ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 4(36)

УДК 512.541
DOI 10.17223/19988621/36/3

Е.В. Кайгородов, С.М. Чедушев

КОХОПФОВЫ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Получены общие свойства кохопфовых абелевых групп, в частности, связанные с прямыми разложениями. Кроме того, представлено обозрение известных результатов о кохопфовых алгебраических системах, изучение которых приобретает в последнее время все большую актуальность.

Ключевые слова: *абелева группа*, *кохопфова группа*, *прямая сумма*, *вполне инвариантная подгруппа*, *кольцо обобщенных матриц.*

1. Введение

В 1932 г. швейцарский математик Хайнц Хопф (1894–1971) поставил следующий вопрос: может ли конечно порожденная группа быть изоморфной своей собственной фактор-группе? В соответствии с этим группа G называется *хопфовой*, если всякий ее сюръективный эндоморфизм является изоморфизмом. Двойственным образом, группа G называется *кохопфовой*, если любой ее инъективный эндоморфизм является изоморфизмом.

Изучению кохопфовых (некоммутативных) групп посвящены работы Бэра [1], Гонзалез-Акуны и Уиттена [2], Потягайло и Вана [3], Ошики и Потягайло [4], Зелы [5], Вана и Ву [6], Вана и Чжоу [7], Део и Варадараджана [8], Белла и Маргалита [9], Ли [10], Эндимиони [11], Кейна и Мальцева [12].

Начало систематическому изучению кохопфовых групп было, по-видимому, положено Бэром в 40-е годы прошлого века. В статье [1] автор указывает на ряд условий, когда группа не имеет собственных изоморфных себе подгрупп. Группы, обладающие таким свойством, были названы Бэром S-группами. Эта же работа содержит интересные результаты, касающиеся связей свойств хопфовости и кохопфовости в группах.

Гонзалез-Акуна и Уиттен [2] поставили вопрос о кохопфовости фундаментальных групп трехмерных многообразий. Они ответили на этот вопрос для многообразий Хакена, край которых является непустым объединением торов. Позднее, Потягайло и Ван [3] сформулировали гипотетическое необходимое и достаточное условие кохопфовости фундаментальной группы трехмерного многообразия, удовлетворяющего гипотезе геометризации Тёрстона, доказали необходимость и достаточность этого условия, правда, последнюю – при некоторых дополнительных предположениях.

Внимание многих специалистов привлекают кохопфовы клейновы и гиперболические группы. Так, Ван и Чжоу [7], исследуя кохопфовы клейновы группы, установили, что фактор-группа кохопфовой группы может не быть кохопфовой, и указали на существование кохопфовой группы, содержащей нормальную подгруппу конечного индекса, не являющуюся кохопфовой.

Белл и Маргалит [9] занимались изучением кохопфовых групп кос. Они доказали, что группа B_n кос на n нитях не кохопфова, и осветили ряд вопросов, затрагивающих смежные темы.

Кохопфовы кольца и модули, а также близкие к ним классы изучали Варадараджан [13–15], Сюэ [16], Хагани, Асгари и Ведади [17–21], Лю, Ган и Фань [22–25], Горбани и Хагани [26, 27], Ван [28], Дивани-Азар и Мафи [29], Хмайму, Кайди и Санчес Кампос [30], Айдогду и Озджан [31], Янь и Лю [32], Цзяо [33], Ван и Ли [34], Дьялло, Мауйя и Сангаре [35, 36].

Весьма содержательные и глубокие результаты в этой области представлены в трудах Варадараджана. Автор распространяет понятия хопфовости и кохопфовости на модули, кольца, алгебры и топологические пространства, приводит яркие, любопытные примеры и обозначает открытые вопросы. В работе [14] дается детальный обзор результатов, касающихся хопфовых и кохопфовых объектов в различных конкретных категориях, таких, как категории модулей, колец и топологических пространств. Статья [15] посвящена *антихопфовым* и *антикохопфовым*[1] модулям.

Интересные классы модулей, «родственные» кохопфовым – *полу*(*ко*)*хопфовы*[2], *сильно* (*ко*)*хопфовы*[3], *обобщенно хопфовы*[4] и *слабо кохопфовы*[5] модули – указаны в статьях [21, 26, 27, 30, 31]. Эти статьи насыщены свежими идеями, каждая из них является замечательным вкладом в теорию модулей. Круг вопросов, рассматриваемых авторами в этих работах, чрезвычайно широк.

Исследования по кохопфовым абелевым группам очень немногочисленны и носят незавершенный характер. Тем не менее результаты этих исследований выразительны и многоценны. Наиболее значительными являются работы Такаши и Ирвина [37, 38], Голдсмита и Гонга [39–42], Дикраниана, Голдсмита, Сальче и Занардо [43]. К числу новейших работ относятся статьи Голдсмита и Гонга, в которых, наряду с хопфовыми и кохопфовыми абелевыми группами, рассматриваются *супер*(*ко*)*хопфовы*[6] и *наследственно* (*ко*)*хопфовы*[7] абелевы группы, а также обсуждаются некоторые прилегающие проблемы. У Дикраниана, Голдсмита, Сальче и Занардо [43], а позднее – у Голдсмита и Гонга [40] хопфовы и кохопфовы абелевы группы возникают при изучении алгебраической и сопряженной энтропий абелевых групп.

