

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТОРГОВОЙ СЕССИИ НА ФОНДОВОЙ БИРЖЕ (К МЕТОДУ «ЯПОНСКИХ СВЕЧЕК»)

Находятся соотношения между ценой открытия, ценой закрытия, максимальной и минимальной ценами сделок на фондовой бирже за период торговой сессии при пуассоновском потоке сделок.

Развитие фондового и финансового рынка в России привело к необходимости использования математических методов технического анализа рынка для выяснения тенденций изменения цен на финансовые активы и валюту, прогнозирование этих цен. Математической основой этих методов является анализ временных рядов в сочетании с математическими моделями изменения цен на финансовые активы.

Среди технических средств анализа фондового рынка есть ряд эмпирических методов и приемов, еще не имеющих своего теоретического обоснования. К числу таких методов можно отнести метод так называемых «японских свечек», который дает достаточно хорошие результаты на практике, но теория которого совершенно неразработана [1, 2]. В этом методе для анализа поведения цен используются следующие четыре характеристики: цена открытия, цена закрытия, минимальная и максимальная цены за время одной сессии. По этим четырем величинам и строится так называемая «свечка», по которой и определяется характер рынка.

Полная теория свечек еще ждет своего исследования. В данной работе делается попытка рассчитать характеристики такой свечки в случае рынка, находящегося в равновесии.

Модель изменения цен финансовых активов

При исследовании мы применим следующую модель изменения цены S на какую-то бумагу, основой которой является модель, изложенная в [3]. Пусть 0 – момент открытия сессии и T – момент ее закрытия, так что мы рассматриваем сделки, совершенные на интервале $[0, T]$. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_N$ – моменты этих сделок, а S_0 – цена актива в момент начала сессии (цена открытия). Мы будем предполагать, что цена актива меняется от сделки к сделке так, что в момент t_n n -й сделки

$$S_n = S_0 \exp(h_1 + h_2 + \dots + h_n), \quad (1)$$

где h_n – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятностей $p(h)$. При конкретизации полученных результатов мы будем считать h нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $M\{h\} = \mu$ и дисперсией $D\{h\} = \sigma^2$. Отличие этой модели от предложенной в [3] состоит в том, что в модели [3] считается, что цена на актив меняется в дискретные моменты времени, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Мы же считаем, что цена актива меняется от сделки к сделке, т.е. ее изменение происходит в момент акта купли-продажи актива, а не само по себе. В этом случае цена закрытия

$$S_N = S_0 \exp(h_1 + h_2 + \dots + h_N), \quad (2)$$

где N – число сделок за сессию.

Вторым предположением является то, что моменты сделок считаются пуассоновским потоком с постоянной интенсивностью λ_0 . Это предположение достаточно адекватно описывает реальность в спокойные периоды финансовой жизни. В силу этого предположения число сделок N является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона

$$p(N) = \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda}, \quad (3)$$

где $\lambda = \lambda_0 T$.

Соотношение цен открытия и закрытия

В силу (2) для нахождения соотношения величин S_N и S_0 надо найти плотность вероятностей величины

$$H_N = h_1 + h_2 + \dots + h_N, \quad (4)$$

так как

$$\ln(S_N/S_0) = H_N. \quad (5)$$

Пусть $p(h)$ есть плотность вероятностей величин h_n , а $g_h(\omega)$ есть характеристическая функция для $p(h)$:

$$g_h(\omega) = M\{e^{i\omega h}\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(h) e^{i\omega h} dh,$$

т.е. $g_h(\omega)$ – преобразование Фурье от $p(h)$. Тогда характеристическая функция величины H_N при фиксированном N равна [4]:

$$g_{H_N}(\omega) = [g_h(\omega)]^N. \quad (6)$$

Но число сделок N у нас есть случайная величина, распределенная по закону (3). Поэтому, усредняя (6) по N и обозначая через H сумму $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ при случайном числе слагаемых N , получим

$$g_H(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} [g_h(\omega)]^n \frac{\lambda^n}{N!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda + \lambda g_h(\omega)}, \quad (7)$$

