УДК 517.54

А.Н. Малютина, Е.Н. Романова

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ В СРЕДНЕМ ИСКАЖЕНИЕМ

Работа выполнена при государственной поддержки ведущих научных школ РФ, грант № 96-15-96095 «Исследования по анализу и алгебре».

Рассматриваются пространственные отображения с ограниченным в среднем искажением, доказаны теоремы об оценках искажения модулей семейств кривых, исследуются вопросы стирания особенностей таких отображений. Приведены примеры, показывающие, что класс отображений с ограниченным в среднем искажением шире класса квазирегулярных отображений.

1. Пусть R^n – евклидово n-мерное пространство, $n=3, 4, \ldots$; D – область в R^n и f:D→R^n – отображение с s-ограниченным в среднем искажением [1]. Через B_f обозначим множество точек ветвления отображения f. Если f:D→R^n – произвольное открытое изолированное отображение, то множество B_f нигде не плотно, размерность $\dim B_f \le n-2$, а мера Лебега $|B_f|=0$ [2, 3].

Модуль порядка l, $l>0$ семейства кривых Г обозначим через $M_l(\Gamma)$. Через $B^n(x_0, r)$ обозначим n-мерный шар $\{x\in R^n \mid |x-x_0|<r\}$, а его (n–1)-мерную сферу $\{x\in R^n \mid |x-x_0|=r\}$ – через $S^{n-1}(x_0,r)$. Мы используем обычные сокращения $B^n(0, r)=B^n(r)$, $B^n(1)=B^n$, $S^{n-1}(0,r)=S^{n-1}(r)$, $S^{n-1}(1)=S^{n-1}$.

2. Приведем два примера, первый из которых показывает, что в отличие от отображений с ограниченным искажением для отображений, у которых ограничены интегралы вида

$$\int_D k_I^{\alpha}(x,f)|J(x,f)|dx, \int_D k_O^{\beta}(x,f)dx, \alpha,\beta>0,$$

ограниченность кратности и степени отображения на компактах из области D, вообще говоря, не имеет места.

Пример 1. В пространстве R^3 рассмотрим тор D, точки $x=(x_1, x_2, x_3)$ которого удовлетворяют условиям

$$|x_1|<1,\ |x_2|<1,\ |x_3|<1,\ x_1=(R+r\cos\theta)\cos\varphi,$$
$$x_2=(R+r\cos\theta)\sin\varphi,\ x_3=r\sin\theta,$$

где $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta<2\pi$, $0<r<R$, $R<1$.

В области D зададим отображение f:D→D' $(r, \varphi, \theta)\to$ $\to(r, \varphi, r^p\theta)$, где p – произвольное отрицательное число. Отображение f непрерывно и ограничено в D, локально гомеоморфно в $x\in D$. Все точки множества $D^1=$ $=\{x \mid (x_1-R)^2+x_3^2=0\}$ отображение f переводит в себя. Каждая окружность с центром на D^1, лежащая в двумерной плоскости, ортогональной D^1, при отображении f переходит в себя. Отсюда легко видеть, что отображение f открыто. В точках множества $D\backslash D^1$ отображение f непрерывно дифференцируемо и $J(x,f)=r^p>0$.

Поскольку двумерная мера Лебега множества D^1 равна нулю и сужение f на любую прямую, не пересекающую D^1, непрерывно дифференцируемо, то f есть ACL отображение. Рассмотрим произвольный компакт $F\subset D$, содержащий внутри себя некоторые точки из D^1. Пусть $m\in N$. Можно указать такое число $r>0$, что для некоторой точки $y=(y_1, y_2, y_3)$ из D', удовлетворяющей условию $(y_1-R)^2+y_3^2=r^2$, имеется не менее m прообразов в F. Для этого необходимо выбрать r такое, чтобы шар радиуса r с центром на D^1 лежал в F и целая часть числа $[r^p]$ была бы не менее m. Следовательно, ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места.