Другие классы абелевых групп, граничные с классом кохопфовых абелевых групп, освещены в литературе намного лучше. Так, абелевы группы, содержащие

---

[1] Ненулевой модуль M называется *антихопфовым* (*антикохопфовым*), если он не является простым и изоморфен любому своему нетривиальному фактор-модулю (соотвественно подмодулю).

[2] Модуль M называется *полухопфовым* (*полукохопфовым*), если ядро (соответственно образ) любого сюръективного (соответственно инъективного) эндоморфизма модуля M выделяется в M прямым слагаемым, т. е. любой сюръективный (соответственно инъективный) эндоморфизм модуля M расщепляется.

[3] R-модуль M называется *сильно хопфовым* (*сильно кохопфовым*), если для каждого эндоморфизма φ модуля M возрастающая (соответственно убывающая) цепь $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^n \subseteq \cdots$ (соответственно $\operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}\varphi^n \supseteq \cdots$) стабилизируется.

[4] Модуль M называется *обобщенно хопфовым*, если ядро любого сюръективного эндоморфизма модуля M является косущественным (малым) подмодулем модуля M.

[5] Модуль M называется *слабо кохопфовым*, если образ любого инъективного эндоморфизма модуля M является существенным (большим) подмодулем модуля M. Легко усмотреть, что понятие слабо кохопфова модуля двойственно (в теоретико-категорном смысле) понятию обобщенно хопфова модуля.

[6] Группа G называется *суперхопфовой* (*суперкохопфовой*), если любой гомоморфный образ группы G есть хопфова (соответственно кохопфова) группа.

[7] Группа G называется *наследственно хопфовой* (*наследственно кохопфовой*), если любая подгруппа группы G хопфова (соответственно кохопфова).

собственную подгруппу, изоморфную самой группе[8], изучал Бьюмонт [44], он называл их I-группами. Автор показал, что всякая примарная абелева группа, разложимая в бесконечную прямую сумму коциклических групп, является I-группой. I-модули исследовались в [45] Бьюмонтом и Пирсом. Ими установлено, что R-модуль без кручения M, не являющийся делимым, является I-модулем, а любой периодический модуль M конечного ранга не является I-модулем. В [46] кроме I-групп рассматривались IP-группы (абелевы группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе) и ID-группы (абелевы группы, изоморфные собственному прямому слагаемому). С.Я. Гриншпон и М.М. Никольская [47–50] ввели понятие IF-группы (абелевы группы, изоморфные собственной вполне характеристической подгруппе) и изучали IF-группы в различных классах абелевых групп. Е.В. Кайгородовым [51–54] представлены результаты по описанию хопфовых групп в конкретных классах абелевых групп и изучению их общих свойств.

Кроули [55] построил пример бесконечной примарной кохопфовой абелевой группы без элементов бесконечной высоты. В работе [56] Хилл и Меджиббен представили более общую и простую конструкцию кохопфовых примарных абелевых групп, чем Кроули. В своей работе они также показали, что для того, чтобы бесконечная редуцированная примарная абелева группа была кохопфовой, необходимо, чтобы она была неограниченной, несчетной и имела конечные инварианты Ульма–Капланского.

В [57] Монк исследовал абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе. Голдсмит, Охогейн и Валлутис [58] изучали *квазиминимальные*[9], *сервантно квазиминимальные*[10] и *прямо квазиминимальные*[11] группы. А.Р. Чехлов и П.В. Данчев [59] рассматривали абелевы группы, у которых все собственные вполне инвариантные подгруппы изоморфны.

Почему в последнее время возрастает внимание алгебраистов к кохопфовым алгебраическим системам? Дело в следующем. Общеизвестно, что *вопросы, касающиеся отображений алгебраических систем и их подсистем, а также связей отображений со свойствами самих систем, имеют важное, если не первостепенное значение при описании рассматриваемых алгебраических систем, т. е. при построении соответствующей структурной теории.* Поэтому и неудивительно, что во второй половине XX – начале XXI века, когда получают интенсивное развитие такие важнейшие разделы современной алгебры, как теории групп, абелевых групп, колец, модулей, решеток, направление исследований, связанное с кохопфовым свойством в перечисленных алгебраических системах и смежными вопросами, приобретает все большую актуальность.

Условимся о следующем. Далее всюду рассматриваются исключительно абелевы группы, поэтому под термином «группа» понимается аддитивно записанная абелева группа. По мере надобности приводятся необходимые определения и результаты. Значком ■ обозначается конец доказательства или его отсутствие.

---

[8] Согласно принятой терминологии, группы, изоморфные некоторой своей собственной подгруппе, называются *некохопфовыми*.

[9] Абелева группа, изоморфная всем своим подгруппам такой же мощности, как сама группа, называется *квазиминимальной*.

[10] Абелева группа, изоморфная всем своим сервантным подгруппам такой же мощности, как сама группа, называется *сервантно квазиминимальной*.

[11] Абелева группа, изоморфная всем своим прямым слагаемым такой же мощности, как сама группа, называется *прямо квазиминимальной*.

2. Общие свойства кохопфовых абелевых групп

С целью придать данному в первой параграфе настоящей работы определению кохопфовой группы законченный и удобный вид вынесем его отдельно, а также сформулируем еще одно эквивалентное определение кохопфовой группы.

