольцевым вихрем. При дальнейшем увеличении Re до 300–700 вихревые кольца, образующиеся в отрывной зоне, срываются и уносятся вслед, а на их месте возникают новые.

В переходной области кривая сопротивления описывается различными формулами. В частности, стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать степенными зависимостями Бабухи – Шрайбера [2]:

$$C_D = \frac{A}{Re^n},$$

$$A = 26.3, \quad n = 0.8 \quad \text{для} \quad 1 < Re < 10,$$

$$A = 12.3, \quad n = 0.5 \quad \text{для} \quad 10 < Re < 1000.$$

При $Re > 10^3$ картина обтекания в некоторой степени стабилизируется, что в первом приближении приводит к независимости C_D от Re : $C_D \approx 0.44 = \text{const}$.

При $Re > 1.5 \cdot 10^5$ имеет место кризис сопротивления, который характеризуется резким падением значений коэффициента сопротивления и связан с турбулизацией пограничного слоя и резким смещением точки отрыва в кормовую область. Этот эффект впервые обнаружил Эйфель.

Для расчета коэффициента сопротивления в этом диапазоне чисел Рейнольдса можно использовать формулы, приведенные в [3]:

$$C_D = \begin{cases} 28.18 - 5.3 \lg \text{Re} & \text{для } 1.5 \cdot 10^5 < \text{Re} \leq 2 \cdot 10^5, \\ 0.1 \lg \text{Re} - 0.46 & \text{для } 2 \cdot 10^5 < \text{Re} \leq 5 \cdot 10^5, \\ 0.19 - 4 \cdot 10^{-4} \text{Re}^{-1} & \text{для } 5 \cdot 10^5 \leq \text{Re}. \end{cases}$$

Взаимодействие частицы со стенками сосуда, в котором она движется, зависит от формы, начального движения и ориентации частицы, а также от геометрических особенностей стенок. Для частицы, двигающейся вблизи стенки, сила сопротивления зависит от расстояния от частицы до поверхности. Бреннер [11] изучил сопротивление, испытываемое частицей, двигающейся по направлению к стенке в условиях ползущего течения. Коэффициент сопротивления частицы, центр которой удален от поверхности на расстояние h , в первом приближении может быть рассчитан по формуле

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{d}{2h} \right).$$

При движении частицы параллельно стенке также необходимо модифицировать силу сопротивления. При больших расстояниях до стенки Факсен [11] установил:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left[1 - \frac{9}{16} \left(\frac{d}{2h} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{2h} \right)^3 - \frac{45}{256} \left(\frac{d}{2h} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{d}{2h} \right)^5 \right]^{-1}.$$

Анализ результатов

Рассмотрим гравитационное осаждение частицы вблизи колеблющейся стенки. На рис. 2 показана зависимость скорости осаждения частицы U_z различного диаметра от высоты z .

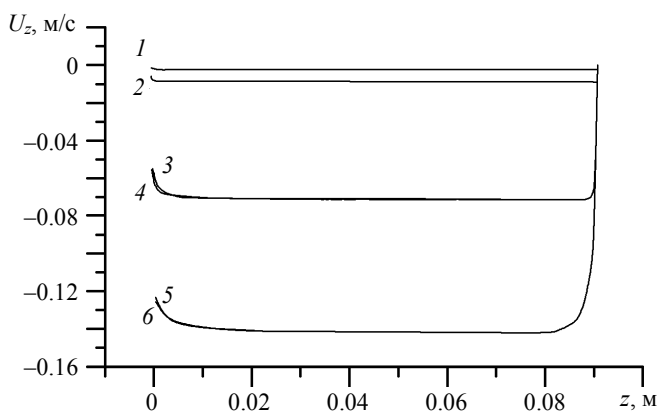


Рис. 2. Зависимость скорости осаждения частицы различного диаметра от высоты: кр. 1 – $d = 50$ мкм, $\alpha = [0, \pi/2, 3\pi/2]$; кр. 2 – $d = 100$ мкм, $\alpha = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$; кр. 3 – $d = 500$, $\alpha = [0, \pi]$; кр. 4 – $d = 500$ мкм, $\alpha = [\pi/2, 3\pi/2]$; кр. 5 – $d = 1000$ мкм, $\alpha = [0, \pi]$; кр. 6: $d = 1000$ мкм, $\alpha = [\pi/2, 3\pi/2]$. $U_0 = 0.1$ м/с; $\omega = 0.1$ с⁻¹

Из рисунка видно, что существуют три характерных участка осаждения частиц. На первом участке происходит достаточно резкое изменение скорости частицы от начального значения до стационарной скорости осаждения. Затем частица движется с постоянной скоростью. При приближении к стенке происходит торможение частицы, связанное с наличием твердой преграды. С уменьшением размера частицы области нестационарного движения (начальная и пристеночная) сокращаются.

На рис. 3 представлены изменения горизонтальной составляющей скорости U_x малых частиц ($d = 50$ мкм) в зависимости от времени для разных частот колебания пластины ω и углов α .

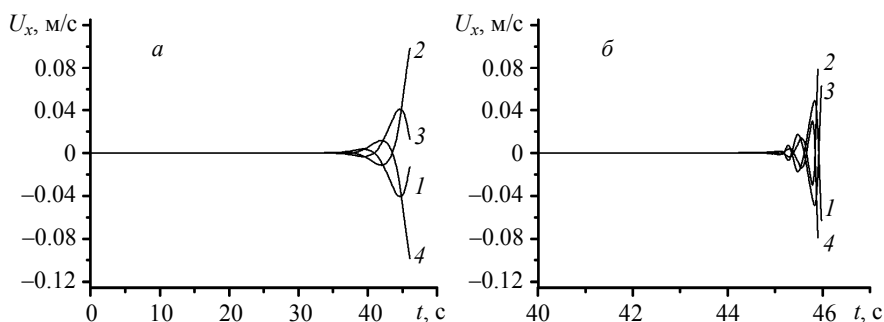


Рис. 3. Изменение горизонтальной компоненты скорости частицы со временем, $d = 50$ мкм, $U_0 = 0.1$ м/с: а – $\omega = 0.1$ с⁻¹, б – $\omega = 10$ с⁻¹ (кр. 1 – 0°; кр. 2 – 90°; кр. 3 – 180°; кр. 4 – 270°)

Анализ рисунков показывает, что горизонтальная составляющая скорости частицы, находящейся на некоторой высоте z в некоторый момент времени t близки к скорости жидкости на той же высоте и в тот же момент времени. Это свидетельствует о малой инерционности частиц малого диаметра. При $z > 2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$ горизонтальная компонента скорости близка к нулю. При $z < 2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$ изменение горизонтальной скорости частицы приобретает гармонический характер с возрастающей амплитудой. Увеличение частоты колебания пластины увеличивает частоту изменения скорости частицы. Однако с ростом ω колебательный режим изменения скорости частицы наблюдается в более тонком слое, прилегающем к пластине. С увеличением диаметра частиц увеличивается их инерционность. Амплитуда колебания частицы уменьшается. При этом увеличение колебания пластины приводит к уменьшению частоты и амплитуды частицы.

Перейдем к рассмотрению траекторий движения частиц ($d = 50$ мкм, рис. 4). Как видно из рисунков, на начальном этапе частица движется прямолинейно, затем по мере приближения к стенке начинает совершать гармонические колебания с возрастающей амплитудой. Амплитуда колебания частиц, а также область, в которой происходят эти колебания, уменьшается с увеличением частоты колебания стенки. Такой же эффект наблюдается и при увеличении диаметра частицы (рис. 5). Отдельный случай, $\omega = 0$, соответствует движению частиц в окрестности плоской стенки движению с постоянной скоростью U_0 . В этом случае траектории движения частиц прямолинейны (рис. 5).

