

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ ЕГО ЧАСТИЧНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассматривается полусинхронный МС-поток событий в условиях его частичной наблюдаемости. Решается задача оценивания состояния исследуемого потока событий. Для решения данной задачи применяются результаты теории условных марковских процессов. Предлагается оптимальный рекуррентный алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий, основанный на пересчете апостериорных вероятностей состояний в любой момент времени. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие поведение апостериорной вероятности для некоторых наборов параметров.

Рассматривается дважды стохастический поток событий, интенсивность которого представляет собой кусочно-постоянный марковский процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 , причем $\lambda_1 > \lambda_2$. Будем говорить, что если $\lambda(t) = \lambda_1$, то имеет место первое состояние процесса, если $\lambda(t) = \lambda_2$, то – второе состояние. Если имеет место первое состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, генерируется пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если же имеет место второе состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, генерируется пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 .

Особенностью рассматриваемого потока является то, что в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ может сменить первое состояние на второе с вероятностью p либо остаться в первом состоянии с вероятностью $1 - p$. Что касается второго состояния процесса $\lambda(t)$, то длительность пребывания в нем является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - \exp(-\beta t)$, где β – интенсивность смены второго состояния на первое. Такой поток также называют полусинхронным МС-поток событий [1].

Будем рассматривать описанный МС-поток событий в условиях его частичной наблюдаемости. Это означает, что момент наступления события инициирует время длительности T , в течение которого исходный поток событий не доступен наблюдению. Этот период ненаблюдаемости называют мертвым временем. Будем считать, что события, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают его продления. Длительность мертвого времени T является детерминированной величиной. По окончании периода ненаблюдаемости исходный поток событий вновь доступен наблюдению. Таким образом, наблюдаемый поток событий – это поток, в котором отсутствуют события, наступившие в течение мертвого времени T .

Необходимо по наблюдениям за потоком событий на временном интервале $(0, t]$ оценить состояние процесса, имеющее место в момент времени t . Для решения данной задачи применяется подход, основанный на результатах теории условных марковских процессов. Данный подход позволяет получить дифференциальные уравнения, определяющие распределение апостериорных вероятностей для значений ненаблюдаемых компонент процесса $\lambda(t)$ при условии известных наблюдений.

Результатом наблюдений являются моменты времени $t_1, \dots, t_n$ наступления событий в наблюдаемом потоке на интервале $(0, t]$. Необходимо найти условные (апостериорные) вероятности $w(\lambda_1/t_1, \dots, t_n)$ и $w(\lambda_2/t_1, \dots, t_n)$

того, что в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ при условии, что известна реализация $t_1, \dots, t_n$ потока на интервале $(0, t]$. Решение о том, какое состояние процесса $\lambda(t)$ имеет место в момент времени t , выносится по методу максимума апостериорной вероятности [2] на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_1/t_1, \dots, t_n)$ и $w(\lambda_2/t_1, \dots, t_n)$: если $w(\lambda_1/t_1, \dots, t_n) \geq w(\lambda_2/t_1, \dots, t_n)$, то выносится решение о том, что оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, если $w(\lambda_1/t_1, \dots, t_n) < w(\lambda_2/t_1, \dots, t_n)$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Пусть время меняется дискретно с шагом Δt , т.е. $t = k\Delta t$ ($k = 1, 2, \dots$). Рассмотрим двумерный процесс $(\lambda(k\Delta t), r_k(\Delta t)) = r(k\Delta t) = r(k\Delta t) - r((k-1)\Delta t) = (\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda(k\Delta t) = \lambda^{(k)}$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_n$, $n = 1, 2$), $r_k(\Delta t) = r_k$ – число событий, наступивших на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$, $r_k = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим интервал времени (t_i, t_{i+1}) между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В силу особенности рассматриваемого МС-потока событий, а именно наличия мертвого времени, этот интервал можно разбить на два. Первый – $(t_i, t_i + T]$ – интервал времени, в течение которого исходный поток не доступен наблюдению, второй – $(t_i + T, t_{i+1})$ – интервал времени, в течение которого исходный поток доступен наблюдению. В связи с этим решение о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$ на участке $(t_i, t_i + T]$ будем выносить на основании априорных вероятностей состояний, а на участке $(t_i + T, t_{i+1})$ – на основании апостериорных вероятностей состояний.