Определение 1. Группа A называется *кохопфовой*, если всякий мономорфизм группы A на себя является автоморфизмом.

Определение 2. Группа A называется *кохопфовой*, если она не имеет собственных изоморфных себе подгрупп.

Начнем с доказательства хорошо известной и простой, но весьма полезной теоремы, которая позволит сделать некоторые выводы о связи свойств конечности и кохопфовости.

Теорема 1. *Любая конечная группа кохопфова.*

Доказательство. Пусть дана конечная группа A, $|A|=n$, и пусть B – собственная подгруппа группы A. Порядок подгруппы B обозначим буквой s. Имеем $A \ncong B$. Действительно, по теореме Лагранжа n делится на s. Отсюда $n>s$, так как подгруппа B собственная. Итак, $|A|>|B|$, следовательно, группы A и B не изоморфны и группа A кохопфова. ■

Данная теорема говорит о том, что класс кохопфовых групп, как и класс хопфовых групп, содержит все конечные группы. Вместе с тем, этот класс содержит группы, лишь в каком-то смысле близкие к конечным группам. Более точно, свойства хопфовости и кохопфовости представляют собою одни из важнейших *обобщений конечности*. Эта точка зрения отражена в книгах Куроша [60] и Гретцера [61]. Через многие теоремы о кохопфовых абелевых группах красной нитью проходит идея конечности, представленной в различных своих видах.

Теорема 2. *Если $A=B\oplus C$ и A – кохопфова группа, то группы B и C кохопфовы.*

Доказательство. Пусть дана прямая сумма $A=B\oplus C$, и пусть A – кохопфова группа. Покажем, что группы B и C также кохопфовы. Предположим противное, т. е. пусть, например, группа B не кохопфова. Это означает, что существует мономорфизм $\varphi: B\to B$, не являющийся автоморфизмом, т.е. $\operatorname{Im}\varphi \subsetneqq B$. Определим гомоморфизм $\psi: A\to A$, полагая $\psi(a)=\varphi(b)+id_C(c)$ для любого $a=b+c$, где $b\in B$, $c\in C$. Имеем

$$\psi(a)=\psi(b+c)=\varphi(b)+id_C(c)=\varphi(b)+c.$$

Ясно, что гомоморфизм ψ инъективен. В самом деле, из $\varphi(b)+c=0$ выводим $\varphi(b)=0$ и $c=0$, откуда $b=c=0$, а, стало быть, и $a=0$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\psi=0$. При этом $\operatorname{Im}\psi=\operatorname{Im}\varphi\oplus C$. Так как $\operatorname{Im}\varphi\subsetneqq B$, то $\operatorname{Im}\psi\subsetneqq B\oplus C$, т. е. $\operatorname{Im}\psi\neq A$ и ψ не является эпиморфизмом. Получили противоречие с тем, что группа A кохопфова. Таким образом, прямые слагаемые B и C суть кохопфовы группы. ■

Легко проверить, что доказанная теорема обобщается на случай, когда количество прямых слагаемых в разложении группы A бесконечно. Приходим к важному следствию.

Следствие 3. *Пусть A_i $(i\in I)$ – семейство групп, где множество индексов I произвольно, и пусть группа $A=\bigoplus_{i\in I}A_i$ кохопфова. Тогда для каждого $i\in I$ группа A_i кохопфова.* ■

Далее задаемся вопросом: допускает ли обращение теорема 2 в каком-либо случае? Отвечаем положительно на этот вопрос в теореме 5.

В линейной алгебре хорошо известно матричное представление линейных преобразований. Используя прямые разложения, можно получить подобное представление эндоморфизмов абелевых групп определенными матрицами, называемыми формальными или обобщенными. Для удобства чтения приведем соответствующие хорошо известные построения (см., например, [62, теорема 3.11]).

Пусть дана прямая сумма групп $A=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$. Рассмотрим квадратную матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\ldots,n}$ с элементами $\alpha_{ji}\in \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$. Для таких матриц можно определить обычные для матриц операции сложения и умножения. Нетрудно убедиться, что сложение и умножение обобщенных матриц всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида. В результате получаем кольцо матриц указанного вида (кольцо обобщенных матриц).

Теорема 4 [62, теорема 3.11]. *Кольцо эндоморфизмов группы* $A=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$ *изоморфно кольцу обобщенных матриц* $\|\alpha_{ji}\|$ *порядка* n.

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i \mid i=1,\ldots,n\}$ – полная ортогональная система проекций, соответствующих данному разложению группы A. Произвольный элемент $a\in A$ равен сумме $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i a$. Для любого $\alpha\in \mathrm{E}(A)$ имеем

$$\alpha a=\sum_{i=1}^{n}\alpha(\varepsilon_i a)=\sum_{i,\,j=1}^{n}(\varepsilon_j\alpha\varepsilon_i)a.$$

