ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика и механика № 4(36)

УДК 515.127
DOI 10.17223/19988621/36/2

С.П. Гулько, А.В. Титова

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ S^1-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛИЭДРАХ

Исследуются пространства непрерывных S^1-значных функций на конечномерных полиэдрах. Доказывается, что если X есть n-мерный полиэдр и S^1 есть обычная окружность со стандартной топологией, то топологическая группа $C_p(X, S^1)$ изоморфна топологической группе $C_p(\Delta_n, S^1)$, где Δ_n – n-мерный симплекс, $n \geq 1$.

Ключевые слова: *пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости, полиэдр, топологическая группа, изоморфизм.*

Все неопределенные в статье понятия можно найти в [1].

Пусть S^1 – обычная окружность, которую будем рассматривать как фактор-группу R^1/Z с естественной топологией. Иначе говоря, это есть множество всех точек в R^1 с периодом 1. Множество всех представителей можно отождествить с множеством точек полуинтервала $[0,1)$. Это множество тогда будет топологической группой относительно операции сложения. В этой статье нас интересует пространство $C_p(X, S^1)$ всех напрерывных S^1-значных функций, наделенное топологией поточечной сходимости.

Как обычно, символом $C_p(Y, R^1)$ будем обозначать топологическое векторное пространство всех непрерывных вещественных функций со стандартными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Оператор $T : C_p(F, R^1) \to C_p(X, R^1)$ называется оператором продолжения, если F является замкнутым подпространством в X и $T(f)|_F = f$ для каждого $f \in C_p(Y, R^1)$. Если F есть замкнутое подмножество пространства X, то обозначим $C_p^0(X|_F, F^1) = \{f : X \to R^1; f|_F = 0\}$.

Теорема 1. Пусть X является метрическим пространством и F – его замкнутое подпространство, которое является окрестностным ретрактом. Тогда существует $T : C_p(F, R^1) \to C_p(X, R^1)$ – непрерывный линейный оператор продолжения, причем $0 \leq Tf < 1$ как только $0 \leq f < 1$.

Доказательство. Пусть O – окрестность множества F и $r : O \to F$ – непрерывная ретракция. Для каждой функции $f \in C_p(F, R^1)$ положим

$$T(f)(x) = \begin{cases} f(r(x)) \dfrac{\rho(x, X \setminus O)}{\rho(x, X \setminus O) + \rho(x, F)}, & x \in O; \\ 0, & x \in X \setminus O. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что T – линейный непрерывный оператор и $T(f)|_F = f$, т.е. это отображение является оператором продолжения. ■

Заметим, что линейный непрерывный оператор продолжения может существовать не только благодаря ретракциям (см. ниже доказательство следствия 5). Кроме того, для существования оператора продолжения метризуемость пространства X вовсе не является необходимым условием.

Из теоремы 1 следует, что для каждого замкнутого подмножества F в X пространство $C_p(F,R^1)$ вкладывается как замкнутое векторное подпространство в $C_p(X,R^1)$.

Кроме оператора продолжения *T*, нам понадобится еще один оператор. Для каждого замкнутого подмножества F в X определим оператор $U: C_p(F,R^1) \to C_p(F,S^1)$ формулой $U(f)(x) = e^{2\pi i f(x)}$, $x \in F$. Ясно, что $U(f+g) = U(f)\cdot U(g)$, т.е. этот оператор является непрерывным групповым гомоморфизмом. Из теоремы 1 следует, что оператор U переводит подмножество $C_p(F,[0,1))$ в точности на $C_p(F,S^1)$. Более того, нетрудно понять, что последний оператор имеет непрерывный правый обратный $U^{-1}: C_p(F,S^1) \to C_p(F,[0,1))$. Использование этих операторов приводит к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть X является метрическим пространством и F – его замкнутое подпространство. Композиция UTU^{-1} является непрерывным изоморфным вложением группы $C_p(F,S^1)$ в $C_p(X,S^1)$. Более того, группа $C_p(X,S^1)$ топологически изоморфна произведению $C_p(F,S^1) \times C_p^0(X|_F, S^1)$.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна из определения оператора U и теоремы 1. Далее искомый изоморфизм можно задать формулой $f \mapsto (f|_F, f - UTU^{-1}(f|_F))$, где T – оператор продолжения, построенный в предыдущей теореме. ■

