УДК 512.541

С.Я. Гриншпон

Н-ГРУППЫ И ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Работа выполнена при финансовой государственной поддержке ведущих научных школ РФ – грант № 96–15–96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре» и РФФИ – грант № 97–01–00795.

Абелева группа A называется вполне транзитивной, если для любых двух элементов a, $b\in A$, для которых $\mathrm{H}(a)\le\mathrm{H}(b)$ ($\mathrm{H}(a)$, $\mathrm{H}(b)$ – высотные матрицы элементов a и b, существует эндоморфизм группы A, переводящий a в b. Назовем абелеву группу A Н-группой, если всякая вполне характеристическая подгруппа S группы A имеет вид $S=\{a\in A|\mathrm{H}(a)\ge M\}$, где M – некоторая $\omega\times\omega$-матрица, элементами которой являются порядковые числа и символы ∞. Получено описание вполне транзитивных групп и Н-групп в ряде классов абелевых групп.

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп A интерес представляют группы, в которых каждая вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = \{a\in A|\mathrm{H}(a)\ge M\}$, где M – некоторая матрица размера $\omega\times\omega$, каждая строка которой представляет собой возрастающую последовательность порядковых чисел и символов ∞ ($\mathrm{H}(a)$ – высотная матрица элемента a). Такие группы будем называть Н-группами. В случае групп без кручения вместо высотной матрицы элемента a можно рассматривать его характеристику $\chi(a)$, а вместо матрицы M – последовательность $\nu = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots)$, состоящую из целых неотрицательных чисел и символов ∞. Таким образом, приходим к понятию χ-группы, т.е. такой абелевой группы без кручения A, в которой каждая вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = \{a\in A \mid \chi(a)\ge\nu\}$. Систематическое изучение χ-групп проводилось в [1–3]. В [1] показано, что при изучении строения вполне характеристических подгрупп абелевых групп можно ограничиться редуцированными группами. Поэтому далее в этой статье слово «группа» означает редуцированную абелеву группу.

Аналогично [1. С. 63] можно показать, что всякая Н-группа является вполне транзитивной группой, т.е. группой, в которой для любых двух элементов x и y таких, что $\mathrm{H}(x)\le\mathrm{H}(y)$, существует эндоморфизм φ со свойством $\varphi(x) = y$. Обратное утверждение имеет место для примарных групп, однако уже в классе групп без кручения существуют вполне транзитивные группы, не являющиеся Н-группами (χ-группами). Это вытекает из результатов работ [1] и [2].

Рассмотрим понятие вполне транзитивного семейства групп, которое нам понадобится в дальнейшем.

Определение 1. Семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ групп назовем вполне транзитивным семейством групп, если для каждой пары групп (A_{i_1}, A_{i_2}) i_1, $i_2\in I$ (i_1 может совпадать с i_2) выполняется условие: из того, что $a\in A_{i_1}$, $b\in A_{i_2}$ и $\mathrm{H}(a)\le\mathrm{H}(b)$ следует, что существует $\varphi\in$ $\in\mathrm{Hom}(A_{i_1}, A_{i_2})$ со свойством $\varphi(a) = b$.

Понятие вполне транзитивного семейства групп для групп без кручения было введено в [1] (такие семейства назывались транзитивными), а для произвольных абелевых групп – в [4]. В [1] были построены примеры вполне транзитивных семейств групп без кручения, например, любое семейство алгебраически компактных групп без кручения или однородных сепарабельных групп является вполне транзитивным семейством.

Рассмотрим еще примеры вполне транзитивных семейств групп, состоящих из периодических групп.

Определение 2. Абелеву p-группу A назовем прямо тотально проективной, если каждый элемент этой группы вкладывается в тотально проективное прямое слагаемое группы A. Понятно, что всякая тотально проективная группа является прямо тотально проективной.