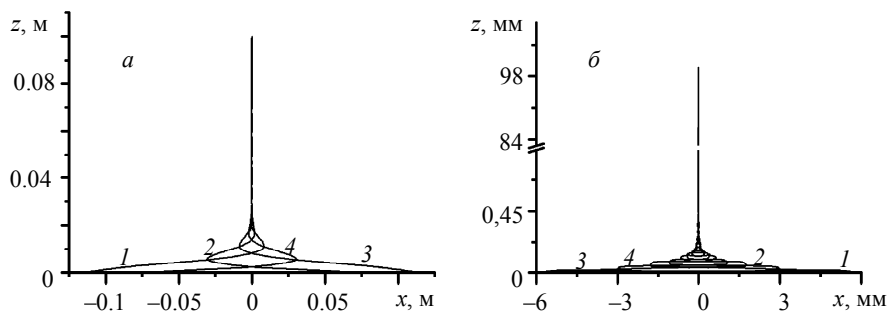


Рис. 4. Траектория движения частицы, $d = 50 \text{ мкм}$, $U_0 = 0.1 \text{ м/с}$:
 $a - \omega = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $b - \omega = 10 \text{ с}^{-1}$ (кр. 1 – 0° ; кр. 2 – 90° ; кр. 3 – 180° ; кр. 4 – 270°)

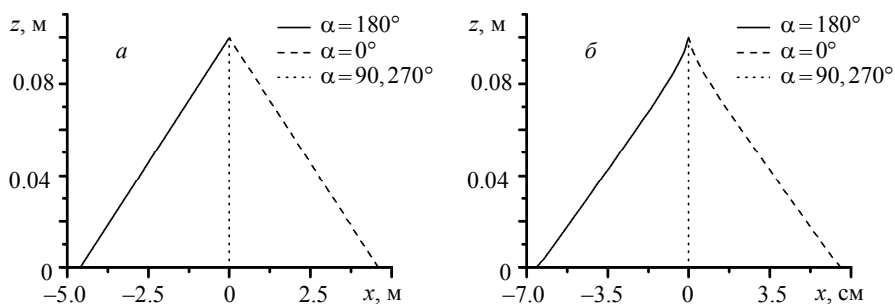


Рис. 5. Траектория движения частицы, $U_0 = 0.1 \text{ м/с}$, $\omega = 0 \text{ с}^{-1}$:
 $a - d = 50 \text{ мкм}$, $b - d = 1000 \text{ мкм}$

Таким образом, проведенные исследования показывают, что с ростом ω колебательный режим изменения скорости частицы наблюдается в более тонком слое, прилегающем к пластине. С увеличением диаметра частиц увеличивается их инерционность. Амплитуда колебания частицы уменьшается, при этом увеличение колебания пластины приводит к уменьшению частоты и амплитуды частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press., 1998. 472 p.
2. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
3. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запрянов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996.
4. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 2. С. 230–238.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. Матвиенко О.В., Ушаков В.М., Евтюшкин Е.В. Математическое моделирование турбулентного переноса дисперсной фазы в турбулентном потоке // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2004. № 6. С. 50–54.
7. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Агафонцева М.В. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. № 4 (37). С. 144–156.
8. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385–400.

9. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. *Bubbles, drops and particles*. N.Y.: Academ Press, 1978. 380 p.
10. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 190–192.
11. Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 08.04.2015 г.

Matvienko O.V., Andropova A.O. STUDYING THE PARTICLE MOTION IN A FLUID FLOW IN THE VICINITY OF A MOVABLE WALL

DOI 10.17223/19988621/36/10

In this paper, an investigation of the particle motion in the vicinity of a movable wall is carried out. The numerical results show that an increase in the plate oscillation frequency ω increases the frequency of variation in the particle velocity. With an increase in ω , the oscillation mode of the variation in the plate velocity is observed in a thinner layer adjacent to the plate. With an increase in the particle diameter, the inertia of the particles increases. The amplitude of particle oscillations decreases with increasing frequency of plate oscillations.

Keywords: mechanics of fluid, particles, dispersed phase, movable wall, deposition.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: matvolegv@mail.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: a.o.andropova@gmail.com

REFERENCES

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. CRC Press., 1998. 472 p.
2. Ostrovskiy G.M. *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000. 359 p. (in Russian)
3. Kutepov A.M., Polyani L.D., Zapryanov Z.D. i dr. *Khimicheskaya gidrodinamika: spravochnoe posobie*. Moscow, Byuro Kvantum Publ., 1996. (in Russian)
4. Matvienko O.V., Evtyushkin E.V. Matematicheskoe issledovanie separatsii dispersnoy fazy v gidrotsiklone pri ochistke vyazkoplasticheskikh burovnykh rastvorov. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 230–238. (in Russian)
5. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya*. Moscow, Nauka Publ., 1974. (in Russian)
6. Matvienko O.V., Ushakov V.M., Evtyushkin E.V. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo perenosa dispersnoy fazy v turbulentnom potoke. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, 2004, no. 6, pp. 50–54. (in Russian)
7. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Agafontseva M.V. Issledovanie dinamiki puzyr'ka v zakruchennom potoke nelineynno-vyazkoy zhidkosti. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2012, no. 4 (37), pp. 144–156. (in Russian)
8. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 22, pp. 385–400.
9. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. *Bubbles, drops and particles*. N.Y., Academ Press, 1978. 380 p.
10. Matvienko O.V., Daneyko A.M. Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke. *Izv. vuzov. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 9/3, pp. 190–192. (in Russian)
11. Khappel' Dzh., Brenner G. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynol'dsa*. Moscow, Mir Publ., 1976. (in Russian)

УДК 004.94
DOI 10.17223/19988621/36/11

М.П. Сухоруков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА¹

Представлены результаты численного моделирования собственных частот бортовой радиоэлектронной аппаратуры в соответствии с реальными условиями работы. Исследованы и разработаны упрощенные модели электрорадиоизделий, позволяющие сократить число элементов и узлов конечно-элементной модели при сохранении точности результатов. Приведены результаты моделирования.

Ключевые слова: численное моделирование, собственные частоты, подробная модель, упрощенная модель, конечно-элементная модель, бортовая радиоэлектронная аппаратура, космический аппарат.

Актуальность

Развитие многофункциональных компьютерных систем, согласованно выполняющих объемное конструирование и инженерные расчеты, позволяет на этапе проектирования радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) космических аппаратов (КА) определять собственные (резонансные) частоты, осуществляя проверку наличия резонансных частот в рабочем частотном диапазоне изделия и оптимизируя конструкцию таким образом, чтобы исключить возникновение резонансов и повысить надежность вновь создаваемого изделия.

В связи с активным внедрением в инженерную практику вычислительной техники, наиболее эффективным приближенным методом решения прикладных задач механики является метод конечных элементов, реализованный во многих программных средствах.

Однако РЭА КА представляет собой сложную геометрическую модель, для описания которой требуется конечно-элементная модель большой размерности, что приводит к значительному увеличению временных и аппаратных ресурсов для проведения численного моделирования, а порой становится и вовсе невозможным из-за малых вычислительных мощностей конструкторских подразделений.

Актуальной задачей поэтому является повышение эффективности механического анализа по определению собственных частот за счет исследования и разработки упрощенных математических моделей.

Постановка задачи

Целью модального анализа является определение собственных частот и форм колебаний конструкции. Также модальный анализ может быть первым шагом для других видов динамического анализа, таких, как анализ переходных процессов, гармонический и спектральный анализ. Модальный анализ предполагает, что сис-

¹ Работа выполнена в рамках реализации постановления Правительства РФ от 09.04.2010 г. № 218 и договора между ОАО «ИСС» и Минобрнауки РФ от 12.02.2013 г. № 02.G25.31.0042.

тема является линейной. Все виды нелинейности – нелинейное поведение материала, контактные граничные условия, конечные перемещения – игнорируются.

Уравнение свободных колебаний является частным случаем общего уравнения движения

$$[M]\{x''\} + [C]\{x'\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \Rightarrow [M]\{x''\} + [K]\{x\} = 0, \quad (1)$$

где $[M]$ – матрица масс; $[C]$ – матрица демпфирования; $[K]$ – матрица жесткости; $\{x\}$ – перемещение; $\{x'\}$, $\{x''\}$ – первая и вторая производные перемещения по времени; $\{F\}$ – сила; t – время.

Модальный анализ имеет ряд допущений:

- расчет производят без учета динамических нагрузок;
- принимается линейное упругое поведение материалов;
- используется теория малых деформаций, не учитываются нелинейные эффекты;
- матрица $[C]$ отсутствует, значит, не учитываются эффекты демпфирования;
- вектор сил $\{F\}$ отсутствует, значит, не рассчитывается возбуждение конструкции внешними силами;
- форма свободных колебаний вычисляется в относительных единицах и не позволяет определять абсолютные смещения.

Для линейной системы свободные колебания являются гармоническими и могут быть записаны в виде

$$\{x\} = \{\varphi_i\} \cos(\omega_i t), \quad (2)$$

где φ_i – i -й собственный вектор, представляющий форму (моду) колебаний на i -й собственной частоте, ω_i – i -я собственная круговая частота (радиан в единицу времени).

