УДК 512.541
DOI 10.17223/19988621/36/5

А.В. Разина

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ГОЛОМОРФЫ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Рассматриваются нормальные подгруппы относительного голоморфа абелевой группы. Доказаны некоторые свойства нормальной подгруппы относительного голоморфа. Доказывается определяемость свободной абелевой группы своим относительным голоморфом.

Ключевые слова: *голоморф, относительный голоморф, свободная абелева группа, нормальная подгруппа, относительно голоморфно изоморфные группы.*

При изучении голоморфов абелевых групп важное место занимает вопрос об определяемости группы своим относительным голоморфом (голоморфом).

Исследованию нормальных подгрупп голоморфов абелевых групп и определяемости абелевых групп своими голоморфами посвящен ряд работ И.Х. Беккера, И.Э. Гриншпон, С.Я. Гриншпона, В.Х. Миллса (см. например, [1–4]).

Пусть G – абелева группа и пусть Φ – некоторая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$ (группы её автоморфизмов).

Относительный голоморф $\Gamma(G, \Phi)$ группы G – это множество пар вида (g, σ), где g – элемент группы G, σ – элемент группы Φ; с операцией сложения, введенной следующим образом: $(g_1, \sigma_1) + (g_2, \sigma_2) = (g_1 + \sigma_1 g_2, \sigma_1\sigma_2)$. Для всякого элемента (g, σ) исходной группы противоположным будет являться $(-\sigma^{-1}g, \sigma^{-1})$. Элемент (g, ε), где ε – тождественный автоморфизм группы G, будем обозначать просто g, а элемент $(0, \sigma)$, где 0 – нейтральный элемент группы G, – просто σ. Согласно этой договоренности, можно считать, что G и Φ содержатся в $\Gamma(G, \Phi)$. Если $\Phi = \mathrm{Aut}(G)$, то $\Gamma(G, \Phi)$ называется просто голоморфом и обозначается $\Gamma(G)$.

Рассмотрим некоторые свойства нормальной подгруппы относительного голоморфа.

Лемма. Пусть S – нормальная абелева подгруппа относительного голоморфа $\Gamma(G, \Phi)$ абелевой группы G и Φ – содержит автоморфизм θ, такой, что $\theta g = -g$, и пусть $(a, \sigma) \in S$, $g \in G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$2a \in S, \sigma^2 \in S\,; \qquad (1)$$

$$\sigma a - a \in S\,; \qquad (2)$$

$$\sigma(\sigma a - a) = \sigma a - a\,; \qquad (3)$$

$$\sigma^n a = a + n(\sigma a - a)\,; \qquad (4)$$

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right); \qquad (5)$$

$$2(\sigma a - a) = 0\,. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $\tau \in \Phi$. Покажем вначале, что элемент $(\tau a, \tau\sigma\tau^{-1})$ принадлежит S. Это следует из нормальности подгруппы S: $(0,\tau) + (a,\sigma) + (-(0,\tau)) \in S$, то есть $(0, \tau) + (a, \sigma) + (0, \tau^{-1}) = (\tau a, \tau\sigma\tau^{-1}) \in S$.

Так как S – абелева, то $(a, \sigma) + (\tau a, \tau\sigma\tau^{-1}) = (\tau a, \tau\sigma\tau^{-1}) + (a, \sigma)$.

То есть $(a,\sigma) + (\tau a, \tau\sigma\tau^{-1}) = (a + \sigma(\tau a), \sigma\tau\sigma\tau^{-1})$ и $(\tau a, \tau\sigma\tau^{-1}) + (a, \sigma) = (\tau a + \tau\sigma\tau^{-1}a, \tau\sigma\tau^{-1}\sigma)$. Сравнивая первые компоненты, заключаем, что $a + \sigma\tau a = \tau a + \tau\sigma\tau^{-1}a$. Поэтому, если $\tau \in \Phi$ и $\tau a = a$, то $\sigma a = \sigma\tau a$.

Полагаем, что Φ содержит автоморфизм θ группы G, такой, что $\theta g = -g$ (то есть $\theta = -\varepsilon$).

Заметим, что $\theta^{-1} g = -g$, то есть $\theta = \theta^{-1}$. Пусть $\lambda = \sigma^{-1}\theta$. Поскольку $\sigma \in \Phi$ и $\theta \in \Phi$, то автоморфизм $\lambda \in \Phi$. Так как θ коммутирует с σ, то $\lambda\sigma\lambda^{-1} = \sigma$. Заменив в ранее полученном равенстве $a + \sigma\tau a = \tau a + \tau\sigma\tau^{-1}a$ автоморфизм τ на λ, имеем $a + \sigma\lambda a = a + \theta a = a - a = 0$.