Так как $J(x,f)>0$ при $x\in D\backslash D^1$, то $N(y, f, G)=\mu(y, f, G)$ ($\mu(y, f, G)$ – топологический индекс или степень отображения f в точке y) для всякой подобласти $G, \overline{G}\subset D$, где $\mu(y, f, G)$ – индекс отображения f в точке $y=f(x)$ [2], $y\in f(\partial D)$, $(y_1-R)^2+y_3^2\ne0$. Следовательно, ограниченности на компактах степени отображения f нет.

Легко показать, что для произвольных чисел $\alpha>0$, $\beta>0$ существует число $0>p>\max\{(-1/2\beta), (-2/(2\alpha+2))\}$, для которого одновременно конечны интегралы вида $\int_D k_I^{\alpha}(x,f)|J(x,f)|dx<\infty$, $\int_D k_O^{\beta}(x,f)dx<\infty$.

Пример 2. Пусть $D\subset R^3$ – область, определенная следующим образом:

$$D=\{x\in R^3: 0<x_1<1,\ 0<x_2<x_1^2,\ 0<x_3<1\}.$$

Рассмотрим отображение

$$f(x): \left\{ y\in R^3: y_1=x_1,\ y_2=\frac{x_2}{x_1},\ y_3=x_1x_3 \right\},$$

которое отображает область D на область

$$D^*=\{y\in R^3: 0<y_1<1, 0<y_2<y_1, 0<y_3<y_1\}.$$

С учетом результатов [4, 5] нетрудно показать, что область D не квазиконформно эквивалентна шару B^3, т.е. отображение f не является отображением с ограниченным искажением. Покажем, что при некотором $p>0$ одновременно ограничены интегралы $\int_D k_I^p(x,f)|J(x,f)|dx$, $\int_D k_O^p(x,f)dx$.

Действительно, непосредственным подсчетом убеждаемся, что $J(x,f)=1$

$$|\nabla f(x)|=\left(1+\frac{x_2^2}{x_1^4}+\frac{1}{x_1^2}+x_3^2+x_1^2\right)^{1/2},$$

$$\lambda(x,f)=3^{-3/2}\left(1+\frac{x_2^2}{x_1^4}+\frac{1}{x_1^2}+x_3^2+x_1^2\right)^{3/2}.$$

Поскольку локальные характеристики связаны между собой неравенствами

$$k_I(x,f)\le k_O(x,f)^{n-1},$$
$$k_O(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}\lambda(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}k_O(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}k_I(x,f)^{n-1},$$
$$k(x,f)\le\min\{k_O(x,f), k_I(x,f)\},$$

то указанные интегралы будут ограничены при $p=2/3$.

Эти два примера показывают, что класс отображений с ограниченным в среднем искажением на ограниченных областях шире класса квазирегулярных отображений в пространстве.

3. Известно, что если $f:D\to D'$ – K-квазиконформное отображение, то неравенство $M(\Gamma)/K\le M(f\Gamma)\le \le KM(\Gamma)$ имеет место для каждого семейства кривых Γ в области D. Это неравенство перестает быть верным уже для отображений с ограниченным искажением [6]. Докажем оценки искажения модулей семейств кривых, соответствующих друг другу при отображениях с $K_{I,s}$, $K_{0,s}$-ограниченным в среднем искажением.

Пусть $f:D\to R^n$ – непрерывное изолированное отображение. Если $\beta:[a,b]\to R^n$ – кривая в $f(D)$, то поднятием β в D называется кривая α такая, что $f\circ\alpha=\beta$. Пусть $x\in f^{-1}(\beta(a))$, $I\subset[a,b]$, $a\in I$. Кривая $\alpha:I\to D$ называется f-поднятием β, начинающимся в точке x, если $f\alpha=\beta\,|\,I$, $\alpha(a)=x$.