Редуцированная p-группа, каждый элемент которой можно вложить в счетное прямое слагаемое этой группы (в частности, любая счетная редуцированная p-группа), является прямо тотально проективной. Это следует из того, что всякая счетная редуцированная p-группа обладает хорошим композиционным рядом [5. С. 100]. Всякая p-группа без элементов бесконечной высоты (редуцированная сепарабельная p-группа) является прямо тотально проективной, однако если такая p-группа не является прямой суммой циклических групп, то она не тотально проективна [5. С. 122].

Класс прямо тотально проективных групп содержит в себе класс λ-сепарабельных групп, введенных в [6] (p-группа называется λ-сепарабельной, где λ – предельное порядковое число, если всякое ее конечное множество элементов содержится в некотором прямом слагаемом этой группы, являющемся тотально проективной группой, длины меньшей λ). В [7] p-группа G называется C_λ-группой (λ– предельное порядковое число), если $G/p^\alpha G$ – тотально проективная группа для любого $\alpha < \lambda$. Из [6–7] следует, что при λ, конфинальном ω, всякая C_λ-группа длины λ является прямо тотально проективной.

В [8] вводится понятие IT-группы. IT-группой называется p-группа, изоморфная изотипной подгруппе некоторой тотально проективной группы.

Предложение 1. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство периодических групп, каждая примарная компонента которых является прямо тотально проективной группой или IT-группой. Тогда семейство групп $\{A_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивно.

Доказательство. Пусть $a_1\in A_{i_1}$, $a_2\in A_{i_2}$, i_1, $i_2\in I$ и $\mathrm{H}(a)\le\mathrm{H}(b)$. Не умаляя общности, можно считать, что A_{i_1} и A_{i_2} – p-группы и вместо высотных матриц $\mathrm{H}(a_1)$, $\mathrm{H}(a_2)$ рассматривать индикаторы $\mathrm{H}(a_1)$, $\mathrm{H}(a_2)$. Надо рассмотреть 4 случая:

1) A_{i_1}, A_{i_2} – IT-группы;

2) A_{i_1} – IT-группа, A_{i_2} – прямо тотально проективная группа;

3) A_{i_1}, A_{i_2} – прямо тотально проективные группы;

4), A_{i_1} – прямо тотально проективная группа, A_{i_2} – IT-группа.

Рассмотрим подробно первые два случая, остальные анализируются аналогично.

1. Если B_1 и B_2 – тотально проективные группы, изотипными подгруппами которых являются группы A_{i_1} и A_{i_2} соответственно, то $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$ – изотипная подгруппа группы $B_1 \oplus B_2$. Группа $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$ как изотипная подгруппа тотально проективной группы $B_1 \oplus B_2$ является вполне транзитивной [8].

Пусть ρ_1, ρ_2 – вложения групп A_{i_1} и A_{i_2} соответственно в группу $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$, а π_2 – проекция группы $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$ на группу A_{i_2}. Имеем $H(\rho_1 a_1) \le H(\rho_2 a_2)$ (индикаторы элементов $\rho_1 a_1$ и $\rho_2 a_2$ рассматриваются в группе $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$), и поэтому существует $\varphi \in E(A_{i_1} \oplus A_{i_2})$ такой, что $\varphi(\rho_1 a_1) = \rho_2 a_2$. Тогда $\eta = \pi_2 \varphi \rho_1$ является гомоморфизмом группы A_{i_1} в группу A_{i_2}, переводящим элемент a_1 в a_2.

2. Пусть A_{i_1} – IT-группа, A_{i_2} – прямо тотально проективная группа. Существует тотально проективная группа B_1, для которой группа A_{i_1} является изотипной подгруппой. Так как группа A_{i_2} прямо тотально проективна, то $A_{i_2} = A'_{i_2} \oplus A''_{i_2}$, где A'_{i_2} – тотально проективная группа и $a_2 \in A'_{i_2}$. Группа является изотипной подгруппой алгебраически компактной группы $B_1 \oplus A'_{i_2}$, поэтому $A_{i_1} \oplus A'_{i_2}$ – вполне транзитивная группа [8]. Рассуждая далее так же, как и в доказательстве предыдущего случая, получаем, что существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, A_{i_2})$ такой, что $\varphi a_1 = a_2$.