Подставив уравнение 2 в 1, получаем

$$(-\omega_i^2 [M] + [K])\{\varphi_i\} \cos(\omega_i t) = 0.$$

Собственные частоты и формы колебаний можно найти из уравнения

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\varphi_i\} = 0.$$

В данной работе приведен расчет свободных колебаний без учета предварительных напряжений, однако возможно проведение анализа с учетом предварительного напряженного состояния (конструкционные и/или термические нагрузки).

Согласно условиям эксплуатации, конструкция бортовой РЭА считается жестко закрепленной [1]. Жесткое закрепление: ограничивает все степени свободы выбранных вершин, ребер, поверхностей: для твердых тел исключает линейное перемещение в направлениях x , y , z . Для поверхностных и линейных тел исключает линейное перемещение в направлениях x , y , z и вращательное перемещение относительно x , y , z .

Поставленная задача решена методом конечных элементов в специализированном программном обеспечении ANSYS Workbench.

Разработка упрощенных моделей

Разработка и исследование упрощенных моделей проводилось на конструкции системы автономной навигации (САН) для КА всех типов орбит. САН представляет собой конструктивно-законченный узел, учитывающий жесткие ограничения по габаритам, массе и потребляемой мощности с применением серийных компонентов промышленного и военно-космического назначения.

Создание упрощенных моделей базировалось на общепризнанных методах и подходах [2–7], оказывающих влияние на результаты расчетов в допустимых пределах, таких как:

- *геометрическое упрощение*: игнорирование мелких деталей, а также отверстий, скруглений и фасок;

- *физическое упрощение*: исключение из рассмотрения зависимости физических характеристик материалов модели конструкций бортовой РЭА от времени, пространственных координат; интеграция (группировка) нескольких идентичных (схожих) по механическим характеристикам конструкций в одно целое. Физическое упрощение может сопровождаться геометрическим.

- *математическое упрощение*: контроль сеточных элементов; управление плотностью сетки (максимальные, минимальные размеры граней, поверхностей геометрии, конечных элементов расчетной сетки и др.).

Принятое физическое упрощение: характеристики материалов считаются изотропными. Это допущение обоснованно, так как для большинства материалов типична изотропия физических характеристик.

Принятое геометрическое упрощение: в несущей конструкции 2-го уровня проигнорированы монтажные отверстия. Это допущение внесет незначительную погрешность, но при этом позволит в значительной степени сократить число элементов и узлов конечно-элементной модели.

Исходные геометрические модели ЭРИ обладают высокой степенью детализации, что при последующем проведении расчетов приводит к увеличению размерности конечно-элементной модели. Поэтому проведение упрощения моделей ЭРИ, при сохранении адекватности результатов, позволит в большой степени сократить число элементов и узлов расчетной сетки.

Основным преимуществом упрощенных моделей ЭРИ вместо полных является простота геометрического представления. Это особо важно для моделирования бортовой РЭА, которая содержит десятки и сотни ЭРИ различного типа.

Задачей упрощения ЭРИ является нахождение таких моделей, которые будут оказывать на печатную плату воздействие, максимально приближенное к полным моделям.

Несмотря на то, что в элементах САН плата крепится на металлическую теплоотводящую пластину, для проверки адекватности упрощения моделей ЭРИ использовалась только пластина стеклотекстолита размером 30×30 мм и толщиной 1.5 мм. Таким образом, система моделирования становится более подверженной влиянию ЭРИ, что дает возможность более точного сравнения характеристик полной и упрощенной модели.

Анализ элементной базы САН показал, что в соответствии с требованиями к установке, формовке выводов и методами крепления элементов, ЭРИ можно разделить на следующие типы:

- 1) выводные элементы без дополнительного крепления корпуса;
- 2) выводные элементы с дополнительным креплением корпуса;
- 3) элементы с матрицей шариковых или столбиковых выводов;
- 4) безвыводные элементы с креплением на пайку металлизированных поверхностей;
- 5) безвыводные элементы с креплением на пайку металлизированных поверхностей и креплением на клей корпуса.

В качестве примера объекта исследования выбрана микросхема в корпусе 401.14-5.

При исследовании рассматривались три типа упрощенных моделей:

- модель одиночного корпуса (без выводов), рис. 1, б;
- габаритная модель корпуса ЭРИ, рис. 1, в;
- модель распределенной массы по габаритной площади корпуса, рис. 1, г.

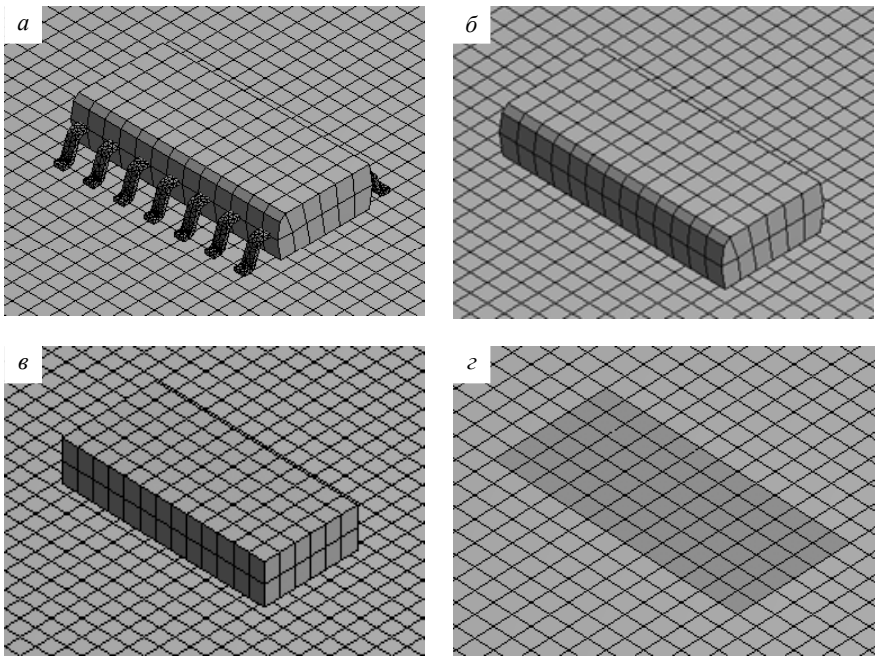


Рис. 1. Варианты моделирования ЭРИ: а – подробная геометрическая модель; б – модель одиночного корпуса; в – габаритная модель; г – модель распределенной массы по габаритной площади корпуса

В качестве основных результатов модального анализа приведены первые собственные частоты, время счета и количество разбиений модели (табл. 1).

Таблица 1

Результаты модального анализа моделей ЭРИ

Модели	Подробная геометрическая модель	Модель одиночного корпуса	Габаритная модель	Модель распределенной массы
Количество элементов	8868	4206	3466	4699
№ собственной частоты	Частота, Гц			
1	4889	4895	4883	4811
2	13565	13574	13565	13640
3	13778	13812	13803	13845
4	18064	18026	18034	17692
5	26534	26510	26330	25789
6	26819	26882	26729	26768
Время счета, с	13.1	7.3	6.4	7.8

Расхождение собственных частот упрощенной и подробной моделей приведено в табл. 2.

Таблица 2

Расхождение собственных частот упрощенной и полной модели (%)

Собственная частота	Модель одиночного корпуса	Габаритная модель	Модель распределенной массы
1	0.122	0.122	1.595
2	0.066	0.000	0.552
3	0.246	0.181	0.486
4	0.210	0.166	2.059
5	0.090	0.766	2.807
6	0.234	0.335	0.190

Сравнение результатов моделирования показывает, что наличие, расположение и формовка выводов ЭРИ не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на параметры взаимодействия с модельной платой. Следовательно, ЭРИ, имеющие большую контактную площадь корпуса, даже при наличии большого количества мелких выводов могут быть упрощены всеми моделями.

Исследование показало, что наиболее выгодными с точки зрения времени счета являются габаритная модель и модель распределенной массы. Стоит отметить, что габаритная модель имеет преимущество по точности по сравнению с другими моделями.

Для разработанной упрощенной модели конструкции САН была построена конечно-элементная модель (см. рис. 1).

Результаты моделирования

Результаты модального анализа конструкции элементов САН для наиболее значимых частот представлены на рис. 2 – 4.



Рис. 2. Деформация (перемещения) элементов САН по оси x на частоте 3647.61 Гц (18-я мода)



Рис. 3. Деформация (перемещения) элементов САН по оси y на частоте 4116.7 Гц (22-я мода)



Рис. 4. Деформация (перемещения) элементов САН по оси z на частоте 2750 Гц (11-я мода)

Согласно результатам численного моделирования, частота для первой моды – 1158.2 Гц, для второй – 1349.3 Гц, для третьей – 1467.5 Гц, что соответствует требованиям эксплуатации, заявленным в техническом задании на изделие (собственные частоты должны быть не менее чем 150 Гц).