Пусть $\beta:I_0\to R^n$ – замкнутая спрямляемая кривая, $I\subset I_0$, $\alpha:I\to D$ – кривая, обладающая свойством $f\circ\alpha\subset\beta$, $s_\beta:I_0\to[0,\ l(\beta)]$ – функция длины кривой β, тогда существует единственное отображение $\alpha^*:s_\beta I\to D$ такое, что $\alpha=\alpha^*\circ(s_\beta\,|\,I)$. α^* непрерывно и $f\circ\alpha^*\subset\beta^0$. Тогда α^* называется f-представлением кривой α относительно β, если $\beta=f\circ\alpha$. Отображение f называется абсолютно пренепрерывным на α, если α^* абсолютно непрерывно.

Теорема 1. Пусть $f:D\to R^n$ – непостоянное отображение с K_s-ограниченным в среднем искажением, $n\ge3$, $s>n-1$. Γ – семейство кривых в D и Γ' – семейство кривых $\beta[a,b]\to R^n$, $m\in N$. Предположим, что каждая кривая $\beta\in\Gamma'$ имеет частичные f-поднятия $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\in\Gamma$, начинающиеся в точках $f^{-1}(\beta(a))$ такие, что $card\{j:\alpha_j(t)=x\}\le i(x,f)$ для всех $x\in D$ и $t\in[a,b]$. Тогда $M(\Gamma)\le\dfrac{K_sC(D)}{m}M^{(s-1)/s}_{ns/(s-1)}(\Gamma')$.

Доказательство. Пусть E – множество точек $x\in D$, в которых отображение f дифференцируемо и $J_f(x)>0$. Из свойств отображений с ограниченным в среднем искажением имеем [7] $B_f\subset D\setminus E$ и $m=(D\setminus E)=m(f(D\setminus E))=0$. Пусть $B\supset f(D\setminus E)$ – борелевское множество меры нуль. Можно полагать, что для каждой кривой $\beta\in\Gamma'$ выполнены следующие утверждения:

(a) β – локально спрямляема;

(b) если α кривая в D такая, что $f\alpha\subset\beta$, тогда f локально абсолютно пренепрерывно на α;

(c) $\int\limits_\beta \aleph_B\,ds=0$.

Пусть функция ρ допустима для семейства кривых Γ. Определим борелевскую функцию $\sigma:D\to[0,\infty]$ так:

$$\sigma(x)=\begin{cases}\rho(x)/l(f'(x)), & \text{если } x\in D\setminus f^{-1}B,\\ 0, & \text{если } x\in f^{-1}B\end{cases}$$

и функцию $\rho':R^n\to[0,\infty]$ как $\rho'(y)=\dfrac{1}{m}\aleph_{fD}\sup\limits_C\sum\limits_{x\in C}\sigma(x)$,

где C пробегает все множество прообразов $f^{-1}(y)$ такое, что $cardC\le m$. Докажем, что функция ρ' допустима для семейства Γ'. Для доказательства того факта, что ρ' – борелевская функция, рассмотрим последовательность $D_1\subset D_2\subset\ldots$ вложенных компактных подобластей D, которые исчерпывают D. Положим

$$\rho_i=\rho\aleph_{\overline{D}_i},\ \sigma_i=\sigma\aleph_{\overline{D}_i},$$

$$\rho_i'(y)=\frac{1}{m}\aleph_{fD}(y)\sup_C\sum_{x\in C}\sigma_i(x).$$

Тогда $\rho_i'\to\rho'$ и $\rho_i'(y)=0$

если $y\in R^n\setminus\overline{fD}\cup f(\overline{D}\cap B_f)$.