Из предложения 1 вытекает

Следствие 1. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство периодических групп, каждая примарная компонента которых принадлежит хотя бы одному из следующих классов групп:

1) классу тотально проективных групп;
2) классу сепарабельных групп;
3) классу C_λ-групп длины λ для любого порядкового числа λ, конфинального ω;
4) классу счетных групп;
5) классу групп Прюфера произвольной длины;
6) классу IT-групп.

Тогда семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ является вполне транзитивным.

Для исследования вполне транзитивных групп нам понадобится понятие **K**-монотонности.

Обозначим как $\mathfrak{I}$ класс всех матриц вида $(\alpha_{ij})_{i \in N, j \in N_0}$, каждая строка $\in$ представляет собой возрастающую последовательность порядковых чисел и символов ∞, полагая, что ∞ больше любого порядкового числа (если $(\alpha_{ij}) \in \mathfrak{I}$, то $\alpha_{ij} < \alpha_{i,j+1}$; если же $\alpha_{ij} = \infty$, то $\alpha_{i,j+1} = \infty$). Если $M_1, M_2 \in \mathfrak{I}$, $M_1 = (\alpha_{ij})$, $M_2 = (\beta_{ij})$, то полагаем $M_1 \le M_2$, если для любых $i \in N, j \in N_0$ $\alpha_{ij} \le \beta_{ij}$.

Если I – множество, то обозначим через $P(I)$ булеву алгебру всех подмножеств множества I.

Определение 3. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – некоторое семейство групп, **K** – идеал булевой алгебры $P(I)$, G – группа. Будем говорить, что группа удовлетворяет условию **K**-монотонности относительно семейства $\{G_i\}_{i \in I}$, если для любого элемента $g \in G$ из выполнения условий: $\mathrm{H}(g) \ge \inf_{\mathfrak{I}} \{\mathrm{H}(a_i)\}_{i \in J}$, где $a_i \in G_i$, $J \in \mathbf{K}$ и $|J| \le \aleph_0$, следует существование элементов $g_1, \ldots, g_r \in G$ с такими свойствами:

1) $g_1 + \ldots + g_r = g$;

2) для каждого элемента g_k ($k = 1, \ldots r$) найдется такой элемент a_{l_k} ($l_k \in J$), что $\mathrm{H}(g_k) \ge \mathrm{H}(a_{l_k})$.

Для того чтобы исключить фиктивное вхождение некоторой группы G_i в семейство $\{G_i\}_{i \in I}$, будем полагать, что **K** содержит все одноэлементные подмножества (а значит, и все конечные подмножества) множества I.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введенное понятие.

1. Пусть $\{G_i\}_{i \in N}$ – семейство однородных групп такое, что каждая группа G_i q-делима для любого простого числа q, отличного от p_i, $p_i G_i \ne G_i$ (p_i – i-е простое число), и пусть G – однородная группа такая, что $2G \ne G$, но $G = G$ для всякого простого числа $q \ne 2$. Группа G удовлетворяет условию **K**-монотонности относительно семейства $\{G_i\}_{i \in N}$ для любого идеала **K** булевой алгебры $P(N)$.

2. Пусть $\{G_i\}_{i \in N}$ – семейство однородных групп идемпотентного типа таких, что каждая группа G_i p_i-делима, но не q-делима для любого простого числа $q \ne p_i$, и пусть G – однородная группа не p-делимая для любого простого числа p. Рассмотрим два идеала $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ булевой алгебры $P(N)$. Пусть $\mathbf{K}_1 = P(N)$, а $\mathbf{K}_2$ состоит из всех конечных подмножеств множества N. Группа G не удовлетворяет условию $\mathbf{K}_1$-монотонности относительно семейства $\{G_i\}_{i \in N}$, но удовлетворяет условию $\mathbf{K}_2$-монотонности относительно этого семейства.

3. Пусть G – однородная группа, типу которой принадлежит характеристика $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$; $\{G_i\}_{i \in I}$ – семейство групп такое, что для каждого натурального числа k, являющегося степенью некоторого простого числа, существует циклическая группа порядка k, принадлежащая этому семейству. Пусть **K** – некоторый идеал булевой алгебры $P(I)$, которому принадлежат все счетные подмножества множества I. Группа G не удовлетворяет условию **K**-монотонности относительно семейства $\{G_i\}_{i \in I}$.