Сопоставим эндоморфизму α матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\ldots,n}$, $f:\alpha\mapsto\|\alpha_{ji}\|$, где $\alpha_{ji}=\varepsilon_j\alpha\varepsilon_i$. Можно отождествить $\varepsilon_j\mathrm{E}(A)\varepsilon_i$ с $\mathrm{Hom}(\varepsilon_i A,\varepsilon_j A)$, т. е. с $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)$. Если $\beta\in \mathrm{E}(A)$ и $\|\beta_{ji}\|$ – соответствующая матрица с $\beta_{ji}=\varepsilon_j\beta\varepsilon_i$, то матрицы, соответствующие $\alpha-\beta$ и $\alpha\beta$, – это разность $\|\alpha_{ji}-\beta_{ji}\|$ и произведение $\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\beta_{ki}\|$ матриц $\|\alpha_{ji}\|$ и $\|\beta_{ji}\|$. Следовательно, f – кольцевой гомоморфизм. Понятно, что нулевой матрице соответствует лишь нулевой эндоморфизм группы A. Обратно, пусть $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\ldots,n}$ – некоторая матрица с элементами $\alpha_{ji}\in\varepsilon_j\mathrm{E}(A)\varepsilon_i$. Определим $\alpha\in \mathrm{E}(A)$, положив для $a\in A$

$$\alpha a=\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ji}a.$$

Тогда $f:\alpha\mapsto\|\alpha_{ji}\|$. Таким образом, f – изоморфизм колец. ■

Остановимся подробно на простейшем случае, когда $A=A_1\oplus A_2$. Пусть ε_1 и ε_2 – соответствующие ортогональные проекции. Тогда имеем: $\varepsilon_1|_{A_1}=id_{A_1}$,

$\varepsilon_1|_{A_2} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_1} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_2} = id_{A_2}$. Другими словами, представляя произвольный элемент $a \in A$ в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, получим $\varepsilon_1 a = a_1$, $\varepsilon_2 a = a_2$, откуда $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1_A$. Согласно теореме 4, получаем

$$\mathrm{E}(A) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{E}(A_1) & \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \\ \mathrm{Hom}(A_1, A_2) & \mathrm{E}(A_2) \end{pmatrix}.$$

Каждому эндоморфизму $\alpha \in \mathrm{E}(A)$ поставим в соответствие обобщенную матрицу

$$f : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1\alpha\varepsilon_1 & \varepsilon_1\alpha\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2\alpha\varepsilon_1 & \varepsilon_2\alpha\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

или, согласуясь со введенными выше обозначениями,

$$f : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем некоторый элемент z группы A. Запишем $z = x + y$, где $x \in A_1$, $y \in A_2$. При соответствии f действию эндоморфизма α на элементе z отвечает умножение матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Выясним, как действуют эндоморфизмы α_{ji} на элементах групп A_1 и A_2. Пусть $x \in A_1$ и $\alpha(x) = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Тогда $\alpha_{11}(x) = x_1$, $\alpha_{21}(x) = x_2$. Аналогично, если $y \in A_2$ и $\alpha(y) = y_1 + y_2$, где $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$, то $\alpha_{12}(y) = y_1$, $\alpha_{22}(y) = y_2$.

Если $A = A_1 \oplus A_2$ и $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = 0$ (т. е. подгруппа A_1 вполне инвариантна в группе A), то будем иметь

$$\mathrm{E}(A) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{E}(A_1) & \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \\ 0 & \mathrm{E}(A_2) \end{pmatrix}.$$

В теории модулей известен следующий важный факт. Если M – R-S-бимодуль, то верхние треугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, образуют кольцо, называемое кольцом обобщенных треугольных матриц второго порядка. Несложно показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

обратима в этом кольце тогда и только тогда, когда элемент u обратим в кольце R, а элемент v обратим в кольце S.

Теперь может быть доказана теорема, указывающая на один из случаев обращения теоремы 2.

Теорема 5. *Если $A = B \oplus C$, а прямые слагаемые B и C кохопфовы и, кроме того, подгруппа B вполне инвариантна в группе A, то A – кохопфова группа.*

Доказательство. Зафиксируем некоторый мономорфизм $\alpha : A \to A.$ Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Сначала покажем, что $\alpha_{22} : C \to C$ – автоморфизм. Так как α – мономорфизм, то равенство $\alpha(z) = 0,$ где $z \in A,$ выполняется тогда и только тогда, когда $z = 0.$ Запишем $z = x + y,$ $x \in B,$ $y \in C.$ Из матричного равенства

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентного системе
$$\begin{cases} \alpha_{11}(x) + \alpha_{12}(y) = 0, \\ \qquad\quad \alpha_{22}(y) = 0, \end{cases}$$

следует, что обязательно $x = y = 0.$ Тот факт, что равенство $\alpha_{22}(y) = 0$ имеет место лишь при $y = 0,$ означает, что α_{22} – мономорфизм. Поскольку группа C кохопфова, то α_{22} является также и автоморфизмом.

Теперь проверим, будет ли автоморфизмом отображение $\alpha_{11} : B \to B.$ Если это отображение не инъективно, то в группе B найдется такой ненулевой элемент $x,$ что $\alpha_{11}(x) = 0.$ Полагая $y = 0,$ будем иметь $z = x + 0 = x \neq 0.$ Тогда

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11}(x) = 0.$$

Получили противоречие с тем, что α – мономорфизм и $\operatorname{Ker}\alpha = 0.$ Следовательно, α_{11} – мономорфизм. По условию теоремы группа B кохопфова, поэтому α_{11} есть автоморфизм группы $B.$ Следовательно, матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

обратима, т.е. мономорфизм α является автоморфизмом. Итак, группа A хопфова. ■

Дадим необходимое и достаточное условие кохопфовости прямой суммы произвольного числа групп, опять-таки с использованием свойства вполне инвариантности последних в прямой сумме.