С другой стороны, $\lambda a + \lambda\sigma\lambda^{-1}a = (\sigma^{-1}\theta)a + \sigma a = \sigma^{-1}(\theta(a)) + \sigma a = \sigma^{-1}(-a) + \sigma a$. Значит, $0 = \sigma^{-1}(-a) + \sigma a$. Применяя σ, получаем $\sigma 0 = \sigma\sigma^{-1}(-a) + \sigma\sigma a$, $0 = -a + \sigma^2 a$, т.е. $a = \sigma^2 a$. Таким образом, заключаем, что $\sigma^2 a = a$.

Покажем, что $(a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (-(0, \lambda)) = (0, \sigma^2)$.

Имеем $(a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (-(0, \lambda)) = (a, \sigma) + (0, \lambda) + (a, \sigma) + (-\lambda^{-1}(0), \lambda^{-1}) =$ $= (a, \sigma) + (0, \sigma^{-1}\theta) + (a, \sigma) + (0, \lambda^{-1}) = (a + 0, \sigma\sigma^{-1}\theta) + (a, \sigma) + (0, \theta^{-1}\sigma) = (a, \theta) +$ $+ (a, \sigma) + (0, \theta^{-1}\sigma) = (a + \theta a, \theta\sigma) + (0, \theta^{-1}\sigma) = (0, \theta\sigma\theta^{-1}\sigma) = (0, \sigma\theta\sigma\theta^{-1}) = (0, \sigma\theta\theta^{-1}\sigma) =$ $= (0, \sigma\varepsilon\sigma) = (0, \sigma^2)$.

Так как $(a, \sigma) \in S$ и $(0, \lambda) + (a, \sigma) + (-(0, \lambda)) \in S$, то $(0, \sigma^2) \in S$.

Кроме того, имеем $-g + (a, \sigma) + g + (-(a, \sigma)) = -(g, \varepsilon) + (a, \sigma) + (g, \varepsilon) + (-(a, \sigma)) =$ $= (-\varepsilon^{-1}g, \varepsilon^{-1}) + (a, \sigma) + (g, \varepsilon) + (-\sigma^{-1}a, \sigma^{-1}) = (-g, \varepsilon^{-1}) + (a, \sigma) + (g + \varepsilon(-\sigma^{-1}a), \varepsilon\sigma^{-1}) =$ $= (-g + \varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}\sigma) + (g + (-\sigma^{-1}a), \varepsilon\sigma^{-1}) = (-g + a, \sigma) + (g - \sigma^{-1}a, \varepsilon\sigma^{-1}) = (-g + a +$ $+ \sigma(g - \sigma^{-1}a), \sigma\sigma^{-1}) = (-g + a + \sigma g - \sigma\sigma^{-1}a, \varepsilon) = (-g + a + \sigma g - a, \varepsilon) = (-g + \sigma g, \varepsilon) =$ $= -g + \sigma g = \sigma g - g$.

Итак, $\sigma g - g \in S$.

Отсюда $-(\sigma a - a) + 2(a, \sigma) + (-(0, \sigma^2)) \in S$. Имеем $-((\sigma a - a), \varepsilon) + 2(a, \sigma) +$ $+ (-\sigma^{-2}0, \sigma^{-2}) = (-\varepsilon^{-1}(\sigma a - a), \varepsilon^{-1}) + (a + \sigma a, \sigma^2) + (0, \sigma^{-2}) = (-(\sigma a - a), \varepsilon^{-1}) + (a + \sigma a +$ $+ \sigma^2 0, \sigma^2\sigma^{-2}) = (-\sigma a + a + \varepsilon^{-1}(a + \sigma a), \varepsilon^{-1}\varepsilon) = (a + a, \varepsilon) = (2a, \varepsilon) = 2a$.

Таким образом, установили, что $(0, \sigma^2) \in S$, $(\sigma g - g) \in S$ и $2a \in S$.

Утверждения (1) и (2) рассматриваемой леммы доказаны.