Обозначим $\pi_j(t, t_i)$ априорную вероятность j -го состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t ($t_i \leq t \leq t_i + T$), $j = 1, 2$. Тогда нетрудно показать, что

$$\pi_j(t, t_i) = \frac{\beta}{p\lambda_1 + \beta} + \left(q - \frac{\beta}{p\lambda_1 + \beta} \right) \exp(-(p\lambda_1 + \beta)(t - t_i)), \quad (1)$$

где q – вероятность того, что в момент времени $t = t_i$ имеет место первое состояние процесса $\lambda(t)$.

Вернемся к интервалу наблюдения $(t_i + T, t_{i+1})$. Дальнейшее поведение процесса $(\lambda^{(k)}, r_k) = (\lambda(k\Delta t), r_k(\Delta t))$ на этом интервале не зависит от того, что было до момента времени $k\Delta t$. Пусть $P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ – вероятность перехода процесса за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ в состояние $(\lambda^{(k)}, r_k)$. Тогда

$$P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = P(r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})P(\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}, r_k, r_{k-1}). \quad (2)$$

Число событий r_k на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ не зависит от числа событий r_{k+1} , наступивших на пре-

дыдущем интервале времени $((k-2)\Delta t, (k-1)\Delta t)$ и значение $\lambda^{(k)}$ процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ не зависит от числа событий r_{k+1} на интервале $((k-2)\Delta t, (k-1))$. Тогда имеют место следующие соотношения для вероятностей, входящих в выражение (2):

$$P(r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = P(r_k/\lambda^{(k-1)}), \\ P(\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}, r_k, r_{k-1}) = P(\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}, r_k).$$

Учитывая исходные предпосылки, с точностью до членов порядка $o(\Delta t)$ малости находим

$$P(r_k/\lambda^{(k-1)} = \lambda_i) = \frac{(\lambda_i \Delta t)^{r_k}}{r_k!} \exp(-\lambda_i \Delta t) (i=1, 2), \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_1/\lambda^{(k-1)} = \lambda_1, r_k = 0) = 1, \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_2/\lambda^{(k-1)} = \lambda_1, r_k = 0) = 0, \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_1/\lambda^{(k-1)} = \lambda_1, r_k = 1) = 1 - p, \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_2/\lambda^{(k-1)} = \lambda_1, r_k = 1) = p, \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_1/\lambda^{(k-1)} = \lambda_2, r_k) = \\ = P(\lambda^{(k)} = \lambda_1/\lambda^{(k-1)} = \lambda_2) = \beta \Delta t, \\ P(\lambda^{(k)} = \lambda_2/\lambda^{(k-1)} = \lambda_2, r_k) = \\ = P(\lambda^{(k)} = \lambda_2/\lambda^{(k-1)} = \lambda_2) = 1 - \beta \Delta t. \quad (3)$$

Таким образом, вероятность $P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$, заданная выражением (2), полностью определяется вероятностями (3).

Обозначим

$$\bar{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m), \quad \bar{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}),$$

где $\bar{r}_m$ – последовательность наблюдений за время от 0 до $m\Delta t$ ($r_0 = 0$); $\bar{\lambda}^{(m)}$ – последовательность ненаблюдаемых (т.е. неизвестных) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ ($\lambda(0) = \lambda^{(0)} = \lambda_i, i=1, 2$).