Примечание: значения напряжений и деформаций в модальном анализе не являются информативными.

Выводы

1. Проведено компьютерное моделирование и получены собственные частоты конструкции бортовой РЭА КА.

2. Применение разработанных упрощенных моделей позволило сократить число узлов конечно-элементной сетки в 1.68 раза (с 637180 до 379274), элементов в 1.57 раза (с 338278 до 215464).

3. Согласно результатам компьютерного моделирования, доминирующей частотой по оси x является частота 3647.6 Гц (колеблется 63 % массы конструкции); по оси y – 4116.7 Гц (колеблется 37.72 % массы конструкции); по оси z – 2750 Гц (колеблется 20.16 % массы конструкции).

4. Колебания оставшейся массы конструкции САН распределено в пределах от 1158 до 10160 Гц, что соответствует требованиям эксплуатации, заявленным в ТЗ (собственные частоты должны быть не менее чем 150 Гц).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сунцов С.Б., Карабан В.М., Сухоруков М.П., Морозов Е.А. Численное моделирование напряженно деформированного состояния унифицированного электронного модуля // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 120–125.
2. Armstrong C., McKeag R., Ou H., Price M.A. Geometric processing for analysis // Proceedings of Geometric Modeling and Processing. 2000. P. 45–56.
3. Bronsvoort W., Bidarra R., Nyirenda P. Developments in feature modelling // Computer-Aided Design & Applications. 2006. No. 5. P. 655–664.
4. Lee S.H. Feature-based multiresolution modeling of solids // ACM Transactions on Graphics. 2005. No. 4. P. 1417–1441.
5. Lee S.H. Feature-based multi-resolution and multi-abstraction non-manifold modeling system to provide integrated environment for design and analysis of injection molding products / Sang Hun Lee, Kunwoo Lee, Kyu-Yeol Lee // Computers & Graphics. 2006. No. 3. P. 232–241.
6. Сунцов С.Б., Карабан В.М., Сухоруков М.П., Морозов Е.А. Создание упрощенной тепловой модели унифицированного электронного модуля // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 114–119.
7. Rezayat M. Midsurface abstraction from 3D solid models: general theory and applications // Computer-Aided Design. 1996. No. 28. P. 905–915.

Статья поступила 12.02.2015 г.

Sukhorukov M.P. NUMERICAL SIMULATION OF NATURAL FREQUENCIES OF THE SPACECRAFT RADIO ELECTRONIC EQUIPMENT

DOI 10.17223/19988621/36/11

The work presents results of numerical modeling of natural frequencies of onboard avionics in accordance with the actual conditions of operation. Simplified models of electric articles that reduce the number of elements and nodes of the finite element model are researched and developed with maintaining the accuracy of the results. The results of the simulation are presented.

Keywords: numerical modeling, natural frequencies, detailed model, simplified model, finite element model, onboard avionics, spacecraft.

SUKHORUKOV Maxim Petrovich (Graduate, Research Institute of Space Technology, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Max_sukhorukov@mail.ru

REFERENCES

1. Suntsov S.B., Karaban V.M., Sukhorukov M.P., Morozov E.A. Chislennoe modelirovanie napryazhenno deformirovannogo sostoyaniya unifitsirovannogo elektronnoy modulya. *Izv. vuzov. Fizika*, 2012, vol. 55, no. 9/3, pp. 120–125. (in Russian)
2. Armstrong C., McKeag R., Ou H., Price M.A. Geometric processing for analysis. *Proceedings of Geometric Modeling and Processing*, 2000, pp. 45–56.
3. Bronsvoort W., Bidarra R., Nyirenda P. Developments in feature modelling. *Computer-Aided Design & Applications*, 2006, no. 5, pp. 655–664.
4. Lee S.H. Feature-Based Multiresolution Modeling of Solids. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, no. 4, pp. 1417–1441.
5. Lee S.H. Feature-based multi-resolution and multi-abstraction non-manifold modeling system to provide integrated environment for design and analysis of injection molding products / Sang Hun Lee, Kunwoo Lee, Kyu-Yeol Lee. *Computers & Graphics*, 2006, no. 3, pp. 232–241.
6. Suntsov S.B., Karaban V.M., Sukhorukov M.P., Morozov E.A. Sozdanie uproszhchennoy teplovoy modeli unifitsirovannogo elektronnoy modulya. *Izv. vuzov. Fizika*, 2012, vol. 55, no. 9/3, pp. 114–119. (in Russian)
7. Rezayat M. Midsurface abstraction from 3D solid models: general theory and applications. *Computer-Aided Design*, 1996, no. 28, pp. 905–915.

УДК 532.517.4+621.928.93
DOI 10.17223/19988621/36/12

А.В. Шваб, В.Ю. Хайруллина, Е.В. Журавлев, Н.С. Евсеев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ЧАСТИЦАМИ МЕЖДУ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ДИСКАМИ

Проводится численное моделирование аэродинамики в воздушно-центробежном классификаторе, зона сепарации которого представляет собой вращающиеся профилированные дисковые элементы, между которыми наблюдается периодическое турбулентное закрученное течение в направлении к оси вращения. Нестационарный колебательный режим несущей среды имеет место за счет гармонических колебаний расхода несущей среды или окружающей составляющей вектора скорости на входе в сепарационную камеру. Создание нестационарного режима движения газовой фазы позволяет уменьшить время пребывания частиц граничного размера для повышения эффективности процесса классификации. Численное решение проводилось в ортогональной криволинейной системе координат на основе известной модели турбулентности Уилкокса.

Ключевые слова: воздушно-центробежный классификатор, зона сепарации, периодическое закрученное турбулентное течение газа, « $k-\omega$ »-модель турбулентности, численное моделирование.

В последнее время существенно возросли потребности в получении тонкодисперсных порошков заданного гранулометрического состава. Наиболее эффективными и экологически чистыми способами получения тонкодисперсных порошков являются пневматические методы переработки. На основе численных экспериментов определены физические особенности периодического режима течения, который получен колебанием расхода несущей среды с периодом, близким к времени динамической релаксации частицы граничного размера. Такой режим течения способствует более эффективному процессу разделения частиц по размерам и, таким образом, показывает перспективность использования патента [1], разработанного в Томском госуниверситете.

Физическая и математическая постановка задачи

Геометрия зоны сепарации воздушно-центробежного классификатора (рис.1) представляет собой два диска, вращающихся с определённой угловой скоростью Ω_d вокруг своей оси OZ . Верхний дисковый элемент является профилированным, а нижний – плоским. Расстояние между дисками увеличивается от периферии к оси вращения, во входном сечении это расстояние равно H . Такой способ изменения геометрии позволяет получить примерно постоянное значение среднерасходной радиальной составляющей скорости по длине сепарационной камеры. Через входное сечение $A-A$ в аппарат поступает воздушный поток с определённой угловой скоростью Ω_g и радиальной составляющей скорости газа U_1 . Затем он за счет перепада давления проходит рабочую зону аппарата и покидает его через сечение $C-C$. Через нижний патрубок (сечение R_2-R_3) подается дополнительный по-

ток газа Q_{add} с определённой угловой скоростью Ω_{add} с частицами, которые под действием центробежной и аэродинамической сил попадают в крупную и мелкую фракции. Причем мелкий продукт разделения за счет преобладания аэродинамической силы проходит через рабочую область и извлекается из сепарационного элемента в сечении $C-C$, а под действием центробежной силы извлечение крупной фракции производится в сечении $A-A$. Пунктиром на рисунке показаны три сечения: входное $A-A$, среднее $B-B$ и выходное $C-C$.