Достаточно показать, что для произвольной точки $y_0\in\overline{fD}\setminus f(\overline{D}\cap B_f)$ существует окрестность, в которой ρ_i' – борелевская функция. Рассмотрим непересекающиеся окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_k$ точек прообраза $f^{-1}(y_0)\cap\overline{D}_i$ в $D\setminus B_f$, где $f|\overline{U}_j$ – инъекция, $j=1,\ldots,k$. Тогда $V_0=\left(\bigcap\limits_{j=1}^k fU_j\right)\setminus f\left(\overline{D}_i\setminus\bigcup\limits_{j=1}^k U_j\right)$ является окрестностью точки y_0. Пусть $V\subset V_0$ – связная окрестность точки y_0. Положим, что G – компонента $f^{-1}V$, пересекающая $\overline{D}_i$. Тогда G пересекается с некоторой U_i. Поскольку $f|\overline{U}_i$ – инъекция, то $V_0\cap f\partial U_i=\varnothing$. Значит, $G\cap\partial U_i=\varnothing$ и $G\subset U_i$. Таким образом, компоненты $f^{-1}V$, пересекающиеся с $\overline{D}_i$, состоят из областей $G_j\subset U_j$, $j=1,\ldots,k$ и f определяет гомеоморфизмы $f_j:G_j\to V$. Обозначим $g_j=f_j^{-1}$. Имеем $\rho_i'(y)=\dfrac{1}{m}\sup\limits_{j=1,\ldots,k}\sum\limits_{j=1}^k\sigma_i(g_j(y))$, где $y\in V$. Поскольку σ, g_j – борелевская функция, то и ρ_i' обладает тем же свойством.

Предположим, что $\beta:I_0\to R^n$ – замкнутая кривая семейства Γ'. Существуют кривые $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\in\Gamma$ такие, что $f\circ\alpha_j\subset\beta$ и $card\{j:\alpha_j(t)=x\}\le i(x,f)$ для всех $x\in D$ и $t\in I_0$. Пусть $c=l(\beta)$и $\alpha_j^*:I_j\to D$ – f-представление α_j относительно β. Тогда $\alpha_j(t)=\alpha_j^*\circ s_\beta(t)$, $f\alpha_j^*\subset\subset\beta^0$ и для любого $t\in I_j$ имеем

$$1=|(f\circ\alpha_j^*)'(t)|=$$

$$=|f'(\alpha_j^*(t))\alpha_j^*(t)'|\ge l(f'(\alpha_j^*(t)))|\alpha_j^*(t)'|$$

и
$$\sigma(\alpha_j^*(t))=\frac{\rho(\alpha_j^*(t))}{l(f'(\alpha_j^*(t))}\ge\rho(\alpha_j^*(t))|\alpha_j^{*\prime}(t)|.$$

Поскольку α_j^* абсолютно непрерывно, то

$$\int\limits_{\alpha_j}\rho ds=\int\limits_{I_j}(\rho\circ\alpha_j^*)|\alpha_j^{*\prime}|dm_1\le\int\limits_{I_j}\sigma\circ\alpha_j^*dm_1.$$

Пусть $h_j(t)=\sigma(\alpha_j^*(t)\aleph_{I_j}(t))$ для любого $t\in[0,c]$ и $J_t=\{j:t\in I_j\}$. Из (c) следует, что для почти всех $t\in[0,c]$ точки $\alpha_j^*(t)$, $j\in J_t$ – различные точки в прообразе $f^{-1}(\beta^0(t))$. Тогда

$$\rho'(\beta^0(t))\ge\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m h_j(t)\ \text{ и }\ \int\limits_\beta\rho' ds=\int\limits_0^c\rho'\circ\beta^0(t)dt\ge$$

$$\ge\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\int\limits_0^c h_j(t)dt=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\int\limits_{I_j}\sigma\circ\alpha_j^*dm_1\ge1.$$

Таким образом, функция ρ'допустима для семейства Γ'.