Пусть $w(\bar{r}_m, \bar{\lambda}^{(m)})$ – совместная вероятность m -мерных случайных величин $\bar{r}_m$ и $\bar{\lambda}^{(m)}$. Процесс $(r_k(\Delta t), \lambda(k\Delta t))$ марковский, и совместная вероятность представляется в виде произведения вероятностей перехода:

$$w(\bar{r}_m, \bar{\lambda}^{(m)}) = \\ = w(r_0, \lambda^{(0)}) \prod_{k=1}^m P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}). \quad (4)$$

Аналогично

$$w(\bar{r}_{m+1}, \bar{\lambda}^{(m+1)}) = \\ = w(r_0, \lambda^{(0)}) \prod_{k=1}^{m+1} P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = \\ = w(\bar{r}_m, \bar{\lambda}^{(m)}) P(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}/\lambda^{(m)}, r_m). \quad (5)$$

Рассмотрим условную вероятность $w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m)$ значений процесса $\bar{\lambda}^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\bar{r}_m$:

$$w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m) = \frac{w(\bar{r}_m, \bar{\lambda}^{(m)})}{w(\bar{r}_m)}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражение (4), затем (5), находим соответственно

$$w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m) = \\ = \frac{w(r_0, \lambda^{(0)}) \prod_{k=1}^m P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})}{w(\bar{r}_m)}, \quad (7)$$

Найдем апостериорное распределение вероятностей

процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t = m\Delta t$, т.е. в момент окончания наблюдений. Обозначим это распределение как $w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m)$ или

$$w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m) = w(\lambda^{(m)} = \lambda_1/\bar{r}_m), \quad w(\lambda^{(m)} = \lambda_2/\bar{r}_m).$$

Зная совместное распределение вероятностей m -мерной случайной величины $\bar{\lambda}^{(m)}$, находим с учетом (7) распределение вероятностей случайной координаты $\lambda^{(m)}$ путем суммирования $w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m)$ по переменным $\lambda^{(i)}$:

$$w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m) = \\ = \frac{\sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(r_0, \lambda^{(0)}) \prod_{k=1}^m P(\lambda^{(k)}, r_k/\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})}{w(\bar{r}_m)}.$$

Используя (5), (6), запишем следующее соотношение, устанавливающее связь между $w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m)$ и $w(\bar{\lambda}^{(m+1)}/\bar{r}_{m+1})$:

$$w(\bar{\lambda}^{(m+1)}/\bar{r}_{m+1}) = \\ = \frac{w(\bar{r}_m)}{w(\bar{r}_{m+1})} w(\bar{\lambda}^{(m)}/\bar{r}_m) P(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}/\lambda^{(m)}, r_m).$$

Продолжав несложные выкладки, окончательно получаем рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей в следующем виде:

$$w(\lambda^{(m+1)}/\bar{r}_{m+1}) = \\ = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m) P(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}/\lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m) P(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}/\lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (8)$$

Получим дифференциальное уравнение для вероятностей $w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, и когда момент времени $m\Delta t$ соответствует t , а момент $(m+1)\Delta t$ – моменту $t + \Delta t$.

Обозначим

$$w(\lambda^{(m)}/\bar{r}_m) = w(\lambda(t)/\bar{r}(t)), \\ w(\lambda^{(m+1)}/\bar{r}_{m+1}) = w(\lambda(t + \Delta t)/\bar{r}(t + \Delta t)).$$

Для краткости запишем эти соотношения в виде

$$w(\lambda(t)/\bar{r}(t)) = w(\lambda(t)/t)$$

и $w(\lambda(t + \Delta t)/\bar{r}(t + \Delta t)) = w(\lambda(t + \Delta t)/(t + \Delta t))$.

Пусть $\lambda(t + \Delta t) = \lambda$. Тогда с учетом (2) выражение (8) примет вид

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = \{w(\lambda_1/t) P(r_{m+1}/\lambda_1) P(\lambda_1/\lambda_1, r_{m+1}) + \\ + w(\lambda_2/t) P(r_{m+1}/\lambda_2) P(\lambda_1/\lambda_2, r_{m+1})\} \times \\ \times \{w(\lambda_1/t) P(r_{m+1}/\lambda_1) P(\lambda_1/\lambda_1, r_{m+1}) + \\ + w(\lambda_2/t) P(r_{m+1}/\lambda_2) P(\lambda_1/\lambda_2, r_{m+1}) + \\ + w(\lambda_1/t) P(r_{m+1}/\lambda_1) P(\lambda_2/\lambda_1, r_{m+1}) + \\ + w(\lambda_2/t) P(r_{m+1}/\lambda_2) P(\lambda_2/\lambda_2, r_{m+1})\}^{-1}. \quad (9)$$