Хорошо известно [1], что любой полиэдр является абсолютным окрестностным ретрактом в классе метрических пространств, т.е. он является ретрактом некоторой его окрестности в любом содержащем его метрическом пространстве, следовательно, для любого полиэдра X верны обе предыдущие теоремы.

Поскольку одноточечное подпространство всегда является ретрактом, то верно следующее утверждение.

Следствие 3. Для любой точки $x \in X$ выполнено

$$C_p(X,S^1) \cong S^1 \times C_p^0(X|_{\{x\}}, S^1). \ ■$$

Пусть дана дискретная последовательность компактных пространств X_n, тогда символом $(C_p(X_1,S^1)\times C_p(X_2,S^1)\times\cdots)_{c_0}$ будем обозначать аналог обычного c_0-произведения, т.е. совокупность точек вида $(f_1, f_2, \cdots)$ в декартовом произведении пространств вида $C_p(X_n,S^1)$, причем таких, что $\| f_n \| \to 0$, где $\| f_n \|$ обозначает максимальное отклонение точки $f_n(x)$ от двухточечного множества $\{0,1\}$

в $[0,1]$ (заметим, что если последовательность чисел сходится к 1, то она, как последовательность элементов S^1, стремится к 0).

Теорема 4. Пусть X есть топологическое пространство, представляющее собой сходящуюся последовательность вместе с ее пределом. Тогда

$$C_p(X,S^1) \cong (S^1 \times S^1 \times \cdots)_{c_0}.$$

Доказательство. Обозначим через F одноточечное множество, состоящее из предельной точки, и применим теорему 2 и следствие 3. ■

Из последних двух утверждений заключаем:

Следствие 5. Пусть X – топологическое пространство, содержащее сходящуюся последовательность (к точке x). Тогда $C_p(X,S^1) \cong C_p^0(X|_{\{x\}},S^1)$.

Доказательство. Пусть x_n – последовательность точек в X, которая сходится в x. Из следствия 3 вытекает, что

$$C_p(X,S^1) \cong S^1 \times C_p^0(X|_{\{x\}},S^1). \tag{1}$$

Пусть O_n – непересекающиеся окрестности точек x_n и f_n – последовательность непрерывных S^1-значных функций, которые равны 0 вне O_n и $f_n(x_n)=1/2$ для всех $n=1,2,\ldots$. Обозначим: $F=\{x_1,x_2,\ldots\}$ и определим линейный непрерывный оператор продолжения $T: C_p^0(F|_{\{x\}},S^1) \to C_p^0(X|_{\{x\}},S^1)$ формулой $T(f)(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)f_n(x)$. Формула $f \mapsto (f|_F, f-T(f|_F))$ вместе с формулой (1) и теоремой 4 доказывают утверждение. ■

Пространство $X|_F$ является метрическим компактом, которое получается из X в результате коллапсирования его замкнутого множества F в одну точку. Из теоремы 2 и следствия 5 вытекает,что справедливо следующее утверждение:

Следствие 6. Пусть X – метрический компакт. Тогда $C_p(X,S^1)$ изоморфно $C_p(F,S^1)\times C_p(X|_F,S^1)$ для каждого замкнутого подмножества F в X. ■

Для дальнешего понадобится следующий общий прием построения изоморфизмов между пространствами функций, который в функциональном анализе называется «схемой Пелчинского». Применим эту схему для рассматриваемых топологических групп, но это не меняет сути дела.

Теорема 7 (Схема Пелчинского). Пусть E и G – топологические группы, для которых выполняются следующие три условия:

1) $E \cong G \times H$ – для некоторой топологической группы H;
2) $G \cong E \times P$ – для некоторой топологической группы P;
3) $E \cong (E \times E \cdots)_{c_0}$.

