ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 269 январь 2000

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.И. Александров, И.А. Александров

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ В ПРОБЛЕМЕ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Работа выполнена при финансовой государственной поддержке ведущих научных школ РФ, грант № 96–15–96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре»

Указываются управляющие функции в уравнении Лёвнера, соответствующие экстремальным функциям в оценке аргумента производной на классе голоморфных однолистных в круге функций.

1. Пусть S – класс голоморфных однолистных в круге $E\{z:|z|<1\}$ функций f, $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Фиксируем точку $z_0\in E\backslash\{0\}$. Функционал

$$I(f,z_0)=I_m\int_0^{z_0}\frac{f''(\varsigma)}{f'(\varsigma)}d\varsigma=\arg f'(z_0)$$

дает значение угла поворота касательной к окружности $\{z:|z|=|z_0|\}$ в точке z_0 при отображении f. Его точные оценки представляют собой важную характеристику класса S. Эти оценки не зависят от $\arg z_0$. Верхняя и нижняя оценка имеют одинаковую абсолютную величину. Поэтому достаточно найти оценку сверху для $I(f,r)$ при фиксированном $r\in(0,1)$.

Обозначим через S' множество функций

$$f(z)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}f(z,\tau),$$

где $f(z,\tau)=e^{-\tau}z+\ldots$ – решение уравнения Лёвнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau}=-\varsigma\frac{\mu(\tau)+\varsigma}{\mu(\tau)-\varsigma}$$

с начальным условием $\zeta|_{\tau=0}=z$, $z\in E$. В этом уравнении функция $\mu(\tau)$, $0<\tau<\infty$, кусочно непрерывна, имеет модуль, равный 1. Класс S' плотен в S в топологии равномерной сходимости внутри E. Поэтому оценка функционала $I(f,r)$, полученная на S', легко распространяется на S.

2. Сузим функционал $I(f,r)$ на классе S' и представим в виде функционала на множестве допустимых функций $\mu(\tau)$. Обозначая производную по z от $f(z,\tau)$ через f', имеем из уравнения Лёвнера

$$\frac{d\ln e^{\tau}f}{d\tau}=-\frac{2f}{\mu-f},\ \frac{d}{d\tau}\ln\frac{f'}{f}=-\frac{2\mu f}{(\mu-f)^2}.$$

Значит,

$$\ln\frac{f(z)}{z}=-2\int_0^{\infty}\frac{f(z,\tau)}{\mu(\tau)-f(z,\tau)}d\tau$$

и при $z=\gamma$

$$\ln f'(r)=-2\int_0^{\infty}\left[\frac{f}{\mu-f}+\frac{\mu f}{(\mu-f)^2}\right]d\tau.$$

Обозначим

$$|f(r,\tau)|=\rho(r,\tau),\quad f(r,\tau)\overline{\mu(\tau)}=\rho(r,\tau)y(r,\tau).$$

Отделяя вещественную часть в тождестве

$$\frac{d\ln f(r,\tau)}{d\tau}=\frac{1+\rho(r,\tau)y(r,\tau)}{1-\rho(r,\tau)y(r,\tau)},$$

получаем формулу

$$\frac{d\ln\rho}{d\tau}=-\frac{1-\rho^2}{|1-\rho y|^2},$$

свидетельствующую о монотонной зависимости ρ от τ. Легко видеть, что $\rho(r,0)=r$, $\rho(r,\infty)$. Проведем в интегральном представлении $\ln f'(r)$ замену переменной τ на ρ:

$$\ln f'(r)=2\int_0^r\left(y+\frac{y-\rho}{1-\rho y}\right)\frac{d\rho}{1-\rho^2}-2\int_0^r\frac{\rho d\rho}{1-\rho^2},$$

где $y(r,\rho)$ – некоторая кусочно-непрерывная функция от ρ, $0\le\rho\le r$, с модулем, равным 1. Вместо неё удобнее рассматривать вещественнозначную функцию $t(r,\rho)$ такую, что $y=(i-f)/(i+f)$. Сделаем ещё одну замену переменной, полагая $s=(1-\rho)/(1+\rho)$. Преобразования показывают, что

$$I(f,r)=\int_{\sigma}^{1}g(s,t)\frac{ds}{s},\ g(s,t)=\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2st}{s^2+t^2},$$

где $\sigma=(1-r)/(1+r)$.

3. Оценим сверху интеграл, дающий значения $I(f,r)$. Фиксируем s, $\sigma\le s\le 1$, и найдем экстремум функции $g(s,t)$. Существует конечное и бесконечное $T(s)$ такое, что $g(s,T(s))=\max g(s,t)$ при $t\le\infty$. Из условия $g'_t(s,T)=0$ и $T(s)\ge 0$ находим три вещественных неотрицательных функции:

$$T_0=\sqrt{s}\ \text{при}\ 0\le s\le\infty;$$

$$T_{1,2}=\frac{\left(1-s\pm\sqrt{1-6s+s^2}\right)}{2}\ \text{при}\ 0\le s<2-\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\max g(s,t)=g(s,T_0)=4\frac{\sqrt{s}}{1+s}=2\sqrt{1-\rho^2}$$

при $s>3-2\sqrt{2}$ (т.е. при $0<\rho<1/\sqrt{2}$).

