

ОЦЕНКА СПЕКТРА МОЩНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СПЛАЙНАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЧИСЛЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается задача оценивания спектра мощности стационарного случайного процесса сплайнами первого порядка при случайном числе измерений. Исследуются статистические характеристики полученных оценок.

Спектр мощности $S(\omega)$ наряду с функцией корреляции $R(\tau)$ является важнейшей характеристикой второго порядка стационарного случайного процесса, так как его знание позволяет производить спектральный анализ процессов.

Постановка задачи

Полагаем, что значения процесса $y(t)$ измеряются на отрезке времени $[0, T]$. Разобьем этот отрезок на части $[0, T_0], [T_0, 2T_0], \dots, [(N-1)T_0, NT_0]$. Наблюдение в момент времени $t_i = iT_0, i = 0, N$ представимо в виде $y_i =$

$$= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_j^{(i)}, \text{ где } n_i - \text{случайные величины, распреде-}$$

ленные по закону Пуассона с параметром λ . Моменты измерений $t_i, i = 0, N$ известны точно. Полагаем $y_i^{(i)} =$

$= y(t_i) + \xi_i^{(i)}$, где $y(t_i)$ одно и то же для одного измерения; $\xi_i^{(i)}, i = 1, n_i$ – случайная погрешность, причем

$$M[\xi_i^{(i)}] = 0, D[\xi_i^{(i)}] = \sigma^2,$$

$$M[y(t_i)] = 0, M[\xi_i^{(i)}] = 0,$$

$$D[\xi_i^{(i)}] = \sigma^2, M[y(t_i)] = 0,$$

$$M[y(t_i) y(t_j)] = R[t_i - t_j].$$

Полагаем, что $\xi_i^{(i)}$ для различных i независимы, т.е.

$$\overline{y_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_j^{(i)} = y(t_i) + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^{(i)}.$$

По результатам наблюдений $\overline{y_i}, i = 0, N$ надо построить оценку $\hat{S}(\omega)$ спектра мощности $S(\omega)$.

Алгоритм решения задачи

1. Разобьем всю ось частот ω на отрезки $[0, \Omega], [\Omega, 2\Omega], [2\Omega, 3\Omega]$ и т.д.

2. На отрезке $[(k-1)\Omega, k\Omega]$ функция $S(\omega)$ представима в виде $S(\omega) = \theta_{k-1} \frac{k\Omega - \omega}{\Omega} + \theta_k \frac{\omega - (k-1)\Omega}{\Omega}$, т.е. она является сплайном первого порядка.

3. Из формулы Винера–Хинчина [1] находим корреляционную функцию

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (1)$$

$$R_y(\tau) = \sum_{k=0}^n \theta_k \phi_k(\tau). \quad (2)$$

4. Находим оценки $\hat{\theta}_k$ параметров $\theta_k, k = 0, n$.

5. Зная оценку корреляционной функции в виде (2), находим с помощью формулы Винера – Хинчина [1] оценку спектра мощности, исходя из соотношения

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_y(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Оценка параметров спектра

Вычисляя корреляционную функцию (1) и сопоставляя полученный результат с (2), находим функции $\phi_k(\tau), k = 0, n$ в виде

$$\phi_k(\tau) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\Omega\tau)}{\Omega\tau^2}, & \text{если } k=0, \\ \frac{2\cos(k\Omega\tau) - 1 - \cos(\Omega\tau)}{\Omega\tau^2}, & \text{если } 1 \leq k \leq n-1, \\ \frac{\sin(n\Omega\tau)}{\tau} + \frac{\cos(n\Omega\tau) - \cos[(n-1)\Omega\tau]}{\Omega\tau^2}, & \text{если } k=n. \end{cases} \quad (3)$$

Оценки $\hat{\theta}_k$ неизвестных параметров θ_k корреляционной функции $R_y(\tau)$, представленной выражением (2), будем искать методом наименьших квадратов [2], исходя из условия:

$$Q = \sum_{i,j=0, i \neq j}^N n_i n_j [\overline{y_i} \overline{y_j} - \sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \phi_k(t_j - t_i)]^2 \Rightarrow \min_{\hat{\theta}_k}.$$