Определим семейства групп, удовлетворяющие условию **K**-монотонности.

Определение 4. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – некоторое семейство групп, **K** – идеал булевой алгебры $P(I)$. Будем говорить, что семейство групп $\{G_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию **K**-монотонности, если каждая группа G_j ($j \in I$) удовлетворяет условию **K**-монотонности относительно семейства $\{G_i\}_{i \in I}$.

Если в определении 4 (используя определение 3 относительной **K**-монотонности) вместо условия $|J| \le \aleph_0$ записать $|J| < \aleph_0$, то будем говорить, что соответствующее семейство групп удовлетворяет условию монотонности. Понятно, что в этом случае можно не требовать, чтобы $J \in \mathbf{K}$, так как мы предполагаем, что все конечные подмножества множества I принадлежат **K**. Итак, получаем следующее определение.

Определение 5. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – некоторое семейство групп. Будем говорить, что семейство групп $\{G_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию монотонности, если для любой группы G_j ($j \in I$) и любого элемента $g_j \in G_j$ из выполнения условий: $\mathrm{H}(g_j) \ge \inf_{\mathfrak{I}} \{\mathrm{H}(a_l)\}_{l \in J}$, где $a_l \in G_l$, $J \subset I$ и $|J| < \aleph_0$, следует существование элементов $g_{j_1}, \ldots, g_{j_r} \in G_j$ с такими свойствами:

1) $g_{j_1} + \ldots + g_{j_r} = g_j$;

2) для каждого элемента g_{j_k} ($k = 1, \ldots, r$) найдется такой элемент a_{l_k} ($l_k \in J$), что $\mathbf{H}(\mathbf{g}_{j_k}) \geq \mathbf{H}(\mathbf{a}_{l_k})$.

В [1, лемма 2.2] показано, что всякое семейство однородных групп одного и того же типа удовлетворяет условию монотонности. Этот факт допускает такое обобщение.

Теорема 1. Если $\{G_i\}_{i \in I}$ – семейство однородных групп одного и того же типа, **K** – идеал булевой алгебры $P(I)$, то $\{G_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию **K**-монотонности.

Для периодических групп справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Всякая вполне транзитивная периодическая группа G удовлетворяет условию **K**-монотонности относительно любого семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ и любого идеала **K** булевой алгебры $P(I)$.

Из-за ограниченного объема статьи мы не приводим доказательств этих теорем.

Рассмотрим теперь **K**-прямые суммы групп A_i ($i \in I$), где **K** – идеал булевой алгебры $P(I)$ [9. С. 54], которые будем обозначать через $\oplus_{\mathbf{K}} A_i$. Если, в частности, **K** состоит из всех конечных подмножеств множества I, то получается прямая сумма, если же $\mathbf{K} = P(I)$, то получается прямое произведение групп A_i.

Пусть группа A является межпрямой суммой групп A_i ($i \in I$), т.е. $\bigoplus_{i \in I} A_i \subset A \subset \prod_{i \in I} A_i$. Докажем необходимое условие вполне транзитивности группы A.

Теорема 3. Если группа A, являющаяся межпрямой суммой групп A_i($i \in I$), вполне транзитивна, то семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно и удовлетворяет условию монотонности.