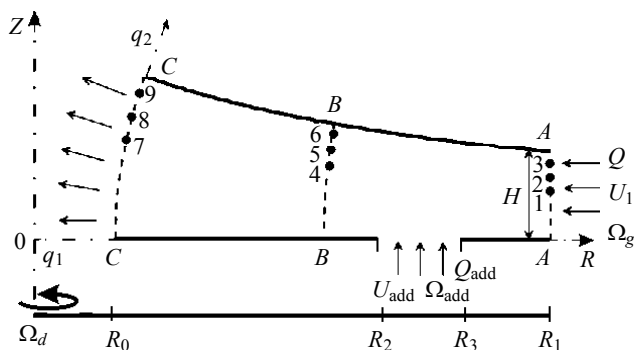


Рис. 1. Зона сепарации ВЦК с профилированным верхним диском

Был рассмотрен неустановившийся режим турбулентного закрученного течения, который получается за счёт колебаний радиальной скорости во входном сечении в зону сепарации (сечение $A-A$ на рис.1) по гармоническому закону с периодом колебаний T , близким к времени динамической релаксации транспортируемой шарообразной частицы граничного размера τ_p , т.е. по закону

$$U_r = U_1 \left[1 + A \sin \left(\frac{2\pi t}{\gamma \tau_p} \right) \right], \quad \tau_p = \frac{\rho_p \delta_{гр}^2}{18 \rho \nu}$$

или

$$U_\phi = U_{\phi,0} \left[1 + A_1 \sin \left(\frac{2\pi t}{\gamma \tau_p} \right) \right].$$

Здесь A , A_1 – амплитуды колебаний несущей среды, ν – её кинематический коэффициент вязкости, t – текущее время.

Исследование периодического режима течения начиналось с получения стационарного поля скорости [2]. Затем на это стационарное поле накладывались гармонические колебания. При наложении пульсаций на стационарный поток получается чисто нестационарное течение, которое со временем выходит на периодический режим. Для исследования влияния нестационарного поведения несущей среды в зоне сепарации был рассмотрен периодический режим турбулентного закрученного течения, который получается за счёт колебаний радиальной и окружной составляющих вектора скорости во входном сечении в зону сепарации (сечение $A-A$ на рис. 1) по гармоническому закону. Предпочтение отдано гармоническим колебаниям, так как гармоническая функция является непрерывной и гладкой. Следовательно, такой колебательный режим не приведет к разрывам и скачкам в течении несущей среды.

При расчете течений в областях, не имеющих прямоугольную форму, приходится рассматривать расчетные границы, не совпадающие в физическом пространстве с координатными линиями, поэтому вводятся преобразования физического пространства (R, Z, φ) к пространству $(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \varphi)$ обобщенных ортогональных криволинейных координат. Таким образом, при расчете течения в областях с профилированными дисками (рис.1) имеет место совпадение твердых стенок с координатными линиями. В результате в меридиональной плоскости будем иметь новую систему ортогональных координат:

$$\xi_1 = \frac{r^2}{2m} - \frac{z^2}{2}; \quad \xi_2 = z \left(\frac{r}{r_1} \right)^m.$$

Получим конформную разностную сетку, если проведем нормировку координат. В результате будем иметь

$$q_1 = \frac{\xi_1 - \xi_{1,\min}}{\xi_{1,\max} - \xi_{1,\min}} = \frac{\left(\frac{r^2}{2m} - \frac{z^2}{2} - \frac{r_1^2}{2m} + \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{r_0^2}{2m} - \frac{r_1^2}{2m} + \frac{1}{2} \right)},$$

$$q_2 = \frac{1}{s} \ln \left[(e^s - 1)(\xi_2 - 0.5) + \sqrt{e^s + (e^s - 1)^2 (\xi_2 - 0.5)^2} \right], \quad (1)$$

где

$$\xi_{1,\min} = \frac{r_1^2}{2m} - \frac{1}{2}; \quad \xi_{1,\max} = \frac{r_0^2}{2m}.$$

В формуле (1) для получения более точного численного решения проведено сгущение расчетной сетки вблизи твердых стенок рабочей зоны классификатора. Здесь q_2 – новая координата, которая также изменяется от нуля до единицы. Параметр $s > 0$ в зависимости (1) характеризует степень сгущения координатных линий ξ_2 вблизи стенок при линейном изменении q_2 . При значении $s = 0$, раскрывая неопределённость по правилу Лопиталья, получим $q_2 = \xi_2$, т.е. отсутствие сгущения координатных линий.

Из экспериментальных исследований известно, что реальный процесс разделения частиц в пневматических центробежных аппаратах происходит при турбулентном режиме течения. Для математического описания периодического закрученного турбулентного течения в сепарационных элементах ВЦК (рис.1) с профилированным верхним диском используется система дифференциальных уравнений Рейнольдса, записанная в криволинейной ортогональной системе координат. Эта система уравнений замыкается с помощью обобщённой гипотезы Буссинеска, согласно которой рейнольдсовы напряжения считаются пропорциональными скорости деформации осредненного течения с точностью до значения вихревой, турбулентной вязкости. Безразмерная форма уравнений получена путём введения масштабов длины H (расстояние между дисковыми элементами) и скорости U_1 (среднерасходное значение скорости на входе в сепарационную зону).

Уравнения Рейнольдса, приведенные к безразмерной и дивергентной форме в криволинейной ортогональной системе координат вращения $(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \varphi)$, имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} (u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} (u_2 H_3 H_1) = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& H_1 H_2 H_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[u_1^2 H_2 H_3 - \frac{H_2 H_3 (1 + v_t)}{H_1} \frac{\partial u_1}{\text{Re}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[u_1 u_2 H_3 H_1 - \frac{(1 + v_t) H_1 H_3}{\text{Re}} \frac{\partial u_1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right] = \\
& = -H_2 H_3 \frac{\partial p}{\partial \xi_1} - u_1 u_2 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} + u_2^2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} + u_3^2 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + u_2 \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} \right) \right] + \\
& + \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} H_3 \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_1} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right] \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} - \\
& - 2 \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left[\left(\frac{H_3}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + u_1 \frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} - \right. \\
& \left. - \left(u_1 \frac{H_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} + u_2 \frac{H_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} \right] - \frac{2}{3} H_1 H_2 H_3 \frac{\partial k}{\partial \xi_1}; \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_1 H_2 H_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[u_1 u_2 H_2 H_3 - \frac{(1 + v_t) H_2 H_3}{\text{Re}} \frac{\partial u_2}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[u_2^2 H_3 H_1 - \frac{(1 + v_t) H_1 H_3}{\text{Re}} \frac{\partial u_2}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right] = \\
& = -H_1 H_3 \frac{\partial p}{\partial \xi_2} - u_1 u_2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} + u_1^2 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} + u_3^2 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} H_2 H_3 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + u_1 \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right) \right] - \\
& - 2 \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} H_3 \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} \right] \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} + \\
& + \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} H_3 \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_1} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right] \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} - \\
& - 2 \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} H_1 \left[\frac{u_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right] \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} - \frac{2}{3} H_1 H_2 H_3 \frac{\partial k}{\partial \xi_2}; \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_1 H_2 H_3 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[u_1 u_3 H_2 H_3 - \frac{(1 + v_t) H_2 H_3}{\text{Re}} \frac{\partial u_3}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[u_2 u_3 H_1 H_3 - \frac{(1 + v_t) H_1 H_3}{\text{Re}} \frac{\partial u_3}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right] = \\
& = -u_1 u_3 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} - u_2 u_3 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left(u_3 \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left(u_3 \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right) \right] + \\
& + \frac{(1 + v_t)}{\text{Re}} \left[\left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} - u_3 \frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} + \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} - u_3 \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right]. \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ляме; Re – число Рейнольдса.

В настоящей работе используется известная дифференциальная « k – ω »-модель турбулентности Уилкокка. Согласно этой модели турбулентности, записываются два дополнительных уравнения переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций k и удельной скорости диссипации кинетической энергии ω :

$$H_1 H_2 H_3 \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[u_1 k H_2 H_3 - \frac{(1 + v_t \sigma^*)}{\text{Re}} \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial k}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[u_2 k H_1 H_3 - \frac{(1 + v_t \sigma^*)}{\text{Re}} \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial k}{\partial \xi_2} \right] = F_1; \quad (6)$$

$$H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[u_1 \omega H_2 H_3 - \frac{(1 + v_t \sigma^*)}{\text{Re}} \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[u_2 \omega H_1 H_3 - \frac{(1 + v_t \sigma^*)}{\text{Re}} \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} \right] = F_2; \quad (7)$$

$$F_1 = H_1 H_2 H_3 (G - \beta^* k \omega); \quad F_2 = H_1 H_2 H_3 \left(\alpha G \frac{\omega}{k} - \beta \omega^2 \right);$$

$$G = \frac{v_t}{\text{Re}} \left\{ 2 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} - \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} - \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{u_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \xi_2} \right)^2 \right\};$$

$$v_t = \text{Re} \frac{k}{\omega}.$$

Для получения единственного решения система уравнений Рейнольдса замыкается необходимыми граничными условиями. На входе в аппарат (сечение A – A рис. 1) осреднённое значение радиальной компоненты скорости задается в виде постоянного значения на основе экспериментальных данных, окружная компонента скорости определяется условием квазитвердого вращения газа $U_\varphi = \omega_r R_4$, а для аксиальной компоненты скорости используется условие $\partial u_z / \partial r = 0$. В безразмерном виде граничное условие для окружной компоненты скорости имеет вид $u_\varphi = \text{Rg} \cdot r$, где $\text{Rg} = \Omega_g H / U_1$, Ω_g – среднее значение угловой скорости вращения газа. На выходе из расчетной области (сечение C – C) для всех переменных задаются условия Неймана, т.е. равенство нулю производной $\partial / \partial r = 0$. На твердых стенках зоны сепарации используются условия прилипания, в силу которых радиальная и аксиальная компоненты скорости равны нулю. Для окружной компоненты скорости на вращающихся поверхностях ставится граничное условие вида $u_\varphi = \text{Rd} \cdot r$, где $\text{Rd} = \Omega_d H / U_1$, Ω_d – угловая скорость вращения дисковых элементов. Rg и Rd – безразмерные комплексы (обратные критерии Россби). Для прибавки к давлению на всех границах используются условия Неймана $\partial(\delta p) / \partial n = 0$ [3]. Удельная ско-

рость диссипации пульсационного движения на стенках определяется из равенства диффузии и диссипации в уравнении (7) [4].