Продифференцировав (4) по $\hat{\theta}_k, k = 0, n$, получим систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}_0} = -2 \sum_{i,j=0, i \neq j}^N n_i n_j [\overline{y_i} \overline{y_j} - \sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \phi_k(t_j - t_i)] \phi_0(t_j - t_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}_1} = -2 \sum_{i,j=0, i \neq j}^N n_i n_j [\overline{y_i} \overline{y_j} - \sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \phi_k(t_j - t_i)] \phi_1(t_j - t_i) = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}_n} = -2 \sum_{i,j=0, i \neq j}^N n_i n_j [\overline{y_i} \overline{y_j} - \sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \phi_k(t_j - t_i)] \phi_n(t_j - t_i) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Перейдя к матричным обозначениям $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n]^T$

$$X = \begin{bmatrix} \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_0^2(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_1(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_1(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \varphi_n^2(t_j - t_i) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \overline{y_i y_j} \varphi_0(t_j - t_i) \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \overline{y_i y_j} \varphi_1(t_j - t_i) \\ \dots \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N n_i n_j \overline{y_i y_j} \varphi_n(t_j - t_i) \end{bmatrix},$$

систему (5) перепишем в виде

$$Y = X \hat{\theta}.$$

Усреднив элементы матрицы X по n , получим

$$(6) \quad M[X] = \lambda^2 \bar{X}, \text{ где}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_0^2(t_j - t_i) & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_1(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_1(t_j - t_i) & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_1^2(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_1(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_0(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_1(t_j - t_i) \varphi_n(t_j - t_i) & \dots & \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_n^2(t_j - t_i) \end{bmatrix}.$$

Заменяя матричное уравнение (6) на

$$Y = \lambda^2 \bar{X} \hat{\theta}, \quad (7)$$

получаем $\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} Y$. С учетом (3), получим матрицу

$$\bar{X} = 6\Omega\pi T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

где элемент матрицы $\bar{X}$ (обозначим его $\bar{x}$) с индексами k, l

$$\bar{x}_{kl} = \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_k(t_j - t_i) \varphi_l(t_j - t_i) \approx \int_0^T \int_0^T \varphi_k(u-v) \varphi_l(u-v) du dv, \quad k, l = \overline{0, n}.$$

Сделав замену переменных и поменяв порядок интегрирования, от исходного двойного интеграла перейдем к однократному вида $T \int_{-T}^T (1 - \frac{|z|}{T}) \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz$.

В асимптотике при $T \rightarrow \infty$ получим

$$\int_{-T}^T (1 - \frac{|z|}{T}) \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz.$$

Тогда вычисление элементов матрицы $\bar{X}$ сводится к вычислению интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz, k, l = \overline{0, n}$.

Обратная матрица к $\bar{X}$ была найдена в [3] и имеет вид

$$\bar{X}^{-1} = \frac{1}{6\Omega\pi T d_n} \begin{bmatrix} \beta_0 \beta_n & -\beta_0 \beta_{n-1} & \dots & (-1)^{-n} \beta_0^2 \\ -\beta_0 \beta_{n-1} & \beta_1 \beta_{n-1} & \dots & (-1)^{1-n} \beta_1 \beta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{-n} \beta_0^2 (-1)^{1-n} \beta_1 \beta_0 \dots & \beta_n \beta_0 & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \beta_s = \frac{(2 + \sqrt{3})^s + (2 - \sqrt{3})^s}{2}, s = \overline{0, n}, d_n = 2\beta_n - \beta_{n-1}.$$

По $\bar{X}^{-1}$ мы найдем явный вид оценок $\hat{\theta}_k, k = \overline{0, n}$.

Статистические характеристики полученных оценок

Для доказательства несмещенности полученных оценок перепишем матричное уравнение (7):

$$\sum_{i,j=0; i \neq j}^N \overline{y_i y_j} n_i n_j \varphi_l(t_j - t_i) = \lambda^2 \sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_k(t_j - t_i) \varphi_l(t_j - t_i), \quad (8)$$

где $l = \overline{0, n}$. Найдя математическое ожидание от левой и правой частей (8), получим, что $\sum_{i,j=0; i \neq j}^N R[t_j - t_i] \varphi_l(t_j - t_i) =$

$$= \sum_{k=0}^n M[\hat{\theta}_k] \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_k(t_j - t_i) \varphi_l(t_j - t_i). \text{ Учитывая (2),}$$

имеем $\sum_{k=0}^n \hat{\theta}_k \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_k(t_j - t_i) \varphi_l(t_j - t_i) = \sum_{k=0}^n M[\hat{\theta}_k] \times \times \sum_{i,j=0; i \neq j}^N \varphi_k(t_j - t_i) \varphi_l(t_j - t_i)$, откуда следует несмещенность оценок при условии, что $\bar{X}$ – невырожденная матрица.