Тогда $E \cong G$.

Доказательство. Имеем

$$G \cong E\times P \cong (E\times E\times\cdots)_{c_0}\times P \cong (E\times E\times\cdots)_{c_0}\times E\times P \cong (E\times E\times\cdots)_{c_0}\times G \cong$$

$$((G\times H)\times(G\times H)\times\cdots)_{c_0}\times G \cong ((G\times H)\times(G\times H)\times\cdots)_{c_0} \cong (E\times E\times\cdots)_{c_0} \cong E. \ ■$$

Теорема 8. Если G изоморфно $(E\times E\times\cdots)_{c_0}$, то G изоморфно своей c_0-степени $(G\times G\times\cdots)_{c_0}$.

Доказательство.

$$G\cong(E\times E\times\cdots)_{c_0}\cong((E\times E\times\cdots)_{c_0}\times(E\times E\times\cdots)_{c_0}\times\cdots)_{c_0}\cong(G\times G\times\cdots)_{c_0}.\ \blacksquare$$

Теорема 9. Пусть $n\geq 1$. Для n-мерного симплекса Δ_n выполнено

$$C_p(\Delta_n,S^1)\cong(C_p(\Delta_n,S^1)\times C_p(\Delta_n,S^1)\times\cdots)_{c_0},$$

и, тем более, $C_p(\Delta_n,S^1)$ изоморфно любой своей конечной степени.

Доказательство. Пусть x_0 – вершина симплекса Δ_n и F_0 – противоположная этой вершине грань. Пусть $F_1,F_2,\ldots$ – последовательность параллельных этой грани сечений симплекса, которая «сходится» к точке x_0. Тогда множество $F=\{x_0\}\cup F_0\cup F_1\cup\ldots$ является замкнутым подмножеством в Δ_n. По теореме 2 группа $C_p(\Delta_n,S^1)$ топологически изоморфна $C_p(F,S^1)\times C_p^0(\Delta|_F,S^1)$. Заметим далее, что фактор-пространство $\Delta|_F$ является одноточечной компактификацией счетной дискретной суммы попарно гомеоморфных между собой пространств (равно открытому множеству всех точек между параллельными сечениями F_{n-1} и F_n), которую обозначим через $(\oplus_\omega Y)$. Кроме того, множества F_n попарно между собой гомеоморфны. Суммируя эти факты, заключаем, что $C_p(\Delta_n,S^1)$ топологически изоморфно счетному c_0-произведению попарно изоморфных между собой сомножителей вида $C_p(Y\oplus F_n,S^1)$. Остается применить теорему 8. ■

Если дан конечный набор $X_1,\cdots,X_n$ топологических пространств, то символом $X_1\vee\cdots\vee X_n$ обозначим букет этого семейства, который получается, если в каждом $X_k, k=1,\cdots,n$, фиксируется одна точка и все эти точки отождествляются между собой.

Теорема 10. Если $X=\Delta_n\vee\ldots\vee\Delta_n$ – букет симплексов, то $C_p(X,S^1)$ изоморфно $C_p(\Delta_n,S^1)$.

Доказательство. Пусть x_0 – центральная точка букета. По следствию 5 $C_p(X,S^1)\cong C_p^0(X|_{\{x_0\}},S^1)$. Ясно, что

$$C_p^0(X|_{\{x_0\}},S^1)\cong C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}},S^1)\times\ldots\times C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}},S^1).$$

Но по тому же следствию 5 $C_p^0(\Delta_n|_{\{x_0\}},S^1)\cong C_p(\Delta_n,S^1)$. Остается применить теорему 9. ■

Теорема 11. Если $k<n$, то $C_p(\Delta_n,S^1)\cong C_p(\Delta_n,S^1)\times C_p(\Delta_k,S^1)$.