Доказательство. Для всякого $i \in I$ обозначим через ρ_i координатное вложение группы A_i в группу A, а через π_i – проекцию группы A на A_i. Пусть $i_1, i_2 \in I$, $a \in A_{i_1}$, $b \in A_{i_2}$ и $\mathbf{H}(a) \leq \mathbf{H}(b)$. $\rho_{i_1} A_{i_1}$ и $\rho_{i_2} A_{i_2}$ – прямые слагаемые группы A. Имеем с учетом изотипности подгрупп $\rho_{i_1} A_{i_1}$ и $\rho_{i_2} A_{i_2}$ в группе A $\mathrm{H}_A(\rho_{i_1} a) \leq \mathrm{H}_A(\rho_{i_2} b)$ ($\mathbf{H}_A(\rho_{i_1} a), \mathbf{H}_A(\rho_{i_2} b)$ – высотные матрицы элементов $\rho_{i_1} a$ и $\rho_{i_2} b$, рассматриваемые в группе A). Из вполне транзитивности группы A следует существование $\varphi \in E(A)$ такого, что $\varphi(\rho_{i_1} a) = \rho_{i_2} b$ и, значит, $(\pi_{i_2} \varphi \rho_{i_1}) a = b$. Так как $\pi_{i_2} \varphi \rho_{i_1} \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, A_{i_2})$, то семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно.

Пусть $g_j \in A_j (i \in I)$ и $\mathrm{H}(g_j) \geq \inf_3 \{\mathrm{H}(a_l)\}_{l \in J}$, где $a_l \in A_l$, $J \subset I$ и $|J| < \aleph_0$. Пусть $|J| = r$ и $J = \{l_1, l_2, \ldots, l_r\}$. Тогда $H_A(\rho_j g_j) \geq H_A(\sum_{k=1}^{r} \rho_{l_k} a_{l_k})$.

Из вполне транзитивности группы A следует существование $\varphi \in E(A)$ такого, что $\rho_j g_j = \varphi(\sum_{k=1}^{r} \rho_{l_k} a_{l_k}) = \sum_{k=1}^{r} \varphi \rho_{l_k} a_{l_k}$.

Имеем

$$g_j = \pi_j \rho_j g_j = \sum_{k=1}^{r} (\pi_j \varphi \rho_{l_k}) a_{l_k}, \mathrm{H}(\pi_j \varphi \rho_{l_k} a_{l_k}) \geq \mathrm{H}(a_{l_k})$$

($k = 1, 2, \ldots, r$). Обозначив $\pi_j \pi_j \varphi \rho_{l_k} a_{l_k}$ через g_{j_k}, получим, что $g_j = g_{j_1} + \ldots + g_{j_r}$, где $\mathbf{H}(\mathbf{g}_{j_k}) \geq \mathbf{H}(\mathbf{a}_{l_k})$ ($k = 1, 2, \ldots, r$).

Следствие 2. Если $A = \oplus_{\mathbf{K}} A_i (i \in I)$ – вполне транзитивная группа, то семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно и удовлетворяет условию монотонности.

Учитывая, что **K** – прямая сумма групп A_i ($i \in I$) является изотипной подгруппой группы $\prod_{i \in I} A_i$, с помощью естественного обобщения леммы 8.2 из [9] для **K**-прямых сумм получаем достаточное условие вполне транзитивности группы $\oplus_{\mathbf{K}} A_i$ ($i \in I$).

Теорема 4. $A = \oplus_{\mathbf{K}} A_i$ ($i \in I$) – вполне транзитивная группа, если семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно и удовлетворяет условию **K**-монотонности.

Так как прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} A_i$ является **K**-прямой суммой групп A_i ($i \in I$), в которой идеал **K** состоит из всех конечных подмножеств множества I, то из следствия 2 и теоремы 4 получаем такое следствие.

Следствие 3. Группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно и удовлетворяет условию монотонности.

Учитывая, что любая группа из вполне транзитивного семейства групп вполне транзитивна, получаем

Следствие 4. Всякое прямое слагаемое вполне транзитивной группы вполне транзитивно.

Из следствия 2, теорем 4 и 2 вытекает такой результат.

Теорема 5. Пусть группа A является **K**-прямой суммой периодических групп $\{A_i\}_{i \in I}$. Группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивно.

Отсюда следует

Следствие 5. Следующие условия для периодических групп A_i ($i \in I$) эквивалентны:

– существует идеал **K** булевой алгебры $P(I)$ такой, что $\oplus_{\mathbf{K}} A_i$ – вполне транзитивная группа, $\bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне транзитивная группа, $\prod_{i \in I} A_i$ – вполне транзитивная группа;

– для любого идеала **K** булевой алгебры $P(I)\oplus_{\mathbf{K}} A_i$ – вполне транзитивная группа, $\{A_i\}_{i \in I}$ – вполне транзитивное семейство групп.