Найдем ковариационную матрицу оценок:

$$V[\hat{\theta}] = M[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = M[(\frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} Y - M[\frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} Y]) \times \times (\frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} Y - M[\frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} Y])^T] = \frac{1}{\lambda^2} \bar{X}^{-1} V[Y] (\bar{X}^{-1})^T,$$

где $V[Y] = M[YY^T] - M[Y]M[Y^T]$. Для нахождения матрицы $V[\hat{\theta}]$ необходимо вычислить $V[Y]$. Усреднив вектор-столбец Y последовательно по $\xi_i, y(t_i), n_i$, получим

$$M[Y] = \lambda^2 \begin{bmatrix} \sum_{i,j=0; i \neq j}^N R[t_j - t_i] \varphi_0(t_j - t_i) \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N R[t_j - t_i] \varphi_1(t_j - t_i) \\ \dots \\ \sum_{i,j=0; i \neq j}^N R[t_j - t_i] \varphi_n(t_j - t_i) \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы $Y Y^T$ с индексами его отдельно:
 $i_1, j_1 (i_1, j_1 = \overline{0, n})$ обозначим через $y_{i_1 j_1}$ и выпишем

$$y_{i_1 j_1} = \left\{ \sum_{l=0}^N n_l n_j y(t_l) y(t_j) + n_j y(t_j) \sum_{l=0}^{n_l} \xi_l^{(l)} + n_j y(t_j) \sum_{m=0}^{n_j} \xi_j^{(m)} + \sum_{m=0}^{n_j} \xi_j^{(m)} \sum_{l=0}^{n_l} \xi_l^{(l)} \right\} \varphi_{i_1}(t_j - t_l) \times \\ \times \left\{ \sum_{p,s=0}^N n_p n_s y(t_p) y(t_s) + n_p y(t_p) \sum_{r=0}^{n_s} \xi_s^{(r)} + n_s y(t_s) \sum_{q=0}^{n_p} \xi_p^{(q)} + \sum_{r=0}^{n_s} \xi_s^{(r)} \sum_{q=0}^{n_p} \xi_p^{(q)} \right\} \varphi_{j_1}(t_p - t_s).$$

Усреднив элемент $y_{i_1 j_1}$ последовательно по $\xi_l, y(t_l), n_l$, получим

$$M[y_{i_1 j_1}] = \sum_{l,j=0; l \neq j}^N \varphi_{i_1}(t_j - t_l) \sum_{p,s=0; p \neq s}^N \varphi_{j_1}(t_p - t_s) E, \text{ где}$$

$$E = \begin{cases} \lambda^3 (\lambda+1) \{2 R[t_j - t_l] R[t_j - t_s] + R[0] R[t_l - t_s]\} + \sigma^2 \lambda^3 R[t_l - t_s], & \text{если } j=p, i \neq s, \\ \lambda^3 (\lambda+1) \{2 R[t_j - t_l] R[t_j - t_p] + R[0] R[t_l - t_p]\} + \sigma^2 \lambda^3 R[t_l - t_p], & \text{если } j=s, i \neq p, \\ \lambda^3 (\lambda+1) \{2 R[t_j - t_l] R[t_l - t_p] + R[0] R[t_j - t_p]\} + \sigma^2 \lambda^3 R[t_j - t_p], & \text{если } j \neq p, i=s, \\ \lambda^3 (\lambda+1) \{2 R[t_j - t_l] R[t_l - t_s] + R[0] R[t_j - t_s]\} + \sigma^2 \lambda^3 R[t_j - t_s], & \text{если } j \neq s, i=p, \\ \lambda^2 (\lambda+1)^2 \{2 R^2[t_j - t_l] + R^2[0]\} + 2 \lambda^2 (\lambda+1) \sigma^2 R[0], & \text{если } j=p, i=s \cup j=s, i=p, \\ \lambda^4 \{R[t_j - t_l] R[t_p - t_s] + R[t_l - t_s] R[t_j - t_p] + R[t_l - t_p] R[t_j - t_s]\}, & \text{если } j \neq p, j \neq s, i \neq p, i \neq s. \end{cases}$$