Если $\tau \in \Phi$, то S содержит элемент $(0, \tau) + (\sigma g - g) + (-(0, \tau)) = \tau(\sigma g - g)$. Тогда, так как S – абелева группа, то (a, σ) коммутирует с $\tau(\sigma g - g)$, то есть

$$(a, \sigma) + (\tau(\sigma g - g), \varepsilon) = (\tau(\sigma g - g), \varepsilon) + (a, \sigma).$$

Следовательно, $(a + \sigma\tau(\sigma g - g), \sigma) = (\tau(\sigma g - g) + a, \sigma)$. Сравнивая первые компоненты, получаем $\sigma\tau(\sigma g - g) = \tau(\sigma g - g)$. Если положим в полученном равенстве, что $\tau = \varepsilon$, то получим равенство $\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g$, из которого, индукцией по n, следует, что $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$.

Индукцией по n также доказывается, что $n(a,\sigma) = \left(na + \dfrac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Покажем это.

Ясно, что при $n = 1$ $(a,\sigma) = \left(a + \dfrac{1(1-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^1 \right) = (a,\sigma)$. Данное равенство выполняется.

Пусть это равенство верно для $n = k$, т.е. $k(a,\sigma) = \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^k \right)$.
Проверим, выполнено ли это равенство для $n = k + 1$. Имеем

$$(k+1)(a,\sigma) = k(a,\sigma) + (a,\sigma) =$$
$$= \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a) + \sigma^k a, \sigma^{k+1} \right) = \left(ka + \frac{k(k-1)}{2}(\sigma a - a) + a + k(\sigma a - a), \sigma^{k+1} \right) =$$
$$= \left((k+1)a + \left(\frac{(k-1)k}{2} + k \right)(\sigma a - a), \sigma^{k+1} \right) = \left((k+1)a + \frac{(k+1)k}{2}(\sigma a - a), \sigma^{k+1} \right).$$

Значит формула $n(a,\sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ верна.

Сравним равенства $\sigma^2 a = a$ и $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$. Во втором равенстве вместо элемента g рассмотрим элемент a: $\sigma^2 a = a + 2(\sigma a - a)$. Отсюда следует, что $a = a + 2(\sigma a - a)$, то есть $2(\sigma a - a) = 0$.

Таким образом, лемма доказана.

Рассмотренные утверждения являются обобщением [4] на случай относительного голоморфа. Напомним, что в построении относительного голоморфа предполагается, что подгруппа Ф содержит автоморфизм, переводящий любой элемент группы в ему противоположный.

Напомним, что две группы называются относительно голоморфно изоморфными (голоморфно изоморфными), если относительные голоморфы (голоморфы) этих групп изоморфны. Говорят, что группа A определяется своим относительным голоморфом (голоморфом) в некотором классе групп M, если любая группа B из этого класса, относительно голоморфно (голоморфно) изоморфная группе A, изоморфна группе A.

Рассмотрим G и G' – свободные абелевы группы. Эти группы представимы в виде $G = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ и $G' = \bigoplus_{j \in J} \langle b_j \rangle$, где $\langle a_i \rangle (i \in I), \langle b_j \rangle (j \in J)$ – бесконечные циклические группы. Понятно, что для любой пары a_{i_1}, a_{i_2} группы G, где $i_1, i_2 \in I, i_1 \neq i_2$, существует автоморфизм τ, такой, что $\tau a_{i_1} = a_{i_2}$, а на подгруппе $C = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1, i_2}} \langle a_i \rangle$ автоморфизм τ действует тождественно. Начиная с этого места, все такие автоморфизмы будем включать в группу Φ относительного голоморфа. Аналогично поступим для относительного голоморфа $\Gamma(G', \Phi')$.

Теорема. Если G и G' – свободные абелевы группы, каждая из которых изоморфна нормальной подгруппе относительного голоморфа другой группы, то G изоморфна G'.

Доказательство. Пусть $G \cong H', G' \cong H$, где H и H' – нормальные подгруппы голоморфов $\Gamma(G, \Phi)$ и $\Gamma(G', \Phi')$ соответственно. Полагаем, что Φ и Φ' содержат автоморфизм ε. Так как $G' \cong H$ и G' – группа без кручения, то H – группа без кручения. Пусть $(a, \sigma) \in H$ (т.е. $a \in G$ и $\sigma \in \Phi$).

Пусть $n(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$. Так как H – группа без кручения, то из этого равенства следует, что $(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$, т. е. $a = 0$ и $\sigma = \varepsilon$.