Теорема 6. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ *и все прямые слагаемые* A_i *вполне инвариантны в группе* $A.$ *Тогда группа* A *кохопфова, если и только если каждая группа* A_i *кохопфова.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Если группа A кохопфова, то по следствию 3 все прямые слагаемые A_i кохопфовы.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть все прямые слагаемые A_i – кохопфовы группы. Если φ – мономорфизм группы $A,$ то понятно, что ограничения φ_i этого мономорфизма на каждом прямом слагаемом, $\varphi_i : A_i \to A_i,$ тоже будут мономорфизмами. Все эти мономорфизмы будут и автоморфизмами, так как каждое прямое слагаемое A_i – кохопфова группа. Тогда, очевидно, что φ – автоморфизм. ■

Теорема 7. Если B – кохопфова группа без кручения, а C – конечная группа, то группа $A = B \oplus C$ кохопфова.

Доказательство. По теореме 1 прямое слагаемое C есть кохопфова группа. Поскольку всякая конечная группа является периодической, то $\mathrm{Hom}(C, B) = 0$ [63, §43], а это значит, что подгруппа C вполне инвариантна в группе A. Остается применить теорему 5. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baer R.* Groups without proper isomorphic quotient groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. No. 4. P. 267–278.
2. *Gonzales-Acuna F. and Whitten W.* Embeddings of three-manifold groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. No. 474.
3. *Потягайло Л., Ван Ш.* О кохопфовости фундаментальных групп трехмерных многообразий // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. Вып. 5. С. 197–220.
4. *Ohshika K. and Potyagailo L.* Self-embeddings of Kleinian groups // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1998. V. 31. No. 3. P. 329–343.
5. *Sela Z.* Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie algebras II // Geometric and Fundamental Analysis. 1997. V. 7. No. 3. P. 561–593.
6. *Wang S.C. and Wu Y.Q.* Covering invariant and cohopficity of 3-manifold groups // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 68. P. 203–224.
7. *Wang S.C. and Zhou Q.* Embeddings of Kleinian groups with torsion // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2001. V. 17. No. 1. P. 21–34.
8. *Deo S. and Varadarajan K.* Hopfian and co-Hopfian groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. V. 56. No. 1. P. 17–24.
9. *Bell R.W. and Margalit D.* Braid groups and the co-Hopfian property // J. Algebra. 2006. V. 303. No. 1. P. 275–294.
10. *Li Y.* On the Cohopficity of the Direct Product of Cohopfian Groups // Comm. Algebra. 2007. V. 35. No. 10. P. 3226–3235.
11. *Endimioni G.* Hopficity and co-Hopficity in soluble groups // Ukr. Math. J. 2004. V. 56. No. 10. P. 1594–1601.
12. *Cain A.J. and Maltcev V.* Hopfian and co-hopfian subsemigroups and extensions // Demonstratio Mathematica. 2014. V. 47. No. 4. P. 791–804.
13. *Varadarajan K.* Hopfian and co-Hopfian objects // Publ. Math. 1992. V. 36. P. 293–317.
14. *Varadarajan K.* Some recent results on Hopficity, co-Hopficity and related properties // International Symposium on Ring Theory. Birkhäuser-Boston: Trends in Math., 2002. P. 371–392.
15. *Varadarajan K.* Anti Hopfian and anti co-Hopfian modules // Contemporary Mathemathics. 2008. V. 456. P. 205–218.
16. *Xue W.* Hopfian modules and co-Hopfian modules // Comm. Algebra. 1995. V. 23. No. 4. P. 1219–1229.
17. *Asgari Sh.* On weakly co-Hopfian modules // B. Iran. Math. Soc. 2007. V. 33. No. 1. P. 65–72.
18. *Haghany A.* Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 477–492.
19. *Haghany A. and Vedadi M. R.* Modules whose injective endomorphisms are essential // J. Algebra. 2001. V. 243. P. 765–779.
20. *Asgari Sh., Haghany A. and Vedadi M. R.* Quasi co-Hopfian modules and applications // Comm. Algebra. 2008. V. 36. No. 5. P. 1801–1816.
21. *Asgari Sh. and Haghany A.* Densely co-Hopfian modules // J. Algebra Appl. 2010. V. 9. No. 6. P. 989–1000.
22. *Fan Y. and Liu Z.* Co-Hopfian modules of generalized inverse polynomials // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2001. V. 17. No. 3. P. 431–436.
23. *Gang Y. and Liu Z.* On Hopfian and co-Hopfian modules // Vietnam J. Math. 2007. V. 35. No. 1. P. 73–80.