Пусть $r_{m+1}=0$. Тогда с учетом формул (3) выражение (9) с точностью до членов порядка $o(\Delta t)$ малости примет вид

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = \\ = \frac{w(\lambda_1/t) + [-\lambda_1 w(\lambda_1/t) + \beta w(\lambda_2/t)] \Delta t + o(\Delta t)}{1 - [\lambda_1 w(\lambda_1/t) + \lambda_2 w(\lambda_2/t)] \Delta t + o(\Delta t)}.$$

Производя преобразования в этом уравнении и пере-

ходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ с учетом того, что $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$, получаем

$$\frac{dw(\lambda_1/t)}{dt} = \beta - \beta w(\lambda_1/t) - (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1/t) [1 - w(\lambda_1/t)]. \quad (10)$$

Пусть $r_{m+1} = 1$. Это означает, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступило событие. С учетом формул (3) выражение (9) с точностью до членов порядка $o(\Delta t)$ малости запишется так:

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = \{\lambda_{11} (1 - p) w(\lambda_1/t) + \Delta t [\lambda_1^2 (1 - p) w(\lambda_1/t) + \lambda_1 \beta w(\lambda_2/t)] + o(\Delta t)\} \times \{\lambda_1 w(\lambda_1/t) + \lambda_2 w(\lambda_2/t) - \Delta t [\lambda_1^2 w(\lambda_1/t) + \lambda_2^2 w(\lambda_2/t)] + o(\Delta t)\}^{-1}.$$

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i)] \exp\{-(t - \tilde{t}_i)(\lambda_1 - \lambda_2)(w_2 - w_1)\}}{w_2 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i) - [w_1 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i)] \exp\{-(t - \tilde{t}_i)(\lambda_1 - \lambda_2)(w_2 - w_1)\}}, \quad (13)$$

где $w(\lambda_1/\tilde{t}_i) = \pi_1(\tilde{t}_i, t_i)$, $\tilde{t}_i = t_i + T$,

$$w_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \beta) - (\lambda_1 - \lambda_2 - \beta)^{\frac{1}{2}}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$w_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \beta) + (\lambda_1 - \lambda_2 - \beta)^{\frac{1}{2}}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Алгоритм расчета вероятностей $w(\lambda_1/t)$ и $w(\lambda_2/t)$ в стационарном режиме (т.е. когда поток событий функционирует уже бесконечно долго) выглядит так.

Шаг 1: в момент начала наблюдения t_0 в качестве начального значения $w(\lambda_1/\tilde{t}_0)$ выбирается финальная вероятность $\pi_1 = \beta/(p\lambda_1 + \beta)$.

Шаг 2: по формулам (12) или (13) вычисляется вероятность $w(\lambda_1/t)$ в любой момент $t > t_0$ и вероятность $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$. По тем же формулам в момент t_1

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим

$$w(\lambda_1/t + 0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} w(\lambda_1/t + \Delta t) = \frac{\lambda_1 (1 - p) w(\lambda_1/t - 0)}{\lambda_1 w(\lambda_1/t - 0) + \lambda_2 w(\lambda_2/t - 0)}. \quad (11)$$

Случаи, когда $r_{m+1} \geq 2$, в силу ординарности потока событий не рассматриваются. Решая дифференциальное уравнение (10), находим явный вид искомой апостериорной вероятности для $\beta = \lambda_1 - \lambda_2$:

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w(\lambda_1/\tilde{t}_i) + (\lambda_1 - \lambda_2) [1 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i)] (t - \tilde{t}_i)}{1 + (\lambda_1 - \lambda_2) [1 - w(\lambda_1/\tilde{t}_i)] (t - \tilde{t}_i)}, \quad (12)$$

а также для случая $\beta \neq \lambda_1 - \lambda_2$:

наступления события вычисляется значение $w(\lambda_1/t_1) = w(\lambda_1/t_1 - 0)$.

Шаг 3: по формуле (11) вычисляется значение $w(\lambda_1/t_1 + 0) = q$, т.е. начальное значение для вероятности $\pi_1(t, t_1)$ на интервале мертвого времени $(t_1, t_1 + T]$.