Уравнения движения твердой частицы в безразмерном виде в цилиндрической системе координат можно представить как

$$\begin{aligned}\frac{dw_r}{d\tau} &= \frac{w_\varphi^2}{r} + \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi, \\ \frac{dw_\varphi}{d\tau} &= -\frac{w_\varphi w_r}{r} + \frac{u_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi, \\ \frac{dw_z}{d\tau} &= \frac{u_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}, \\ d\tau &= \frac{dr}{w_r} = \frac{rd\varphi}{w_\varphi} = \frac{dz}{w_z}.\end{aligned}$$

Здесь ξ – коэффициент, учитывающий отклонение коэффициента аэродинамического сопротивления частицы от его значения, найденного из закона Стокса; Fr , Stk , Re_p – соответственно критерии Фруда, Стокса и Рейнольдса частицы, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 2.64 \cdot 10^{-4} Re_p^{1.38}; \quad Re_p = \frac{\delta |\bar{U} - \bar{W}|}{\nu}; \\ Fr &= \frac{U_0^2}{gR_0}; \quad Stk = \frac{\rho_p}{\rho} \frac{\delta^2 U_0}{18\nu R_0},\end{aligned}$$

причем ρ , ρ_p – плотности несущей среды и твердой фазы соответственно; δ – диаметр шарообразной частицы; g – ускорение свободного падения.

Метод численного решения

Решение системы (2) – (7) проводилось в физических переменных «скорость-давление» на разнесённой разностной сетке. В качестве метода решения использовалась схема физического расщепления полей скорости и давления [5]. Система уравнений сводилась к решению уравнений переноса с помощью метода факторизации [6], который имеет второй порядок точности по времени. Конвективные члены уравнений переноса представлены с использованием экспоненциальной схемы, что обеспечивает второй порядок точности по координатам и снимает ограничение по сеточному числу Рейнольдса [3]. На каждом шаге по времени вводились дополнительные итерации для уточнения конвективных членов, а также для интегрирования уравнение Пуассона для поправки к давлению с необходимой точностью.

Традиционная методика решения нестационарных уравнений переноса заключается в организации итерационного процесса расчета. Причем необходимо получать решение с заданной точностью на каждом временном шаге. В работе предложена оригинальная методика решения нестационарных уравнений переноса, позволяющая существенно сократить время расчета задачи, которая в работе использовалась для решения уравнений переноса составляющих скорости и уравнения для давления [7]. Уравнение Пуассона для давления на каждом временном шаге решается до полного установления. Решение уравнений движения частицы

рассматривалось на основе неявной разностной схемы второго порядка точности по времени.

Анализ результатов

Достоверность численного решения проверялась тестовыми исследованиями на сеточную сходимость, а также сравнением с экспериментальными данными [8]. Достоверность решения нестационарной задачи подтверждается сравнением расчетных шагов по времени, которая показана на рис. 2.

На рис. 3 показано распределение радиальной (*а*) и окружной (*б*) компонент скорости во входном сечении (кривые 4–6) и выходном сечении (кривые 1–3) для стационарного и периодического турбулентного режима течения в разные моменты времени. Кругами на графиках изображены профили скоростей, характерные для стационарного режима течения, сплошной кривой – для периодического режима течения.

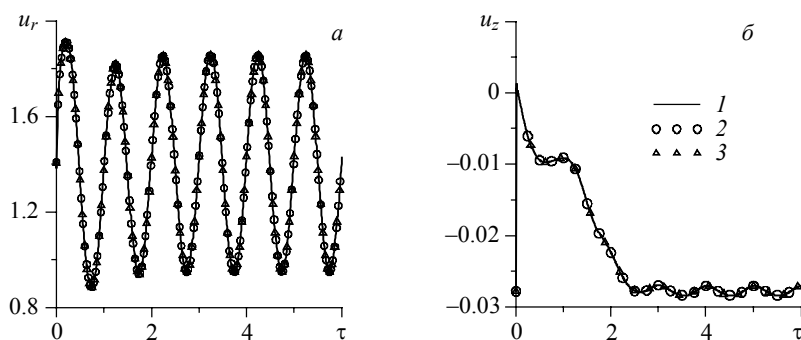


Рис. 2. Радиальная (*а*) и аксиальная (*б*) компоненты скорости в центральной точке среднего сечения (сечение *B–B*) по времени для нестационарного режима при параметрах $Re = 10$, $Rd = 1$, $Rg = 0$, $A = 0.3$, $m = 0.0001$; кр. 1 – $\Delta\tau = 0.0005$, кр. 2 – $\Delta\tau/2$, кр. 3 – $\Delta\tau/4$

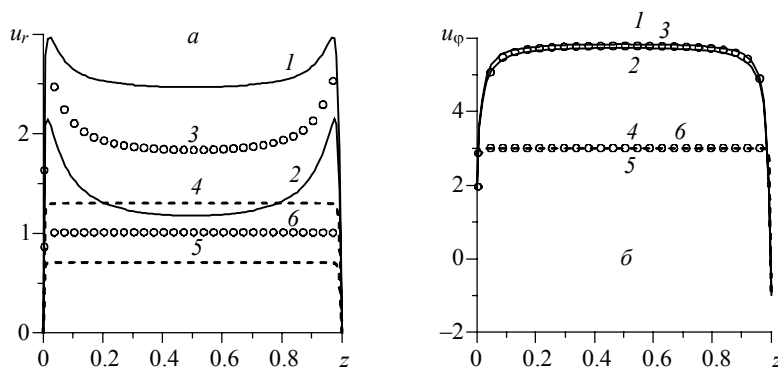


Рис. 3. Профили радиальной (*а*) и окружной (*б*) компонент скорости в зависимости от высоты сепарационной зоны z при параметрах $Re = 5000$, $A = 0.3$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.3$; кр. 1 и 2 соответствуют максимальное и минимальное значения радиальной скорости при периодическом режиме течения в выходном сечении, кр. 4 и 5 – соответственно во входном сечении, кр. 3 и 6 отражают стационарный режим течения

Радиальная составляющая скорости увеличивается с уменьшением радиуса и имеет два максимума скорости вблизи вращающихся дисковых элементов. Увеличение радиальной скорости объясняется уменьшением поверхности ($2\pi rH$), через которую движется газовый поток. Появление максимумов объясняется уменьшением центробежной силы вблизи стенок по сравнению с ядром потока и, как показывают численные исследования, величина максимумов скорости тем больше, чем больше параметр закрутки Rg газового потока. При периодическом режиме течения амплитуда колебаний радиальной скорости возрастает к выходному сечению, что объясняется увеличением средней радиальной скорости за счет уменьшения поперечного сечения камеры.

Влияние амплитуды колебаний радиальной и окружной составляющих вектора скорости несущей среды для турбулентного режима течения представлено на рис. 4. На графиках видно, что имеет место выход на периодический режим течения.