24. *Gang Y. and Liu Z.* On generalizations of Fitting modules // Indian J. Math. 2009. V. 51. No. 1. P. 85–99.
25. *Gang Y. and Liu Z.* Notes on generalized Hopfian and weakly co-Hopfian modules // Comm. Algebra. 2010. V. 38. P. 3556–3566.
26. *Ghorbani A. and Haghany A.* Generalized Hopfian modules // J. Algebra. 2002. V. 255. P. 324–341.
27. *Ghorbani A. and Haghany A.* Duality for weakly co-Hopfian and generalized Hopfian modules // Comm. Algebra. 2003. V. 31. P. 2811–2817.
28. *Wang Y.* Generalizations of Hopfian and co-Hopfian modules // Int. J. Math. Sci. 2005. V. 9. P. 1455–1460.
29. *Divaani-Aazar K. and Mafi A.* Hopfian and co-Hopfian modules over commutative rings // Vietnam J. Math. 2007. V. 35. No. 3. P. 275–283.
30. *Hmaimou A.*, *Kaidi A. and Campos E. S.* Generalized Fitting modules and rings // J. Algebra. 2007. V. 308. P. 199–214.
31. *Aydoğdu P. and Özcan A. Ç.* Semi co-Hopfian and semi Hopfian modules // East-West J. Math. 2008. V. 10. No. 1. P. 57–72.
32. *Yan X.F. and Liu Z.* Extensions of generalized Fitting modules // J. Math. Res. Exp. 2010. V. 30. No. 3. P. 407–414.
33. *Jiao Y.J.* Semi Hopfian and semi co-Hopfan modules over generalized power series rings // Int. J. Algebra. 2012. V. 6. No. 5–8. P. 209–218.
34. *Wang X. and Li T.* A Generalization of Weakly Co-hopfian Modules // Int. Math. Forum. 2014. V. 9. No. 6. P. 255–258.
35. *Diallo E.*, *Maaouia M. and Sanghare M.* Hopfian Objects, Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left *A*-Modules // Int. Math. Forum. 2013. V. 8. No. 39. P. 1903–1920.
36. *Diallo E.*, *Maaouia M. and Sanghare M.* Strongly Hopfian and Strongly Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left *A*-Modules // J. Math. Res. 2014. V. 6. No. 3. P. 81–90.
37. *Irwin J. M. and Takashi J.* A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups // Pacif. J. Math. 1969. V. 29. No. 1. P. 151–160.
38. *Takashi J. and Irwin J.M.* A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2 // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1969. V. 20. No. 4. P. 194–203.
39. *Goldsmith B. and Gong K.* On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Arch. Math. 2012. V. 99. No. 1. P. 1–8.
40. *Goldsmith B. and Gong K.* On adjoint entropy of Abelian groups // Comm. Algebra. 2012. V. 40. P. 972–987.
41. *Goldsmith B. and Gong K.* A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. Dublin: AMS forthcoming, 2012. P. 1–9.
42. *Goldsmith B. and Gong K.* On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Acta Math. Hung. 2013. V. 139. No. 4. P. 393–398.
43. *Dikranjan D.*, *Goldsmith B.*, *Salce L. and Zanardo P.* Algebraic entropy for Abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361. No. 7. P. 3401–3434.
44. *Beaumont R.A.* Groups with isomorphic proper subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51. P. 381–387.
45. *Beaumont R.A. and Pierce R.S.* Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 91. P. 209–219.
46. *Beaumont R.A. and Pierce R.S.* Isomorphic direct summands of Abelian groups // Math. Annal. 1964. V. 153. P. 21–37.
47. *Гриншпон С.Я.*, *Никольская* (*Савинкова*) *М.М.* *IF*-группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 5–14.
48. *Гриншпон С.Я.*, *Никольская* (*Савинкова*) *М.М.* Примарные *IF*-группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15). С. 25–31.
49. *Гриншпон С.Я.*, *Никольская* (*Савинкова*) *М.М.* Собственные вполне характеристические подгруппы групп без кручения, изоморфные самой группе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 25–30.

50. *Гриншпон С.Я.*, *Никольская* (*Савинкова*) *М.М.* Периодические *IF*-группы // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 8. С. 47–58.
51. *Кайгородов Е.В.* Хопфовы абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2(18). С. 5–12.
52. *Кайгородов Е.В.* О двух классах хопфовых абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2(22). С. 22–33.
53. *Кайгородов Е.В.* Хопфовы вполне разложимые группы без кручения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 24–28.
54. *Кайгородов Е. В.* Хопфовы алгебраически компактные абелевы группы // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 6. С. 667–675.
55. *Crawley P.* An infinite primary Abelian group without proper isomorphic subgroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 463–467.
56. *Hill P. and Megibben Ch.* On primary groups with countable basic subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. No. 1. P. 49–59.
57. *Monk G. S.* Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. 1970. V. 14. No. 1. P. 164–177.
58. *Goldsmith B.*, *Ohogain S. and Wallutis S.* Quasi-minimal groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. No. 8. P. 2185–2195.
59. *Chekhlov A. R. and Danchev P. V.* On Abelian Groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Comm. Algebra. 2015.
60. *Курош А.Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
61. *Гретцер Г.* Общая теория решеток: пер. с англ. / под ред. Д.М. Смирнова. М.: Мир, 1981. 456 с.
62. *Крылов П.А.*, *Михалев А.В.*, *Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с. (Advanced Studies in Mathematics and Mechanics; Вып. 2).
63. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.

Статья поступила 13.02.2015 г.

Kaigorodov E.V., *Chedushev S. M.* CO-HOPFIAN ABELIAN GROUPS

DOI 10.17223/19988621/36/3

In recent years, the interest in co-Hopfian algebraic systems has been growing steadily, with a great number of publications on the topic. However, the studies on co-Hopfian Abelian groups are represented only by individual works. It is therefore natural that there is quite a lot of interesting and important but still open questions related to co-Hopfian Abelian groups. One of these concerns the description of co-Hopfian groups in specific classes of Abelian groups. Consequently, the study of co-Hopfian Abelian groups and their properties is of particular interest.