Тогда матрица $V[Y]$ будет состоять из элементов вида $\sum_{l,j=0; l \neq j}^N \varphi_{i_1}(t_j - t_l) \sum_{p,s=0; p \neq s}^N \varphi_{j_1}(t_p - t_s) U$, где $i_1, j_1 = \overline{0, n}$;

$$U = \begin{cases} (\lambda^4 + 2 \lambda^3) R[t_j - t_l] R[t_j - t_s] + \lambda^3 (\lambda+1) R[0] R[t_l - t_s] + \sigma^2 \lambda^3 R[t_l - t_s], & \text{если } j=p, i \neq s; \\ (\lambda^4 + 2 \lambda^3) R[t_j - t_l] R[t_j - t_p] + \lambda^3 (\lambda+1) R[0] R[t_l - t_p] + \sigma^2 \lambda^3 R[t_l - t_p], & \text{если } j=s, i \neq p; \\ (\lambda^4 + 2 \lambda^3) R[t_j - t_l] R[t_l - t_p] + \lambda^3 (\lambda+1) R[0] R[t_j - t_p] + \sigma^2 \lambda^3 R[t_j - t_p], & \text{если } j \neq p, i=s; \\ (\lambda^4 + 2 \lambda^3) R[t_j - t_l] R[t_l - t_s] + \lambda^3 (\lambda+1) R[0] R[t_j - t_s] + \sigma^2 \lambda^3 R[t_j - t_s], & \text{если } j \neq s, i=p; \\ \lambda^2 (\lambda^2 + 4 \lambda + 2) R^2[t_j - t_l] + \lambda^2 (\lambda+1)^2 R^2[0] + 2 \lambda^2 (\lambda+1) \sigma^2 R[0], & \text{если } j=p, i=s \cup j=s, i=p; \\ \lambda^4 \{R[t_l - t_s] R[t_j - t_p] + R[t_l - t_p] R[t_j - t_s]\}, & \text{если } j \neq p, j \neq s, i \neq p, i \neq s. \end{cases}$$

Найдем $V[Y]$ для случая, когда $j \neq p, j \neq s, i \neq p$ с учетом формул (3). Для этого выпишем отдельно элемент этой матрицы с индексами i_1, j_1 , где $i_1, j_1 = \overline{0, n}$:

$$\sum_{l,j=0; l \neq j}^N \varphi_{i_1}(t_j - t_l) \sum_{p,s=0; p \neq s}^N \varphi_{j_1}(t_p - t_s) \lambda^4 \{R[t_l - t_s] R[t_j - t_p] + R[t_l - t_p] R[t_j - t_s]\} \approx \\ \approx \lambda^4 \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(x-y) \{R[v-y] R[u-x] + R[vx] R[u-y]\} du dv dx dy.$$

Разбив на сумму двух интегралов, сделав замену переменных в обоих интегралах и учитывая четность функций $\varphi_k(\tau)$, $k=\overline{0, n}$, имеем

$$2 \lambda^4 \int_0^T du \int_0^T dv \int_0^{u+v} d\alpha \int_0^{u+v} d\beta \varphi_{i_1}(u-v+\alpha-\beta) R[\alpha] R[\beta] d\beta.$$

Поменяв порядок интегрирования, приходим к сумме интегралов:

$$2 \lambda^4 \left\{ \int_{-T}^0 R[\alpha] d\alpha \int_{-T}^0 R[\beta] d\beta \int_0^{u+v} du \int_0^{u+v} dv \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(u-v+\alpha-\beta) dv + \right. \\ \left. + \int_0^T R[\alpha] d\alpha \int_{-T}^0 R[\beta] d\beta \int_0^{u+v} du \int_0^{u+v} dv \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(u-v+\alpha-\beta) dv + \right. \\ \left. + \int_{-T}^0 R[\alpha] d\alpha \int_0^T R[\beta] d\beta \int_0^{u+v} du \int_0^{u+v} dv \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(u-v+\alpha-\beta) dv + \right. \\ \left. + \int_0^T R[\alpha] d\alpha \int_0^T R[\beta] d\beta \int_0^{u+v} du \int_0^{u+v} dv \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(u-v+\alpha-\beta) dv \right\}.$$