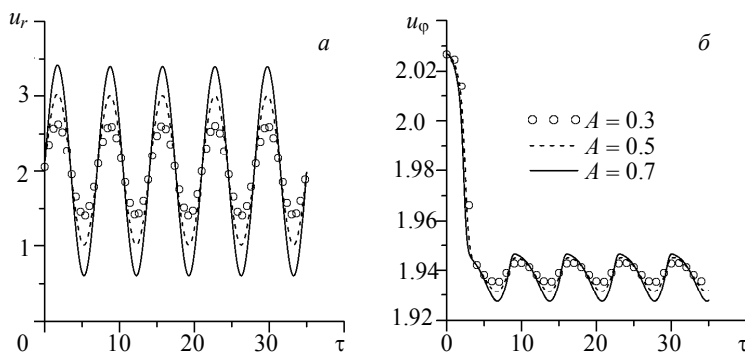


Рис. 4. Колебания радиальной (а) и окружной (б) компонент скорости в центральной точке выходного сечения (сечение C–C) по времени при параметрах $Re = 5000$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.1$

Проведено исследование по влиянию профилирования верхнего диска на течение газа в рабочей области центробежного аппарата. Для случая профилирования диска по закону $m = -1$ продольная составляющая скорости практически постоянна во всей зоне сепарации, что наблюдается на рис. 5, а. При дальнейшем расширении рабочей зоны происходит уменьшение продольной скорости газа и торможение несущей среды от входного к выходному сечению (рис. 5, б). При уменьшении расстояния между дисками (сужение зоны сепарации $m = 1$) происходит увеличение продольной скорости газа и разгон газового потока от входного к выходному сечению (рис. 5, в). На графиках видно, что отставания по фазе в колебаниях по времени нет.

На рис. 6 показано распределение радиальной и окружной составляющих вектора скорости при задании колебаний радиальной компоненты скорости во входном сечении, а на рис. 7 – распределение тех же составляющих вектора скорости при задании колебаний окружной скорости на входе в сепарационную камеру.

На рис. 8 изображены траектории движения частиц различного размера для случая стационарного закрученного турбулентного течения. Для данного конкретного режима течения на основе проведенных расчетов установлен диапазон граничных размеров частиц, значения которых изменяются в пределах: $30 \text{ мкм} < \delta_{\text{гр}} < 36 \text{ мкм}$.

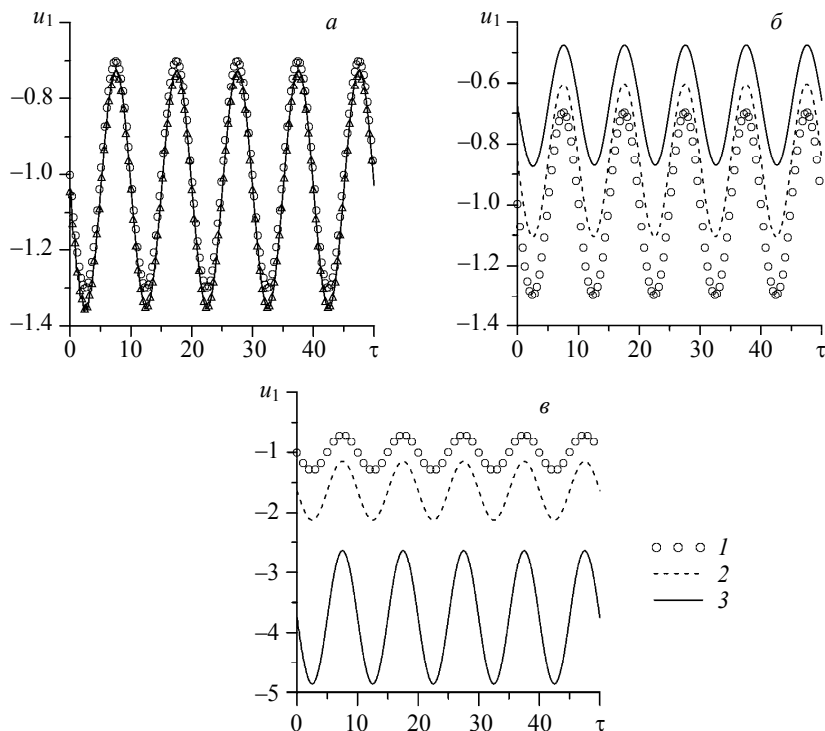


Рис. 5. Колебания значений радиальной компоненты скорости по времени при параметрах $Re = 5000$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.1$, $A = 0.3$, $Stk = 1$, $\gamma = 10$ при разном профилировании верхнего диска: $a - m = -1$; $б - m = -2$; $в - m = 1$; в трех точках по длине рабочей зоны классификатора: кр. 1 – центральная точка 1 в сечении $A-A$ ($Z/H = 0.5$), кр. 2 – центральная точка 4 в сечении $B-B$ ($Z/H = 0.5$), кр. 3 – центральная точка 7 в сечении $C-C$ ($Z/H = 0.5$)

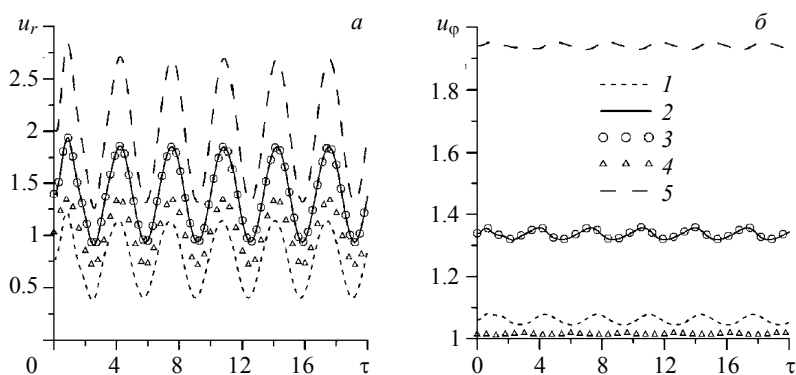


Рис. 6. Колебания значений радиальной (a) и окружной ($б$) компонент скорости по времени при параметрах $Re = 5000$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.1$, $A = 0.3$, $No = 14$ в пяти точках рабочей зоны классификатора при колебаниях радиальной компоненты на входе: кривые 1, 2, 3, 4, 5 – соответствуют распределениям радиальной и окружной скорости в зависимости от времени в точках 9, 1, 4, 6, 7 соответственно (рис. 1)

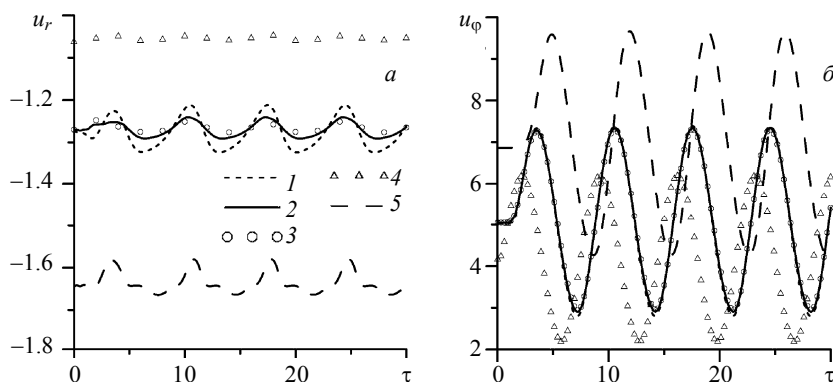


Рис. 7. Колебания значений радиальной (а) и окружной (б) компонент скорости по времени при параметрах $Re = 5000$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.1$, $A = 0.3$, $No = 14$. Обозначения кривых аналогичны обозначениям на рис. 6

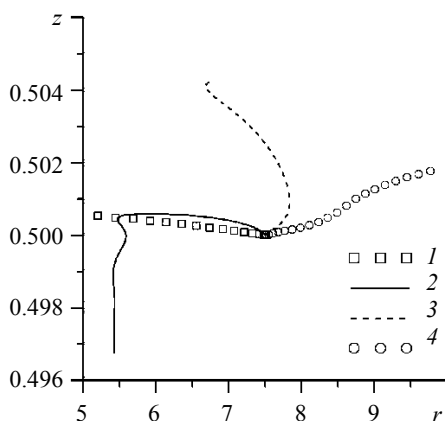


Рис. 8. Траектории движения частиц различного размера в стационарном турбулентном потоке при $Re = 5000$, $Rd = 0.1$, $Rg = 0.1$; кр. 1 – $Stk = 1$ ($\delta = 13.4$ мкм), кр. 2 – $Stk = 5$ ($\delta = 30$ мкм), кр. 3 – $Stk = 7$ ($\delta = 35.5$ мкм), кр. 4 – $Stk = 10$ ($\delta = 42.4$ мкм)

На рис. 9 представлены траектории движения частицы в рабочей зоне классификатора в турбулентном нестационарном потоке при различных периодах колебаний радиальной скорости во входном сечении. Из анализа этого графика следует, что критерий гомохронности колебательного движения существенно влияет на окончательное местоположение частицы.