Из теоремы 5 и следствия 1 вытекает

Следствие 6. Пусть $A = \oplus_{\mathbf{K}} A_i (i \in I)$ где A_i – периодические группы, каждая примарная компонента которых принадлежит хотя бы одному из следующих классов групп:

1) классу тотально проективных групп;
2) классу сепарабельных групп;
3) классу C_λ-групп длины λ для любого порядкового числа λ, конфинального ω;
4) классу счетных групп;
5) классу групп Прюфера произвольной длины;
6) классу IT-групп.

Тогда A – вполне транзитивная группа.

Рассмотрим алгебраически компактные группы.

Теорема 6. Всякая **K**-прямая сумма алгебраически компактных групп (в частности, любая алгебраически компактная группа) является вполне транзитивной группой.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство алгебраически компактных групп, **K** – идеал булевой алгебры $P(I)$.

Покажем, что $\oplus_K A_i$ – вполне транзитивная группа. Для каждой группы A_i ($i\in I$) существует такая группа G_i, являющаяся прямым произведением примарных циклических групп, что A_i является прямым слагаемым группы G_i [9, следствие 38.2], т.е. $G_i = A_i \oplus B_i$. Имеем $\oplus_K G_i = (\oplus_K A_i)\oplus \oplus(\oplus_K B_i)$. Группа $\oplus_K G_i$ является некоторой K'-прямой суммой примарных циклических групп [2. С. 38], и поэтому по следствию 6 $\oplus_K G_i$ – вполне транзитивная группа. Группа $\oplus_K A_i$ вполне транзитивна как прямое слагаемое вполне транзитивной группы.

Рассмотрим теперь группы, вполне характеристические подгруппы которых имеют специальный вид. Если A – группа и $M\in\mathfrak{I}$, то обозначим через $A(M)$ следующую подгруппу группы A: $A(M) = \{a\in A \mid \mathrm{H}(a)\geq M\}$. $A(M)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A.

Определение 6. Назовем группу A H-группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(M)$, где $M\in\mathfrak{I}$.

Заметим, что группа без кручения является H-группой тогда и только тогда, когда она – χ-группа, и p-группа является H-группой тогда и только тогда, когда она – H-группа (p-группа A называется H-группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = \{a\in A \mid \mathrm{H}(a)\geq\alpha\}$, где $H(a)$ – индикатор элемента a; α – возрастающая последовательность, состоящая из ординальных чисел и символов ∞).

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству необходимости в теореме 3.9 из [1], получим лемму.

Лемма 1. Всякое прямое слагаемое H-группы является H-группой.

Покажем, что для периодических групп класс вполне транзитивных групп совпадает с классом H-групп.

Предложение 2. Периодическая группа A является H-группой тогда и только тогда, когда A – вполне транзитивная группа.

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что всякая H-группа вполне транзитивна. Докажем достаточность. Пусть A – периодическая вполне транзитивная группа, S – вполне характеристическая подгруппа группы A. Рассмотрим разложение группы A в прямую сумму примарных компонент $A = \bigoplus_p A_p$. Имеем $S = \bigoplus_p (S\cap A_p)$. Каждая группа A_p – вполне транзитивная группа как прямое слагаемое вполне транзитивной группы A. Поэтому для любого простого числа p существует такая U-последовательность $\alpha_{(p)}$, что $S\cap A_p = A_p(\alpha_{(p)})$ [10. P. 61]. Если $S\cap A_p = 0$, то последовательность $\alpha_{(p)}$ состоит только из символов ∞. Рассмотрим матрицу M, у которой для каждого простого числа p строка, соответствующая этому простому числу, совпадает с $\alpha_{(p)}$. Получаем $S = A(M)$, значит, A – H-группа.

Учитывая, что периодическая часть любой группы является изотипной вполне характеристической подгруппой этой группы, получаем

Следствие 7. Периодическая часть любой вполне транзитивной группы является H-группой.