Устремив $T \rightarrow \infty$ во всех внутренних интегралах собственные интегралы, окончательно получаем предыдущего выражения, вычислив полученные несоб-

$$\sum_{l,j=0; l \neq j}^N \varphi_{i_1}(t_j - t_l) \sum_{p,s=0; p \neq s}^N \varphi_{j_1}(t_p - t_s) \lambda^4 \{R[t_l - t_s] R[t_j - t_p] + \\ + R[t_l - t_p] R[t_j - t_s]\} \approx 2 \lambda^4 T \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] F_{i_1 j_1}(\alpha, \beta) d\beta,$$

где $F_{i_1 j_1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_{-n}^n \varphi_{i_1}(u-v) \varphi_{j_1}(u-v+\alpha-\beta) dv$. Функции $F_{i_1 j_1}(\alpha, \beta)$, $i_1, j_1 = \overline{0, n}$ достаточно легко вычисляются

с использованием преобразования Фурье. Окончательно имеем, что $V[Y]$ – это трехдиагональная матрица со следующими элементами:

$$y_{0l} = \lambda^4 \pi \Omega T \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{2}{\Omega^3 (\alpha-\beta)^3} \{ \Omega(\alpha-\beta) - \sin[\Omega(\alpha-\beta)] \} d\beta, & \text{если } l=0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{1}{\Omega^3 (\alpha-\beta)^3} \{ 2\sin[\Omega(\alpha-\beta)] - \Omega(\alpha-\beta) - \\ - \Omega(\alpha-\beta) \cos[\Omega(\alpha-\beta)] \} d\beta, & \text{если } l=1; \\ 0, & \text{если } l \geq 2; \end{cases}$$

$$y_{nl} = \lambda^4 \pi \Omega T \begin{cases} 0, & \text{если } l < n-1; \\ \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{2}{\Omega^2 (\alpha-\beta)^2} \cos[(n-1)\Omega(\alpha-\beta)] d\beta, & \text{если } l=n-1; \\ 0, & \text{если } l=n; \end{cases}$$

$$y_{kl} = \lambda^4 \pi \Omega T \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{2}{\Omega^3 (\alpha-\beta)^3} \{ \Omega(\alpha-\beta) \cos[l\Omega(\alpha-\beta)] + \\ + \sin[(l-1)\Omega(\alpha-\beta)] - \sin[(l+1)\Omega(\alpha-\beta)] \} d\beta, & \text{если } k=l; \\ \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{1}{\Omega^3 (\alpha-\beta)^3} \{ -\Omega(\alpha-\beta) \cos[m\Omega(\alpha-\beta)] - \\ - 2\sin[(m-1)\Omega(\alpha-\beta)] + 2\sin[m\Omega(\alpha-\beta)] - \\ - \Omega(\alpha-\beta) \cos[(m-1)\Omega(\alpha-\beta)] \} d\beta, & \text{если } |k-l|=1, m=\max(k, l); \\ 0, & \text{если } |k-l| > 1; \end{cases}$$

где $k = \overline{1, n-1}$; $l = \overline{0, n-1}$; и, наконец,

$$y_{kn} = \lambda^4 \pi \Omega T \begin{cases} 0, & \text{если } k < n-1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} R[\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R[\beta] \frac{2}{\Omega^2 (\alpha-\beta)^2} \cos[(n-1)\Omega(\alpha-\beta)] d\beta, & \text{если } k=n-1, \\ 0, & \text{если } k=n. \end{cases}$$

Знание матрицы $V[\hat{\theta}]$ позволяет обычным образом вычислять доверительные интервалы для неизвестных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов Ю.Д. Теория и упражнения по случайным процессам. Л.: Изд-во ВКАС, 1972. 314 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 576 с.
3. Константинова И.Г. // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. С. 81–87.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 18 декабря 1999 г.