и кумулянтная функция $\psi_H(\omega)$ величины H есть

$$\psi_H(\omega) = \ln g_H(\omega) = \lambda [g_h(\omega) - 1]. \quad (8)$$

Найдем вероятностные характеристики величин H . Имеем $\psi'_H(\omega) = \lambda g'_h(\omega)$, так что [4]

$$M\{H\} = \frac{1}{i} \psi'_H(0) = \lambda \frac{1}{i} g'_h(0).$$

Но по свойствам характеристической функции

$$\frac{1}{i} g'_h(0) = M\{h\} = \mu,$$

так что

$$M\{H\} = \lambda \mu. \quad (9)$$

Далее, $\psi''_H(\omega) = \lambda g''_h(\omega)$, так что [4]

$$D\{H\} = -\psi''_H(0) = -\lambda g''_h(0).$$

Но $-g''_h(0) = M\{h^2\} = \mu^2 + \sigma^2$, так что

$$D\{H\} = \lambda (\mu^2 + \sigma^2). \quad (10)$$

Перейдем теперь от величины H к величине

$$\dot{H} = \frac{H - M\{H\}}{\sqrt{D\{H\}}} = \frac{H}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} - \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}}, \quad (11)$$

т.е. мы центрируем H и нормируем ее дисперсию на 1,

так что $M\{\dot{H}\} = 0$, $D\{\dot{H}\} = 1$. Тогда по свойствам кумулянтных функций

$$\psi_H(\omega) = -i \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} + \psi_H \left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} \right).$$

Найдем асимптотику $\psi_H(\omega)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, т.е. в случае, когда число сделок за сессию достаточно велико. Для этого разложим $g_h(\omega)$ в ряд Тейлора $g_h(\omega) = 1 + i\omega\mu - \frac{\omega^2}{2}(\mu^2 + \sigma^2) + O(\omega^3)$. Тогда $\psi_H(\omega) = \lambda i\omega\mu - \frac{\lambda\omega^2}{2}(\mu^2 + \sigma^2) + \lambda O(\omega^3)$ и для $\psi_H(\omega)$ получаем

$$\psi_H(\omega) = -i \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} + i\lambda \mu \frac{\omega}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} - \frac{\lambda\omega^2}{2} \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)} + \lambda O\left(\frac{\omega^3}{\lambda^{3/2}}\right) = -\frac{\omega^2}{2} + O\left(\frac{\omega^3}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (12)$$

Поэтому при $\lambda \rightarrow \infty$ $\psi_H(\omega) \rightarrow -\frac{\omega^2}{2}$, откуда следует,

что при $\lambda \rightarrow \infty$ величина H сходится по распределению к нормальной случайной величине $N(0, 1)$.

Обозначая H_T величину H , соответствующую последней сделке, можно считать, что при $\lambda_0 T \gg 1$ величина H является приближенно нормальной с

$$M\{H\} = \lambda\mu, D\{H\} = \lambda(\mu^2 + \sigma^2). \quad (13)$$

Цена закрытия S_T , определяется соотношением

$$\ln S_T = \ln S_0 + H \quad (14)$$

и имеет при $\lambda_0 T \gg 1$ логарифмически нормальное распределение

$$p(S_T / S_0) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}} \exp\left(-\frac{(\ln S_T - \ln S_0 - \lambda\mu)^2}{2\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}\right), \quad (15)$$

что и определяет соотношение между ценой открытия S_0 и ценой закрытия S_T . В частности,

$$P\{S_T > S_0\} = P\{H > 0\} = \Phi\left(\frac{\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}}\right), \quad (16)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция Лапласа.

Распределение максимальной цены

Другим набором параметров, характеризующим японскую свечу, являются максимальная и минимальная цены сделок за период торговой сессии, т.е. величины

$$S_M = \max(S_1, S_2, \dots, S_N), S_m = \min(S_1, S_2, \dots, S_N). \quad (17)$$

При этом следует иметь в виду, что число сделок N является случайной величиной.