Для смешанной группы A обозначим через $P'(A)$ множество всех тех простых чисел p, для которых $T_p(A)$ – неограниченная группа ($T_p(A)$ – p-компонента периодической части $T(A)$ группы A). Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если в смешанной группе A существует элемент бесконечного порядка, имеющий бесконечную q-высоту (обобщенную) для простого числа q, не принадлежащего $P'(A)$, то A не является H-группой.

Доказательство. Пусть $a\in A$, $o(a) = \infty$ и $h_q^*(a) = \infty$ для всякого простого числа q такого, что $q\notin P'(A)$. Предположим, что A является H-группой. Рассмотрим следующую вполне характеристическую подгруппу S группы A: $S = \bigoplus_{p\in P'(A)} T_p(A)$. Пусть M_1 – матрица из $\mathfrak{I}$, у которой строки, соответствующие простым числам $p\in P'(A)$, следующие: (0, 1, 2, ...), а остальные строки состоят только из символов ∞. M_1 – наибольшая из матриц $M\in\mathfrak{I}$, для которых $S = A(M)$. Так как M – периодическая группа, то $a\notin S$. С другой стороны, $\mathrm{H}(a)\geq M_1$, и поэтому $a\in A(M_1)$. Противоречие.

Выясним, в каком случае K-прямая сумма периодических групп является H-группой.

Теорема 7. Пусть $A = \oplus_K A_i (i\in I)$, где A_i – периодические группы. Группа A является H-группой тогда и только тогда, когда A – периодическая вполне транзитивная группа.

Доказательство. а) Необходимость. Имеем $A_i = \bigoplus_p A_{ip}$ (A_{ip} – p-компонента группы A_i). Для фиксированного простого числа p обозначим через I_p следующее множество: $I_p = \{(i, p) \mid \in I\}$. Существует идеал $\mathbf{K}_1$ булевой алгебры всех подмножеств множества всех простых чисел Π и идеалы $\mathbf{K}_p$ булевых алгебр $P(I_p)$, где $p\in\Pi$, что $A = \oplus_{\mathbf{K}_1} G_p$, где $G_p = \oplus_{\mathbf{K}_p} A_{ip}$. Пусть ρ_p и π_p – координатное вложение группы G_p в A и проекция группы A на группу G_p соответственно. Предположим, что для некоторого простого числа p_j группа G_{p_j} не является периодической. Пусть T_{p_j} – p_j-компонента периодической части группы A. Тогда $T_{p_j} \subset \rho_{p_j} G_{p_j}$ и $T_{p_j} \neq \rho_{p_j} G_{p_j}$. Так как в группе G_{p_j} есть элементы бесконечного порядка, то для всякого натурального числа k существует такая группа A_{ip_j} и элемент $a_k \in A_{ip_j}$, что $o(a_k) \geq p_j^k$. Значит, T_{p_j} – неограниченная группа. Пусть a – ненулевой элемент бесконечного порядка группы G_{p_j} и $b = \rho_{p_j} a$. Имеем $b\in A$, $o(b) = \infty$ и $h_q^*(b) = \infty$ для всякого простого числа q, отличного от p_j. Тогда по лемме 2 A не является H-группой. Противоречие.

Итак, $A = \oplus_{\mathbf{K}_1} G_p$, где G_p – p-группы. Предположив, что группа A не является периодической, и рассмотрев в ней периодическую часть $T(A)$, которая совпадает с группой $\bigoplus_p \rho_p G_p$, получим, что $T(A)$ нельзя представить в виде $A(M)$. Значит, A – периодическая группа. Так как A – H-группа, то A – вполне транзитивная группа.

б) Достаточность вытекает из предложения 2.

Для расщепляющихся смешанных групп получена

Теорема 8. Пусть $A = T\oplus G$, где T – периодическая группа, G – группа без кручения. Группа A является H-группой тогда и только тогда, когда G – χ-группа и выполняется условие: для всякого простого числа p, для которого группа T_p – неограничена, G является p-делимой группой, а T_p – вполне транзитивной группой.