Пусть, как выше, $y_0\in\overline{fD}_i\setminus f(\overline{D})\cap B_i$ и V – связная окрестность точки y_0 такая, что существуют k

квазиконформных в среднем отображений $g_\mu:V\to G_\mu$, $\mu=1, \ldots, k$, обладающих свойствами: $f\circ g_\mu=id$ и $\overline{D}_i\cap f^{-1}V=\bigcup\{\overline{D}_i\cap G_\mu:1\le\mu\le k\}$. Для каждой точки $y\in V$ определим множество $L_y\subset P=\{1, \ldots, k\}$ следующим образом. Если $k\le m$, то $L_y=P$. Если же $k>m$, то $card L_y=m$ и для всех $\mu\in L_y$, $v\in P\setminus L_y$, либо $\sigma_i(g_\mu(y))>\sigma_i(g_v(y))$, либо $\sigma_i(g_\mu(y))=\sigma_i(g_v(y))$ и $\mu>v$. Тогда для $y\in V$ имеем

$$\rho_i'(y)=\frac{1}{m}\sum_{\mu\in L_y}\sigma_i(g_\mu(y)).$$

При $L\subset P$ борелевские множества $V_L=\{y\in V:L_y=L\}$ не пересекаются. Учитывая квазиконформность в среднем отображений $f|G_\mu$ и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{V_L}\rho_i'^n\,dm\le\frac{1}{m}\sum_{\mu\in L}\int_{V_L}(\sigma_i\circ g_\mu)^n\,dm=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{\mu\in L}\int_{g_\mu V_L}\sigma_i^n J_f\,dm\le\frac{C(D)K_s}{m}\left(\int_{f^{-1}V_L}\rho_i^{\frac{ns}{s-1}}\,dm\right)^{(s-1)/s}.$$

Суммируя по всем $L\subset P$, получим

$$\int_V\rho_i'^n\,dm\le\frac{C(D)K_s}{m}\left(\int_{f^{-1}V}\rho_i^{ns/(s-1)}\,dm\right)^{(s-1)/s}.$$

Множество $f\overline{D}_i\setminus f(\overline{D}_i\cap B_f)$ может быть покрыто счетным числом непересекающихся множеств V, как описано выше, и, учитывая тот факт, что $m(fB_f)=0$, имеем

$$\int_{R^n}\rho_i'^n\,dm\le\frac{C(D)K_s}{m}\left(\int_{R^n}\rho_i^{ns/(s-1)}\,dm\right)^{(s-1)/s}.$$

При $i\to\infty$ получаем

$$M(\Gamma')\le\frac{C(D)K_s}{m}M_{ns/(s-1)}^{(s-1)/s}(\Gamma).$$

Теорема доказана.

Предложение 1. Пусть $f:D\to\overline{R}^n$ – непрерывное открытое изолированное отображение, $\beta:[a,b]\to\overline{R}^n$ – кривая, $x_1, x_2, \ldots, x_k\in f^{-1}(\beta(a))$ и $m=\sum_{j=1}^{k}i(x_j,f)$. Тогда существуют максимальные f-поднятия $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, начинающиеся в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$, такие что $card\{j:\alpha_j(a)=x_l\}$, $1\le l\le k$, $card\{j:\alpha_j(t)=x\}\le i(x,f)$, $\forall x\in D$, $t\in[a,b]$.

Это предложение доказано в [4].

Пусть $f:U\to\overline{R}^n$ – отображение с K_s-ограниченным в среднем искажением, $y\in R^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma_*(t):[0,1]\to R^n$, для которой $\lim_{t\to1}\gamma_*(t)=y$. Пусть существует такая спрямляемая кривая y в U, что $f\gamma=\gamma_*$ и $\lim_{t\to1}\gamma(t)=x$, где $x\in\partial U$. Тогда кривая γ_* называется асимптотической для точки x; γ – ее асимптотическим поднятием; y – асимптотическим значением f в точке x. Если I – особое множество, $I_1\subset I$, то семейство асимптотических кривых (для I_1) – это все асимптотические кривые для $x\in I$ ($x\in I_1$). Пусть I – замкнутое подмножество области U, $f:U\to R^n$ – отображение с K_s-ограниченным в среднем искажением. Пусть A – замкнутое подмножество $U\setminus I$, а $I_0\subset I$. Обозначим через $\Gamma_*(A,I_0)$ семейство кривых $\gamma_*(t)$ в $f(U\setminus I)$, которые допускают асимптотические поднятия $y(t)$ такие, что $y(0)\in A$, а $\lim_{t\to1}\gamma(t)=x\in I_0$.