Для нахождения плотностей вероятностей величин S_M и S_m достаточно найти плотность вероятностей величин

$$H_M = \max(h_1, h_2, \dots, h_N), H_m = \min(h_1, h_2, \dots, h_N). \quad (18)$$

Пусть, как и выше, h_i являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью вероятностей $p_h(h)$, функцией распределения $F_h(h)$, математическим ожиданием $M\{h\} = \mu$ и дисперсией $D\{h\} = \sigma^2$. Для упрощения выкладок перейдем к величинам $x_i = (h_i - \mu)/\sigma$, так что $M\{x_i\} = 0$, $D\{x_i\} = 1$, и будем искать плотность вероятностей величин

$$x_M = \max(x_1, x_2, \dots, x_N), x_m = \min(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (19)$$

Очевидно, что

$$p_x(x) = p_h(\mu + \sigma x), F_x(x) = F_h(\mu + \sigma x) \quad (20)$$

и $H_M = x_M \sigma + \mu$, $H_m = x_m \sigma + \mu$, так что, зная характеристики величин x_M и x_m , можно найти характеристики величин H_M и H_m , и далее S_M и S_m .

Выведем сначала асимптотическую плотность вероятностей величины x_M при $\lambda = \lambda_0 T \rightarrow \infty$. Пусть число сделок N фиксировано. Тогда функция распределения $F_M(x)$ величины x_M имеет вид [5] $F_M(x) = F_x(x)^N$. Усредняя по N , получим

$$F_M(x) = \sum_{N=0}^{\infty} F_x(x)^N \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda} = \exp(\lambda F_x(x) - \lambda), \quad (21)$$

так что плотность вероятностей $p_M(x)$ величины x_M есть

$$p_M(x) = F'_M(x) = \lambda p_x(x) \exp(\lambda F_x(x) - \lambda). \quad (22)$$

Найдем точку x_λ , в которой плотность вероятностей $p_M(x)$ принимает свое максимальное значение. Логарифмируя (22), получим

$$\pi_M(x) = \ln p_M(x) = \ln \lambda + \ln p_x(x) + \lambda F_x(x) - \lambda. \quad (23)$$

Для нахождения x_λ приравняем к нулю $\pi'_M(x)$, тогда получим уравнение

$$\frac{p'_x(x_\lambda)}{p_x(x_\lambda)} + \lambda p_x(x_\lambda) = 0, \quad (24)$$

которое и определяет точку x_λ максимума $p_M(x)$.

Разложим $\pi_M(x)$ в ряд Тейлора около точки x_λ и получим

$$\pi_M(x) = \pi_M(x_\lambda) - \frac{1}{2D\{x_\lambda\}}(x - x_\lambda)^2 + \dots, \quad (25)$$

где

$$\frac{1}{D\{x_\lambda\}} = 2 \left[\frac{p'_x(x_\lambda)}{p_x(x_\lambda)} \right]^2 - \frac{p''_x(x_\lambda)}{p_x(x_\lambda)}. \quad (26)$$

Возвращаясь к $p_M(x)$, получим, что при $\lambda \gg 1$

$$p_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{x_\lambda\}}} \exp\left(-\frac{(x - x_\lambda)^2}{2D\{x_\lambda\}}\right), \quad (27)$$

т.е. минимальное значение x_M распределено асимптотически нормально с математическим ожиданием x_λ и дисперсией $D\{x_\lambda\}$. Отсюда следует, что при $\lambda \gg 1$ величина h_M также распределена асимптотически нормально с $M\{h_M\} = \mu + \sigma x_\lambda$ и дисперсией $\sigma^2 D\{x_\lambda\}$, а S_M имеет логарифмически нормальное распределение.

Конкретизируем полученные формулы для случая, когда h_i являются нормальными случайными величинами, как это принято в стандартной модели [3]. Тогда

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), F_x(x) = \Phi(x) \quad (28)$$

и уравнение (24) для x_λ принимает вид

$$\exp\left(-\frac{x_\lambda^2}{2}\right) = \frac{x_\lambda}{\lambda} \sqrt{2\pi}, \quad (29)$$

или после логарифмирования

$$\frac{x_\lambda^2}{2} + \ln(x_\lambda \sqrt{2\pi}) = \ln \lambda. \quad (30)$$

Из вида графиков функций, стоящих в уравнении (29), очевидно, что оно имеет единственный корень и x_λ монотонно возрастает с ростом λ .