The first section of this paper contains a detailed review of known results on co-Hopfian algebraic systems, the primary emphasis being on co-Hopfian Abelian groups. Special attention is paid to co-Hopfian rings and modules. Some of the major results obtained by specialists in the last half-century are considered in detail.

In the second section we obtain the general properties of co-Hopfian Abelian groups. For instance, we prove the co-Hopficity of direct summands of a co-Hopfian Abelian group. We point to one of the cases in which the co-Hopficity of an Abelian group should follow from the co-Hopficity of direct summands in the decomposition of this group. Finally, we give a necessary and sufficient condition of the co-Hopficity of a direct sum of an arbitrary number of Abelian groups on one assumption.

Keywords: Abelian group, co-Hopfian group, direct sum, fully invariant subgroup, generalized matrix ring.

KAIGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: gazetaintegral@gmail.com

CHEDUSHEV Sergei Mikhailovich (Gorno-Altaisk State University,
Gorno-Altaisk, Russian Federation)
E-mail: S.chedushev@yandex.ru

REFERENCES

1. Baer R. Groups without proper isomorphic quotient groups. *Bull. Amer. Math. Soc*., 1944, vol. 50, no. 4, pp. 267–278.
2. Gonzales-Acuna F. and Whitten W. Embeddings of three-manifold groups. *Mem. Amer. Math. Soc*., 1992, vol. 99, no. 474.
3. Potyagailo L. and Wang S. 3-manifolds with co-Hopfian fundamental group. *St. Petersburg. Math. J*., 2000, vol. 11, no. 5, pp. 861–881.
4. Ohshika K. and Potyagailo L. Self-embeddings of Kleinian groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*., 1998, vol. 31, no. 3, pp. 329–343.
5. Sela Z. Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie algebras II. *Geometric and Fundamental Analysis*, 1997, vol. 7, no. 3, pp. 561–593.
6. Wang S.C. and Wu Y.Q. Covering invariant and cohopficity of 3-manifold groups. *Proc. London Math. Soc*., 1994, vol. 68, pp. 203–224.
7. Wang S.C. and Zhou Q. Embeddings of Kleinian groups with torsion. *Acta Math. Sin*. (Engl. Ser.), 2001, vol. 17, no. 1, pp. 21–34.
8. Deo S. and Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian groups. *Bull. Austral. Math. Soc*., 1997, vol. 56, no. 1, pp. 17–24.
9. Bell R.W. and Margalit D. Braid groups and the co-Hopfian property. *J. Algebra*, *2006*, vol. 303, no. 1, pp. 275–294.
10. Li Y. On the Cohopficity of the Direct Product of Cohopfian Groups. *Comm. Algebra*, 2007, vol. 35, no. 10, pp. 3226–3235.
11. Endimioni G. Hopficity and co-Hopficity in soluble groups. *Ukr. Math. J*., 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1594–1601.
12. Cain A.J. and Maltcev V. Hopfian and co-hopfian subsemigroups and extensions. *Demonstratio Mathematica*, 2014, vol. 47, no. 4, pp. 791–804.
13. Varadarajan K. Hopfian and co-Hopfian objects. *Publ. Math*., 1992, vol. 36, pp. 293–317.
14. Varadarajan K. Some recent results on Hopficity, co-Hopficity and related properties. *International Symposium on Ring Theory. Birkhäuser-Boston: Trends in Math*., 2002, pp. 371–392.
15. Varadarajan K. Anti Hopfian and anti co-Hopfian modules. *Contemporary Mathemathics*, 2008, vol. 456, pp. 205–218.
16. Xue W. Hopfian modules and co-Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 4, pp. 1219–1229.
17. Asgari Sh. On weakly co-Hopfian modules. *B. Iran. Math. Soc*., 2007, vol. 33, no. 1, pp. 65–72.
18. Haghany A. Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts. *Comm. Algebra*, 1999, vol. 27, pp. 477–492.
19. Haghany A. and Vedadi M. R. Modules whose injective endomorphisms are essential. *J. Algebra*, 2001, vol. 243, pp. 765–779.
20. Asgari Sh., Haghany A. and Vedadi M. R. Quasi co-Hopfian modules and applications. *Comm. Algebra*, 2008, vol. 36, no. 5, pp. 1801–1816.
21. Asgari Sh. and Haghany A. Densely co-Hopfian modules. *J. Algebra Appl*., 2010, vol. 9, no. 6, pp. 989–1000.
22. Fan Y. and Liu Z. Co-Hopfian modules of generalized inverse polynomials. *Acta Math. Sin.* (Engl. Ser.), 2001, vol. 17, no. 3, pp. 431–436.
23. Gang Y. and Liu Z. On Hopfian and co-Hopfian modules. *Vietnam J. Math*., 2007, vol. 35, no. 1, pp. 73–80.