Теорема 2. Пусть $f:U\to R^n$ – отображение с K_s-ограниченным в среднем искажением, $U\setminus I$ – связно, $\Gamma_*(I_0)$ – семейство асимптотических кривых для точек $x\in I_0$ и $capA>0$. Тогда $M_{ns/(s+1)}(\Gamma_*(I_0))=0$ в том и только в том случае, когда

$$M_{ns/(s+1)}\Gamma_*(A,I_0))=0,\quad s\ge1/(n-1).$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим r – окрестность множества I такую, что $capG>0$, где $G=A\cap(U\setminus I_{2r})$. Пусть функция ρ_* допустима для семейства $\Gamma_*(A,I_0)$, причем $\int\rho_*^\alpha\,dv<\varepsilon$, где ε – некоторое положительное число. Поскольку $M_{ns/(s+1)}\Gamma_*(A,I_0))=0$, то ε можно выбрать сколь угодно малым. Определим функцию ρ на $U\setminus I$ следующим образом: $\rho(x)=\rho_*(f(x))\lambda_f^{-1}(x)$. Обозначим через A_ε множество точек $x\in\partial I_r$, для которых найдется кривая y со следующими свойствами:

1) образ y принадлежит $\Gamma_*(A,I_0)$;

2) дуга y' кривой y, соединяющая G с точкой x, лежит в $U\setminus I_{r/2}$;

3) $\int_{\gamma'}\rho\,ds\le 1/2$.

Так как ρ допустима, то для любой кривой y_1, идущей из $x\in A_\varepsilon$ в I_0, будем иметь $\int_{\gamma_1}\rho\,ds\ge 1/2$, если $f\circ\gamma_1\in\Gamma_*(I_0)$.

Пусть $N=N(U\setminus I_{r/2})$ и $D_\varepsilon=\partial I_r\setminus A_\varepsilon$. В силу определения множества D_ε для любой кривой $y\subset U\setminus I_{r/2}$, соединяющей G и D_ε, имеем $\int_\gamma\rho\,ds\ge 1/2$. Оценки для функции ρ дают неравенство

$$M(\Gamma(G,D_\varepsilon))\le2^nN^{(s-1)/s}K_s\varepsilon',$$

где $\varepsilon'=c\varepsilon^{(s-1)/s}$; c – постоянная. С другой стороны, модуль порядка $ns/(s+1)$ семейства кривых из $\Gamma_*(I_0)$, для которых существуют поднятия, идущие из A_ε в I_0, меньше $2^{ns/(s+1)}K_s^{s/(s-1)}\varepsilon$.

Выбирая теперь последовательности

$$\varepsilon_k=\left(2^{k+n}pN^{(s-1)/s}K_s\right)^{-s/(s-1)},$$

$$\varepsilon_k'=\left(\frac{1}{c}2^{k+n}pN^{(s-1)/s}K_s\right)^{-1}$$

и рассматривая два множества

$$A_p=\bigcup A_{\varepsilon_k}\ \text{ и }\ D_p=\bigcap D_{\varepsilon_k}=\partial I_r\setminus A_p,$$

получаем

$$M(\Gamma(D_p,G,U\setminus I_{r/2}))=\lim_{k\to\infty}2^nN^{(s-1)/s}K_s\varepsilon_k'=0.$$

Так как $M_\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}M_\alpha(\Gamma_i)$, то модуль порядка $ns/(s+1)$ кривых из $\Gamma_*(I_0)$, допускающих поднятия, которые пересекают A_p, не превосходит $p^{-s/(s-1)}$. Возьмем множества $D=\bigcup_{p=1}^{\infty} D_p$ и $\tilde{A}=\bigcap_{p=1}^{\infty} A_p$. Аналогично вышесказанному имеем $M(\Gamma(G,D))=0$, $M_{ns/(s+1)}\Gamma_\bullet(\tilde{A},I_0)=0$ и, кроме того, $D\cup\tilde{A}=\partial I_r$.