Если же $0\le s\le 3-2\sqrt{2}$ (т.е. $1/\sqrt{2}<\rho<1$), то

$$g(s,T_1)=g(s,T_2)=\frac{1+s}{1-s}=\frac{1}{\rho}\ge 2\sqrt{1-\rho^2},$$

и поэтому $\max g(s,t)=1/\rho$. Выполнив интегрирование для найденных $T_0(s)$, $T_{1,2}(s)$, получим оценки [1, 2]:

$$|\arg f'(r)|\le\begin{cases}4\arcsin r\ \text{и}\ 0<r\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi+\ln\dfrac{r^2}{1-r^2}\ \text{и}\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\le r<1.\end{cases}$$

4. Восстановить $\mu(\tau)$ для $T_0(s)$, $T_{1,2}(s)$, пользуясь формулой $\arg \mu(\tau) = \arg f(r, \tau) - \arg y(r, \tau)$, не удается, поскольку $\arg f(r, \tau)$ неявно зависит от $\mu(\tau)$. Для доказательства неулучшаемости установленных оценок $\arg f'(r)$ достаточно либо указать управляющую функцию $\mu(\tau)$, которая приводит к экстремальной функции, либо указать в S функцию, для которой реализуется в оценке $\arg f'(r)$ знак равенства.

5. Пусть $\varphi \in (0, \pi/2)$ – произвольная постоянная. Возьмем

$$\mu(\tau) = e^{2i\varphi}\left(\cos\varphi e^{-\tau} - \sqrt{1-\cos^2\varphi e^{-2\tau}}\right)^3.$$

Сделаем в уравнении замену переменной ζ на ω, положив $\omega = \lambda^{-1/2}\zeta$. Получим (штрихом обозначено дифференцирование по τ)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \left(1 - \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\frac{\gamma - \omega}{\lambda - \omega},$$

где

$$\gamma = \lambda\frac{\lambda' + 2\lambda}{\lambda - 2\lambda} \text{ и } \omega(0) = e^{i\varphi}z = z_1.$$

Легко проверить, что $\gamma = 1$. Перейдем в уравнении от переменной τ к λ:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{\omega(1-\omega)}{(\lambda+1)(\lambda-\omega)}, \omega|_{\lambda=e^{-2i\varphi}} = z_1.$$

После замены переменной λ на $\nu = 1/(\lambda + 1)$ получим

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{1+\omega}{\omega(1-\omega)}\nu + \frac{1}{\omega(1-\omega)}, \nu|_{\omega=z_1} = \frac{2e^{i\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

Его интегрирование приводит к заданию функции $\omega = \omega(\nu)$ квадратным алгебраическим уравнением

$$\nu\omega = \frac{1}{2} + \frac{z_1}{(1-z_1)^2}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2\cos\varphi} - \frac{1}{2z_1}\right)(1-\omega)^2.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}\varsigma}{\lambda+1} = -\frac{f(z)}{2\cos\varphi}$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\omega = 0$, получаем функцию $f(z) = \dfrac{z - \cos\varphi z^2}{\left(1 - e^{i\varphi}z\right)^2} \in S'$.

Подчиним выбор φ условию: $\cos\varphi = r$.

6. Покажем, что на функции

$$f(z) = \frac{z - rz^2}{(1-\eta z)^2}, \quad \eta = r + i\sqrt{1-r^2}$$

достигается оценка $\arg f'(r), f \in S$ при $0 < r \le 1/\sqrt{2}$.

Представим $f(z)$ в виде интеграла

$$f(z) \int_0^z \frac{1-\bar{\eta}z}{(1-\eta z)^3}dz. \qquad (*)$$

Очевидно,

$$f'(r) = \frac{1-\bar{\eta}r}{(1-\eta r)^3} = \frac{(1-\bar{\eta}r)^4}{(1-\eta r)^6}.$$

Отсюда при $0 < r \le 1/\sqrt{2}$

$$\arg f'(r) = 4\arg\left(1 - r^2 - ir\sqrt{1-r^2}\right) = 4\arcsin r.$$

7. Для каждого $r \in \left(0, 1/\sqrt{2}\right]$ экстремальная функция своя. Функция $f(z)$, даваемая формулой (*), является частным случаем формулы Кристоффеля-Шварца, отображает E на плоскость с разрезом по лучу, начинающемуся в точке $i/4\sqrt{1-r^2}$ и наклоненному к положительному направлению вещественной оси под углом $-arctg[(1-2r^2)/2r\sqrt{1-r^2}]$.

При изменении r от 0 до $1/\sqrt{2}$ точка ζ движется по границе единичного круга от $i/4$ по направлению хода часовой стрелки до точки $i\sqrt{2}/4$, а разрез поворачивается против хода часовой стрелки от вертикального положения до горизонтального, причем концевая точка разреза поднимается по мнимой оси от точки $i/4$ до $i/2\sqrt{2}$. Точка $f(r)$ имеет аффикс $r\left(1-2r^2\right) + 2ir^2\sqrt{1-r^2}$.

Рассмотренная функция при $r \in \left(1/\sqrt{2}, 1\right)$ не является экстремальной в задаче об $\arg f'(r), f \in S$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1996. 628 с.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 25 октября 1998 г.