24. Gang Y. and Liu Z. On generalizations of Fitting modules. *Indian J. Math.*, 2009, vol. 51, no. 1, pp. 85–99.
25. Gang Y. and Liu Z. Notes on generalized Hopfian and weakly co-Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 2010, vol. 38, pp. 3556–3566.
26. Ghorbani A. and Haghany A. Generalized Hopfian modules. *J. Algebra*, 2002, vol. 255, pp. 324–341.
27. Ghorbani A. and Haghany A. Duality for weakly co-Hopfian and generalized Hopfian modules. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, pp. 2811–2817.
28. Wang Y. Generalizations of Hopfian and co-Hopfian modules. *Int. J. Math. Sci.*, 2005, vol. 9, pp. 1455–1460.
29. Divaani-Aazar K. and Mafi A. Hopfian and co-Hopfian modules over commutative rings. *Vietnam J. Math.*, 2007, vol. 35, no. 3, pp. 275–283.
30. Hmaimou A., Kaidi A. and Campos E. S. Generalized Fitting modules and rings. *J. Algebra*, 2007, vol. 308, pp. 199–214.
31. Aydoğdu P. and Özcan A. Ç. Semi co-Hopfian and semi Hopfian modules. *East-West J. Math.*, 2008, vol. 10, no. 1, pp. 57–72.
32. Yan X.F. and Liu Z. Extensions of generalized Fitting modules. *J. Math. Res. Exp.*, 2010, vol. 30, no. 3, pp. 407–414.
33. Jiao Y.J. Semi Hopfian and semi co-Hopfan modules over generalized power series rings. *Int. J. Algebra*, 2012, vol. 6, no. 5–8, pp. 209–218.
34. Wang X. and Li T. A Generalization of Weakly Co-hopfian Modules. *Int. Math. Forum*, 2014, vol. 9, no. 6, pp. 255–258.
35. Diallo E., Maaouia M. and Sanghare M. Hopfian Objects, Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A-Modules. *Int. Math. Forum*, 2013, vol. 8, no. 39, pp. 1903–1920.
36. Diallo E., Maaouia M. and Sanghare M. Strongly Hopfian and Strongly Cohopfian Objects in the Category of Complexes of Left A-Modules. *J. Math. Res.*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 81–90.
37. Irwin J. M. and Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups. *Pacif. J. Math.*, 1969, vol. 29, no. 1, pp. 151–160.
38. Takashi J. and Irwin J.M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 1969, vol. 20, no. 4, pp. 194–203.
39. Goldsmith B. and Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Arch. Math.*, 2012, vol. 99, no. 1, pp. 1–8.
40. Goldsmith B. and Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups. *Comm. Algebra*, 2012, vol. 40, pp. 972–987.
41. Goldsmith B. and Gong K. *A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups*. Dublin, AMS forthcoming, 2012, pp. 1–9.
42. Goldsmith B. and Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Acta Math. Hung.*, 2013, vol. 139, no. 4, pp. 393–398.
43. Dikranjan D., Goldsmith B., Salce L. and Zanardo P. Algebraic entropy for Abelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 361, no. 7, pp. 3401–3434.
44. Beaumont R.A. Groups with isomorphic proper subgroups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, vol. 51, pp. 381–387.
45. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, vol. 91, pp. 209–219.
46. Beaumont R.A. and Pierce R.S. Isomorphic direct summands of Abelian groups. *Math. Annal.*, 1964, vol. 153, pp. 21–37.
47. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. IF-gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2010, no. 1(9), pp. 5–14. (in Russian)
48. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Primarnye IF-gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 3(15), pp. 25–31. (in Russian)
49. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Sobstvennye vpolne kharakteristicheskie podgruppy grupp bez krucheniya, izomorfnye samoy gruppe. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 1(17), pp. 25–30. (in Russian)

50. Grinshpon S.Ya., Nikol'skaya (Savinkova) M.M. Periodicheskie IF-gruppy. *Fundament. i prikl. matem.*, 2012, vol. 17, no. 8, pp. 47–58. (in Russian)
51. Kaygorodov E.V. Khopfovy abelevy gruppy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 2(18). C. 5–12.
52. Kaygorodov E.V. O dvukh klassakh khopfovykh abelevykh grupp. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 2(22), pp. 22–33. (in Russian)
53. Kaygorodov E.V. Khopfovy vpolne razlozhimye gruppy bez krucheniya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 4(24), pp. 24–28. (in Russian)
54. Kaigorodov E.V. Hopfian algebraically compact Abelian groups. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 442–447.
55. Crawley P. An infinite primary Abelian group without proper isomorphic subgroups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 68, pp. 463–467.
56. Hill P. and Megibben Ch. On primary groups with countable basic subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 124, no. 1, pp. 49–59.
57. Monk G.S. Abelian -groups without proper isomorphic pure dense subgroups. *Ill. J. Math.*, 1970, vol. 14, no. 1, pp. 164–177.
58. Goldsmith B., Ohogain S. and Wallutis S. Quasi-minimal groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 132, no. 8, pp. 2185–2195.
59. Chekhlov A. R. and Danchev P. V. On Abelian Groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic. *Comm. Algebra*, 2015.
60. Kurosh A.G. *The Theory of Groups* (2 vols.). New York, Chelsea Publishing Company, 1960. 612 p.
61. Gratzer G. *General Lattice Theory*. New York, Academic Press, 1978. 404 p.
62. Krylov P.A., Mikhalev A.V., and Tuganbaev A.A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003. 442 p.
63. Fuks L. *Beskonechnye abelevy gruppy*, vol. *1*. Moskow, Mir Publ., 1974. 336 p. (in Russian)