Аналогично [6] и используя теоремы 1 и теорему 3.1 в [3], можно показать, что $M(\Gamma(D))=0$, где $\Gamma(D)$ – семейство кривых, соединяющих точки $x\in U\backslash(I_{r/2}\cup D)$ с D. Так как r можно выбрать произвольно, то рассмотрим последовательность $r_k=1/k$. Заметим, что любая кривая $\gamma_\bullet\in\Gamma_\bullet(I_0)$ имеет поднятия, начинающиеся в $U\backslash I_{r_k}$ при некотором k. Исходя из связности $U\backslash I$, можно выбрать k настолько большим, что начало этой кривой попадает в связанную компоненту $U\backslash I_k$, которая содержит часть множества A нулевой емкости. Это поднятие пересекает $\tilde{A}$ или D. По доказанным утверждениям и теореме 1, видно, что в первом случае $M_{ns/(s+1)}(\Gamma_\bullet(\tilde{A},I_0))=0$, а во втором $M(\Gamma(D))=0$ и $M_{ns/(s+1)}(\Gamma_\bullet(D,I_0))=0$, т.е. $M_{ns/(s+1)}(\Gamma_\bullet(I_0))=0$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть $f:U\to U$ – отображение с K_s-ограниченным в среднем искажением, где I – замкнутое подмножество в U, $\dim I\le n-1$, и $\Gamma_\bullet$ – семейство кривых, асимптотических для точек $x\in I$. Если $M_\alpha(\Gamma_\bullet)=0$, $\alpha=ns/(s+1)$, $s>n-1$, $cap(R^n\backslash f(U\backslash I))>0$, то f продолжается непрерывно на U.

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть $x\in I$ и последовательности $x_i\to x$, $x_i'\to x$, а $q(f(x_i),f(x_i'))\ge a>0$, где $q(x,y)$ – сферическое расстояние. Так как $\dim I\le n-2$, то существует кривая $\gamma_i\in\Gamma(x_i,x_i')$, причем $d(\gamma_i)<2d(x_i,x_i')$. Обозначим через F множество $R^n\backslash f(U\backslash I)$. Из теоремы 3 [8] имеем $M_\alpha\left(\Gamma(F,\gamma_i^*)\right)\ge\delta>0$. С другой стороны, поднятие y кривой $\gamma_\bullet\in\Gamma(F,\gamma_i^*)$ выходит либо на ∂U, либо на I. Во втором случае кривая $\gamma_\bullet\in\Gamma_\bullet$ и модуль порядка α таких кривых нуль, а модуль кривых, которые выходят на ∂U, как следует из [1], стремится к нулю. Таким образом, пришли к противоречию. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малютина А.Н.* Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Экстремальные задачи теории функций. Томск, 1986. С. 24–31.
2. *Rado T., Reichelderfer R.V.* Continuous transformation in analisis. Springer-Verlag. Berlin; Gottingen; Heidelberg, 1955. 442 p.
3. *Чернавский А.В.* Конечнократные отображения многообразий // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 3. С. 357–369.
4. *Vaisala Ju.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lectures Notes in Math, 229. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1971. 144 p.
5. *Gehring F.W., Vaisala Ju.* Hausdorf dimensional mappings // J. London. Math. Soc. 1973. V. 2, № 6. P. 504–512.
6. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83 (125), № 2 (10). С. 261–273.
7. *Полецкий Е.А.* О стирании особенностей квазимероморфных отображений // Мат. сб. 1973. Т. 92 (134), № 2 (10). С. 242–256.
8. *Романова Е.Н.* О стирании особенностей отображений с ограниченным в среднем искажением // Актуальные проблемы современной математики. Т. 4. НИИ МИОО. Новосибирск (в печати).

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 25 октября 1998 г.