Уравнение (26) дает

$$D\{x_\lambda\} = \frac{1}{1+x_\lambda^2}, \quad (31)$$

что и определяет асимптотическую дисперсию x_M . $D\{x_\lambda\}$ монотонно убывает с ростом λ , т.е. с увеличением λ флуктуации x_M становятся все меньше и меньше.

Совместное распределение максимальной и минимальной цен

Найдем теперь совместную плотность вероятностей величин x_m и x_M в асимптотическом случае $\lambda \gg 1$. Если число сделок N фиксировано, то согласно [5]

$$P(x_m, x_M | N) = N(N-1)p_x(x_M)[F_x(x_M) - F_x(x_m)]^{N-2}. \quad (32)$$

Усредняя по N , получим

$$p(x_m, x_M) = \lambda^2 p_x(x_m) p_x(x_M) \times \exp[\lambda(F_x(x_M) - F_x(x_m) - 1)]. \quad (33)$$

Найдем точку $x_{m\lambda}, x_{M\lambda}$ в которой $p(x_m, x_M)$ принимает свое минимальное значение. Логарифмируя

$$\begin{aligned} \pi(x_m, x_M) &= \ln p(x_m, x_M) = \\ &= 2 \ln \lambda + \ln p_x(x_m) + \ln p_x(x_M) + \\ &+ \lambda F_x(x_M) - \lambda F_x(x_m) - \lambda \end{aligned} \quad (34)$$

и приравняв нулю производные от $\pi(x_m, x_M)$ по x_m и x_M , получим систему уравнений

$$\frac{p'(x_{M\lambda})}{p(x_{M\lambda})} + \lambda p(x_{M\lambda}) = 0, \quad \frac{p'(x_{m\lambda})}{p(x_{m\lambda})} - \lambda p(x_{m\lambda}) = 0. \quad (35)$$

Первое уравнение этой системы совпадает с уравнением (24), второе отличается от него лишь знаком перед вторым слагаемым. Разложим $\pi(x_m, x_M)$ в ряд Тейлора около точки $x_{m\lambda}, x_{M\lambda}$. В выражении (34) нет

«перекрестных» членов, т.е. членов, содержащих и x_m , и x_M . Поэтому это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \pi(x_m, x_M) &= \pi(x_{m\lambda}, x_{M\lambda}) - \frac{1}{2D\{x_{M\lambda}\}}(x_M - x_{M\lambda})^2 - \\ &- \frac{1}{2D\{x_{m\lambda}\}}(x_m - x_{m\lambda})^2 + \dots, \end{aligned}$$

где $D\{x_{M\lambda}\}$ и $D\{x_{m\lambda}\}$ имеют однотипные представления

$$D\{x_\lambda\} = 2 \left[\frac{p'(x_\lambda)}{p(x_\lambda)} \right]^2 - \frac{p''(x_\lambda)}{p(x_\lambda)}, \quad (36)$$

в которые надо подставить либо $x_{M\lambda}$, либо $x_{m\lambda}$. Это выражение совпадает с (26).

Таким образом, асимптотически при $\lambda \gg 1$

$$\begin{aligned} p(x_m, x_M) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{x_{M\lambda}\}}} \exp\left(-\frac{(x_M - x_{M\lambda})^2}{2D\{x_{M\lambda}\}}\right) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{x_{m\lambda}\}}} \exp\left(-\frac{(x_m - x_{m\lambda})^2}{2D\{x_{m\lambda}\}}\right), \end{aligned} \quad (37)$$

т.е. при $\lambda \gg 1$ x_m и x_M асимптотически нормальны и независимы. Заметим, что в случае нормального распределения величин $x_{m\lambda} = -x_{M\lambda}$, что вполне естественно.

Возвращаясь к минимальной S_m и максимальной S_M ценам за период сессии, легко получить, что они имеют логарифмически нормальное распределение, явный вид которого можно выписать.

Полученные в данной работе соотношения можно использовать для анализа тенденций фондового и финансового рынков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nison S. Japanese candlestick charting techniques. New York institute of finance New York, 1991. 315 p.
2. Nison S. Beyond Candlesticks. John Wiley, New York, 1994. 280 p.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.
4. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1976. 292 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 15 декабря 1999 г.