В частности, при числе гомохронности $No = Stk$ частица «подвисает» в центре зоны классификации. При большем значении критерия No , например при $No = 2 Stk$ ($\gamma = No/Stk = 2$), частицы этого же размера проходят через всю рабочую область сепарации от входного сечения $A-A$ к выходному сечению $C-C$, попадая в мелкий продукт разделения. При ещё большем значении критерия гомохронности $No = 10 Stk$ ($\gamma = No/Stk = 10$) частицы граничного размера, войдя в междисковое пространство, возвращаются во входное сечение $A-A$ и попадают в крупный про-

дукт разделения. На графике хорошо видны участки замедления и ускорения частицы под действием колебаний несущей среды при периоде колебаний газа, равном времени динамической релаксации частицы $Ho = Stk$ (кривая 2 на рис. 9, б).

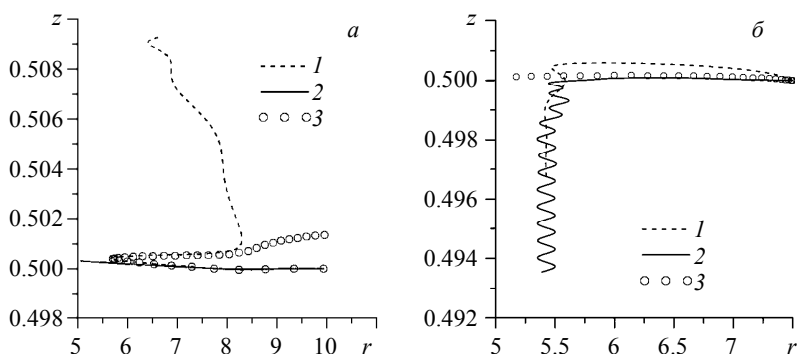


Рис. 9. Траектории движения частиц в рабочей зоне классификатора в турбулентном нестационарном потоке при различных периодах колебаний радиальной скорости во входном сечении $A-A$ при $Re = 5000$, $Rg = Rd = 0.1$: а – $A = 0.5$, $Stk = 7$ ($\delta = 35.5$ мкм), кр. 1 – $Ho = 7$, кр. 2 – $Ho = 14$, кр. 3 – $Ho = 70$; б – $A = 0.3$, $Stk = 5$ ($\delta = 30$ мкм), кр. 1 – без колебаний, кр. 2 – $Ho = 5$, кр. 3 – $Ho = 10$

В результате проведенного анализа показано, что введение периодического колебательного движения радиальной или окружной составляющей вектора скорости позволяет сократить время пребывания частиц, близких к граничному размеру, что препятствует образованию «жгутов» из частиц различных размеров и, следовательно, повышает эффективность процесса разделения. Проведенное исследование согласуется с опытными данными, полученными в патенте [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент РФ № 2407601, ПК B07B7/083, Способ воздушно-центробежной классификации порошков и устройство для его осуществления / Зятиков П.Н., Росляк А.Т., Васенин И.М., Шваб А.В., Демиденко А.А., Садретдинов Ш.Р. // Б.И. № 36, 27.12.2010.
2. Шваб А.В., Хайруллина В.Ю. Исследование закрученного турбулентного течения между вращающимися профилированными дисками // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45. № 5. С. 557–565.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
4. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA J. 1988. V. 26. No. 11. P. 1299–1310.
5. Chorin A.J. Numerical solution of Navier–Stokes equation // Math. Comput. 1968. V. 22. P. 745–762.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 271 с.
7. Шваб А.В., Хайруллина В.Ю. Исследование влияния нестационарного закрученного турбулентного течения на движение одиночной твердой частицы // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 47–53.
8. Shvab A.V., Evseev N.S. Studying the separation of particles in a turbulent vortex flow // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2015. V. 49. No. 2. P. 191–199.

Статья поступила 11.06.2015 г.

Shvab A.V., Khairullina V.Yu., Zhuravlev E.V., Evseev N.S. SIMULATION OF AN UNSTEADY AND PERIODIC SWIRLING TURBULENT FLOW WITH PARTICLES BETWEEN PROFILED DISCS

DOI 10.17223/19988621/36/12

This work deals with numerical modeling of aerodynamics in an air-centrifugal classifier, the separation zone of which consists of rotating profiled disk elements between which a periodic turbulent swirling flow in the direction of the axis of rotation is observed. The non-stationary oscillatory regime of the carrier medium occurs due to harmonic oscillations of the carrier medium flow or circumferential component of the velocity vector at the entrance into the separation chamber. Creating a non-stationary regime of motion of the gas phase allows one to reduce the residence time of the boundary particle size with the aim to enhance the process of classification. The numerical solution was carried out in the orthogonal curvilinear coordinate system based on the famous Wilcox turbulence model.

Keywords: air-centrifugal classifier, separation zone, periodic swirling turbulent gas flow, $k-\omega$ turbulence model, numerical modeling.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: evseevns@gmail.com

KHAIRULLINA Victoria Yurievna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vikushka1985@inbox.ru

ZHURAVLEV Evgeny Viktorovich (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: skripa4eg@gmail.com

EVSEEV Nikolay Sergeevich (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: evseevns@gmail.com

REFERENCES

1. Patent RF № 2407601, PK B07B7/083, Sposob vozdušno-tsentrobeznoy klassifikatsii poroshkov i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya / Zyatikov P.N., Roslyak A.T., Vasenin I.M., Shvab A.V., Demidenko A.A., Sadretdinov Sh.R. *B.I. no. 36, 27.12.2010.* (in Russian)
2. Shvab A.V., Khayrullina V.Yu. Issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya mezhdurashchayushchimisya profilirovannymi diskami. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2011, vol. 45, no. 5, pp. 557–565. (in Russian)
3. Patankar C. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 150 p. (in Russian)
4. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, 1988, vol. 26, no. 11, pp. 1299–1310.
5. Chorin A.J. Numerical solution of Navier–Stokes equation. *Math. Comput.*, 1968, vol. 22, pp. 745–762.
6. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostey, vol. 1*. Moscow, Mir Publ., 1991. 271 p. (in Russian)
7. Shvab A.V., Khayrullina V.Yu. Issledovanie vliyaniya nestatsionarnogo zakruchennogo turbulentnogo techeniya na dvizhenie odinochnoy tverдой chastitsy. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2011, vol. 52, no. 1, pp. 47–53. (in Russian)
8. Shvab A.V., Evseev N.S. Studying the separation of particles in a turbulent vortex flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2015, vol. 49, no. 2, pp. 191–199.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНДРОПОВА Антонина Олеговна – преподаватель физико-математической школы Томского государственного университета. E-mail: a.o.andropova@gmail.com

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ГУЛЬКО Сергей Порфирьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gulko@math.tsu.ru

ДЕМЕНТЬЕВ Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории проблем опасных космических объектов физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: daa024@ftf.tsu.ru

ДОБРИЦА Борис Тимофеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики МГТУ им. Н.Э. Баумана. E-mail: fs11@bmstu.ru

ДОБРИЦА Дмитрий Борисович – кандидат технических наук, начальник отдела ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». E-mail: dobrica@laspace.ru

ДОРОГОВ Юрий Иванович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Филиала ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» в г. Волжском. E-mail: ydorogov@yandex.ru

ЕВСЕЕВ Николай Сергеевич – аспирант кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: evseevns@gmail.com

ЖУРАВЛЕВ Евгений Викторович – аспирант кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: skripa4eg@gmail.com

КАЙГОРДОВ Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией фундаментальной и прикладной математики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: gazetaintegral@gmail.com

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета. E-mail: matvolegv@mail.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

НОРБОСАМБУЕВ Цырендоржи Дашацыренович – младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории алгебры и топологии Томского государственного университета. E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

РАЗИНА Анастасия Владимировна – аспирантка кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: anastacie.razina@mail.ru

СОЛОМИНА Анна Владимировна – аспирантка кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

СУХОРУКОВ Максим Петрович – аспирант, научный сотрудник НИИ космических технологий ТУСУР. E-mail: Max_sukhorukov@mail.ru.

ТИТОВА Анастасия Викторовна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: asya_mis@mail.ru

ФУКСОН Софья Леонидовна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

ХАЙРУЛЛИНА Виктория Юрьевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: vikushka1985@inbox.ru

ЧЕДУШЕВ Сергей Михайлович – студент Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: S.chedushev@yandex.ru

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: evseevns@gmail.com