Шаг 4: по формуле (1) вычисляется $\pi_1(t, t_1)$ в любой момент времени t на интервале $(t_1, t_1 + T]$. По этой же формуле вычисляется $\pi_1(t_1 + T, t_1)$, т.е. начальное значение для $w(\lambda_1/t)$ на отрезке $(t_1 + T, t_2]$, где t_2 — момент наступления второго события.

Шаг 5: по формулам (12) или (13) вычисляется вероятность $w(\lambda_1/t)$ и $w(\lambda_2/t)$ на отрезке $(t_1 + T, t_2]$ и т.д.

Проведены статистические испытания на ЭВМ предложенного алгоритма оценивания. Графики рис. 1 и 2 показывают поведение апостериорной вероятности для некоторых наборов параметров.

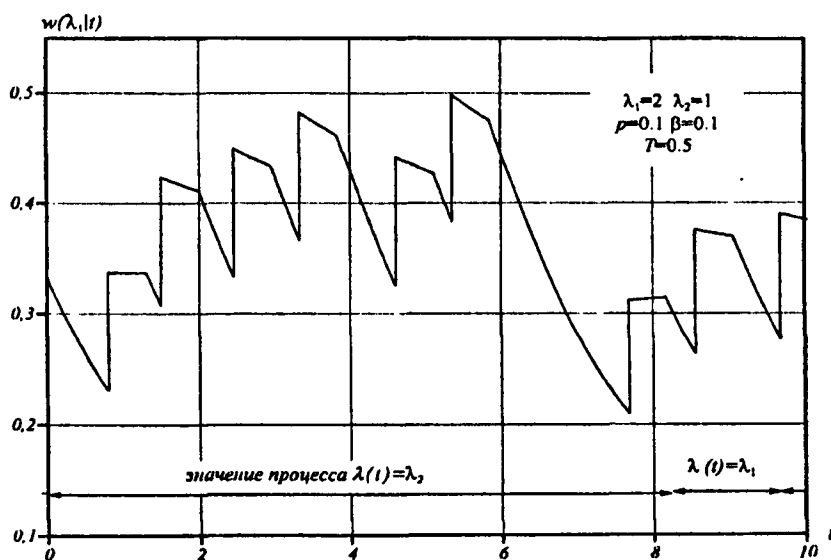


Рис. 1. Поведение апостериорной вероятности для $T = 0,5$

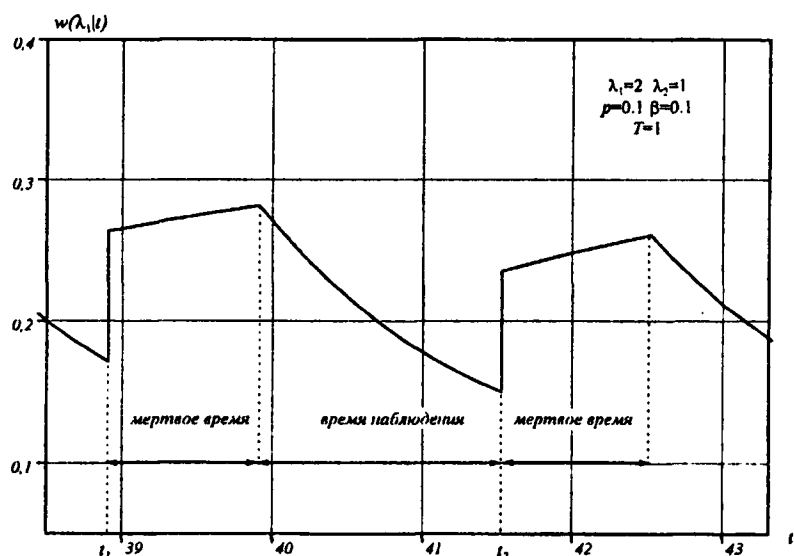


Рис. 2. Поведение апостериорной вероятности для $T = 1,0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояния полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Тез. докл. международной конференции «Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания». Минск, 1998.
2. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1969.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 25 декабря 1999 г.