Учитывая результаты о χ-группах из [1], получаем

Следствие 8. Расширение ограниченной группы при помощи однородной сепарабельной группы является Н-группой.

Следствие 9. Расширение ограниченной группы при помощи группы без кручения, на которой можно задать структуру унитарного Q_p^* – модуля для некоторого простого числа p (в частности, при помощи группы без кручения, полной в p-адической топологии), является Н-группой.

Рассмотрим К-прямые суммы групп, смешанные компоненты которых расщепляются.

Теорема 9. Пусть $A = \oplus_K A_i$ $(i \in I)$ – смешанная группа, причем если для некоторого $i \in I$ A_j – смешанная группа, то она расщепляется. Группа A является Н-группой тогда и только тогда, когда A – расщепляющаяся группа и выполняются следующие условия:

1) фактор-группа группы A по ее периодической части является χ-группой;

2) для всякого простого числа p, для которого периодическая часть группы A имеет неограниченную p-компоненту, эта p-компонента является вполне транзитивной группой, а фактор-группа группы A по ее периодической части p-делима.

Доказательство.

а) Необходимость. Запишем каждую из групп A_j $(i \in I)$ в виде $A_i = A_i' \oplus A_i''$, где A_i' – периодическая группа, A_i'' – группа без кручения (одна из групп A_i' или A_i'' может быть нулевой). Имеем $A = A' \oplus A''$, где $A' = \oplus_K A_i'$, $A'' = \oplus_K A_i''$. Так как A – Н-группа, то по лемме 1 A' – Н-группа и A'' – Н-группа. Применяя теорему 7, получаем, что A' – периодическая вполне транзитивная группа. Понятно, что A'' – группа без кручения. Итак, A – расщепляющаяся смешанная группа. Применяя теорему 8, получаем выполнение условий 1)–2).

б) Достаточность вытекает из теоремы 8.

В связи с теоремой 9 получен следующий критерий расщепляемости К-прямых сумм групп.

Теорема 10. Пусть $G = \oplus_K G_i$ $(i \in I)$ – смешанная группа. Группа G расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) если G_j $(j \in I)$ – смешанная группа, то G_j расщепляется;

2) периодическая часть группы G совпадает с К-прямой суммой периодических частей групп G_j $(i \in I)$.

Применяя теорему 10 и следствие 6, получаем

Следствие 10. Пусть $\oplus_K A_i$ $(i \in I)$ – смешанная группа, где каждая группа A_i является либо группой без кручения, либо периодической группой, любая примарная компонента которой принадлежит хотя бы одному из следующих классов групп:

1) классу тотально проективных групп;

2) классу сепарабельных групп;

3) классу C_λ-групп длины λ для любого порядкового числа λ, конфинального ω;

4) классу счетных групп;

5) классу групп Прюфера произвольной длины;

6) классу IT-групп.

Группа A является Н-группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) фактор-группа группы A по ее периодической части является χ-группой;

2) периодическая часть группы A совпадает с К-прямой суммой периодических частей групп A_i $(i \in I)$;

3) для всякого простого числа p, для которого периодическая часть группы A имеет неограниченную P-компоненту, фактор-группа группы A по ее периодической части p-делима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92.
2. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы К-прямых сумм абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1996. Вып. 13–14. С. 54–61.
3. *Гриншпон С.Я.* Вполне транзитивные однородно сепарабельные абелевы группы // Матем. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 471–474.
4. *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. 1986, вып. 6. С. 12–27.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 414 с.
6. *Le Borgne.* Groupes λ-separables // C. r. Acad. Sci. 1975. № 12. P. 415–417.
7. *Walles K.D.* C_λ-groups and basic subgroups // Pacif. J. Math. 1972. № 3. P. 799–809.
8. *Hill P., Megibben Ch.* On the theory and classification of abelian p-groups // Math. Z. 1985. V. 130. P. 17–38.
9. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.
10. *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. Michigan: Ann. Arbor, 1954. 90 p.

Статья представлена лабораторией алгебры и топологии механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 25 мая 1999 г.