Так как в H обязательно существует элемент (a, σ), у которого $a \neq 0$, то рассмотрим сервантную подгруппу, порожденную элементом $2a$: $\langle 2a \rangle_*$. Имеем в силу утверждения (1) леммы $2a \in G \cap H$. Группа G является однородной сепарабельной группой, и поэтому, так как однородная группа сепарабельна тогда и только тогда, когда каждая её сервантная подгруппа, имеющая конечный ранг, служит для неё прямым слагаемым, подгруппа $\langle 2a \rangle_*$ выделяется в G прямым слагаемым [5, с. 137].

Можно считать, что для некоторого $i_1 \in I$ $\langle 2a \rangle_* = \langle a_{i_1} \rangle$. Для любого $i \in I (i \neq i_1)$ существует автоморфизм $\tau_i \in \Phi$ группы G, такой, что $\tau_i a_{i_1} = a_i$.

Имеем

$$(0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon) - (0, \tau_i) = (0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon) + (0, \tau_i^{-1}) =$$
$$= (0, \tau_i) + (a_{i_1}, \varepsilon \tau_i^{-1}) = (\tau_i a_{i_1}, \tau_i \varepsilon \tau_i^{-1}) = a_i.$$

Так как $2a \in \langle a_{i_1} \rangle$, то $\tau_i(2a) \in \langle a_i \rangle$. Учитывая, что $2a \in H$ и $\tau_i(2a) = (0, \tau_i) + (2a, \varepsilon) - (0, \tau_i)$, получаем $\tau_i(2a) \in H$.

Итак, мы можем в H построить $|I|$ линейно независимых элементов: $\{2a, \tau_i(2a)\}_{i \in I \setminus \{i_1\}}$. По условию $H \cong G'$, т.е. $|I|$ линейно независимых элементов можно построить и в G', поэтому $|J| \geq |I|$. Аналогично получаем, $|I| \geq |J|$. Таким образом, $|I| = |J|$. Учитывая, что две свободные группы изоморфны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают, получаем, что группы G и G' изоморфны.

Следствие. Если G и G' – свободные абелевы группы с изоморфными относительными голоморфами, то G изоморфна G'.

Доказательство. Так как любая абелева группа является нормальной подгруппой в своем относительном голоморфе, то, применяя предыдущую теорему, получаем утверждение следствия.

Таким образом, мы получили, что всякая свободная абелева группа определяется своим относительным голоморфом (а значит, и голоморфом) в классе всех свободных абелевых групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беккер И.Х.* О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 6. С. 1228–1238.
2. *Гриншпон И.Э.* Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. матем. Т. 13. № 3. 2007. С. 9–16.
3. *Гриншпон С.Я.* Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. Вопросы математики. Т. 220. Вып. 3. 1975. С. 78–84.
4. *Mills W.H.* Multiple holomorph of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 71. No. 3. P. 379–392.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1974. 416 с.

Статья поступила 25.05.2015 г.

Razina A. V. RELATIVE HOLOMORPHS OF FREE ABELIAN GROUPS AND THEIR INVARIANT SUBGROUPS

DOI 10.17223/19988621/36/5

This article focuses on invariant subgroups of the relative holomorph of an abelian group. Some properties of an invariant subgroup of the relative holomorph are proved. We also prove that a free abelian group is determined by its relative holomorph.

Keywords: holomorph, relative holomorph, free abelian group, invariant subgroup, relative holomorphically isomorphic groups.

RAZINA Anastasiya Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: anastacie.razina@mail.ru

REFERENCES

1. Bekker I.Kh. O golomorfakh abelevykh grupp. *Sib. matem. zhurn.*, 1964, vol. 5, no. 6, pp. 1228–1238. (in Russian)
2. Grinshpon I.E. Normal'nye podgruppy golomorfov abelevykh grupp i pochti golomorfnyy izomorfizm. *Fundament. i prikl. matem.*, 2007, vol. 13, no, 3. pp. 9–16. (in Russian)
3. Grinshpon S.Ya. Pochti golomorfno izomorfnye abelevy gruppy. *Trudy TGU. Voprosy matematiki*, 1975, vol. 220, no. 3, pp. 78–84. (in Russian)
4. Mills W.H. Multiple holomorph of finitely generated abelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 71, no. 3, pp. 379–392.
5. Fuks L. *Beskonechnye abelevy gruppy*, vol. *2*. Moskow, Mir Publ., 1974. 416 p. (in Russian)