Доказательство. По теореме 9 пространство $C_p(\Delta_n,S^1)$ топологически изоморфно своей счетной c_0-степени. Кроме того, каждая из двух групп $C_p(\Delta_n,S^1)$ и

$C_p(\Delta_n, S^1) \times C_p(\Delta_k, S^1)$ вкладывается в другое в качестве прямого сомножителя. Остается применить теорему 7. ■

Для полиэдра X через $X^{(n)}$ обозначим его n-мерный остов, т.е. объединение всех симплексов размерности $\le n$. Множество $X^{(n)}$ является замкнутым подмножеством в X.

Теорема 12. Пусть X – n-мерный полиэдр, $n \ge 1$. Тогда

$$C_p(X, S^1) \cong C_p(\Delta_n, S^1).$$

Доказательство проведем по индукции. Если $n = 1$, то $X^{(0)}$ есть множество всех вершин полиэдра X. Ясно, что множество $X^{(0)}$ конечно. Имеем $C_p(X, S^1) \cong C_p(X^{(0)}, S^1) \times C_p(X_{X^{(0)}}, S^1)$. Первый сомножитель есть конечная степень топологической группы S^1, а второй – изоморфен пространству всех непрерывных S^1-значных функций на букете окружностей, и тогда по теореме 10 последний изоморфен конечной степени группы $C_p(\Delta_1, S^1)$. Эти утверждения вместе со следствием 3 показывают, что $C_p(X, S^1) \cong C_p(\Delta_1, S^1)$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $X^{(n-1)}$ – остов комплекса X. Тогда

$$C_p(X, S^1) \cong C_p(X^{(n-1)}, S^1) \times C_p^0(X|_{X^{(n-1)}}, S^1).$$

По предположению индукции $C_p(X^{(n-1)}, S^1)$ изоморфно $C_p(\Delta_{(n-1)}, S^1)$, а второй сомножитель по теоремам 9, 10 и следствию 3 изоморфен $C_p(\Delta_n, S^1)$. Осталось применить теорему 11. ■

В связи с теоремой 12 возникает теперь вопрос о ее обобщении, т.е. будут ли неизморфными топологические группы $C_p(X, S^1)$ и $C_p(Y, S^1)$, если размерности полиэдров X и Y не совпадают? Заметим, что в статье [2] вторым автором настоящей статьи было доказано, что размерность компактов является инвариантом изоморфизма соответствующих пространств непрерывных S^1-значных функций, если S^1 кроме естественной операции наделено также некоторой дополнительной операцией, при которой S^1 становится так называемым топологическим почти модулем.

Авторы выражают благодарность Л.В. Гензе и Т.Е. Хмылевой за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 291 с.
2. *Титова А.В.* Линейные гомеоморфизмы топологических почти модулей непрерывных функций и совпадение размерностей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 43–48.

Статья поступила 12.05.2015 г.

Gulko S. P., *Titova A. V.* ON CLASSIFICATION OF SPACES OF CONTINUOUS S^1-VALUED FUNCTIONS ON POLIHYDRONS

DOI 10.17223/19988621/36/2

In this paper, the spaces of continuous S^1-valued functions $C_p(X,S^1)$ are considered. It is proved that if X is a n-dimensional polihydron and S^1 is a circle which is considered as a topological group, then the topological group $C_p(X,S^1)$ is topologically isomorphic to $C_p(\Delta_n,S^1)$, where Δ_n is an n-dimensional simplex, $n\geq 1$.

Keywords: almost ring, topological almost module, continuous homomorphism, space of continuous functions, polihydron, isomorphism.

GULKO Sergey Porfiryevich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

TITOVA Anastasiya Viktorivna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: asya_mis@mail.ru

REFERENCES

1. Borsuk K. *Teoriya retraktov*. Moskow, Mir Publ., 1971. 291 p. (in Russian)
2. Titova A.V. Lineynye gomeomorfizmy topologicheskikh pochti moduley nepreryvnykh funktsiy i sovpadenie razmernostey. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 43–48. (in Russian)