ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.7

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ БАЗИСАМИ[1]

А. А. Андреев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассматривается задача о сложности и глубине реализации функций многозначной логики формулами и схемами из функциональных элементов над бесконечными неполными базисами. Приводятся примеры бесконечных базисов, допускающих высокие (в том числе сверхэкспоненциальные) нижние оценки сложности.

Ключевые слова: *функции многозначной логики, бесконечные базисы, неполные базисы, сверхэкспоненциальные оценки сложности формул, экспоненциальные оценки глубины.*

DOI 10.17223/20710410/29/1

ON LOWER BOUNDS FOR COMPLEXITY OVER INFINITE BASISES FOR FUNCTIONS OF MULTI-VALUED LOGIC

A. A. Andreev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: sanchez_14@mail.ru

The complexity and the depth of multi-valued logic functions realization by formulas and by circuits of functional gates over infinite incomplete basises are estimated. Some examples of infinite basises allowing high (including overexponential) lower bounds for complexity are presented.

Keywords: *functions of multi-valued logic, infinite basises, incomplete basises, overexponential complexity bounds, exponential depth bounds.*

В работе исследуется задача получения высоких нижних оценок различных мер сложности реализации функций многозначной логики из замкнутых классов над бесконечными базисами, порождающими эти классы. Под базисом понимается любая порождающая система, не обязательно полная и не обязательно минимальная по включению. Бесконечным базисом называется базис, содержащий функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00598-а) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

В качестве основного модельного класса управляющих систем рассматриваются формулы [1], однако в некоторых случаях рассуждения проводятся и для схем из функциональных элементов [2]. В качестве мер сложности рассматриваются глубина и собственно сложность. Переменные и константы для удобства также будем считать формулами (будем называть их тривиальными). Под сложностью формулы понимается количество символов переменных и констант, входящих в формулу, под сложностью схемы из функциональных элементов (далее просто схемы) — число функциональных элементов в ней. Понятие глубины $D(F)$ формулы F определим индуктивно. Если формула F тривиальная, то $D(F) = 0$, а если $F = G(F_1, \ldots, F_m)$, где G — некоторая функция, то $D(F) = \max D(F_i) + 1$, где максимум берётся по всем $i = 1, \ldots, m$. Сложностью $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(f)$ функции f при реализации формулами над базисом $\mathfrak{B}$ называется минимальная сложность формулы над базисом $\mathfrak{B}$, реализующей эту функцию. Аналогично определяются сложность $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(f)$ функции f при реализации схемами над базисом $\mathfrak{B}$ и глубина функции $D_{\mathfrak{B}}(f)$ (понятие глубины функции не отличается для случаев реализации схемами и формулами). Функцией Шеннона $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n)$ назовём максимальную сложность реализации формулами над базисом $\mathfrak{B}$ функций от n переменных из замыкания $[\mathfrak{B}]$ базиса $\mathfrak{B}$. Аналогично определим функцию Шеннона $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ сложности реализации функций из класса $[\mathfrak{B}]$ схемами над базисом $\mathfrak{B}$ и функцию Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ реализации функций из класса $[\mathfrak{B}]$ над базисом $\mathfrak{B}$.

Асимптотика роста функций Шеннона $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$, $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ над произвольным полным конечным базисом булевых функций установлена О. Б. Лупановым [3–5]. Для всякого конечного полного базиса $\mathfrak{B}$ функция Шеннона $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ сложности реализации булевых функций схемами над этим базисом при $n \to \infty$ растёт по порядку как $2^n/n$, сложности реализации формулами $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(n)$ — как $2^n/\log n$, а функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ — как n.

При переходе от конечного полного базиса к бесконечному полному базису булевых функций порядки роста введённых функций Шеннона понижаются. Из результатов О. Б. Лупанова непосредственно следует, что для любых полных базисов $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1$ — конечный, а $\mathfrak{B}_2$ — бесконечный, справедливы соотношения $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}_2}(n) = \mathrm{o}(L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}_1}(n))$, $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}_2}(n) = \mathrm{o}(L^{\Phi}_{\mathfrak{B}_1}(n))$, $D_{\mathfrak{B}_2}(n) = \mathrm{o}(D_{\mathfrak{B}_1}(n))$. На самом деле, О. М. Касим-Заде установлено [6, 7], что при переходе от конечных к бесконечным полным базисам булевых функций порядок роста функций Шеннона $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ и $D_{\mathfrak{B}}(n)$ меняется качественно: в случае бесконечных базисов $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(n)$ растёт по порядку как $2^{n/2}$ или медленнее, а $D_{\mathfrak{B}}(n)$ имеет порядок роста не больше $\log n$. В случае реализации функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ для функции Шеннона глубины при переходе от конечных полных к бесконечным полным базисам имеет место аналогичное понижение порядка роста. Для любого конечного базиса $\mathfrak{B}$ функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ при $n \to \infty$ растёт по порядку как линейная функция (для этого случая также известна асимптотика [8]). Для бесконечных базисов многозначной логики известно [9], что функция Шеннона глубины $D_{\mathfrak{B}}(n)$ растёт по порядку не быстрее, чем $\log n$. Стоит отметить, что при переходе от конечных базисов, порождающих замкнутые классы булевых функций, к бесконечным может также иметь место аналогичный эффект понижения порядков роста соответствующих функций Шеннона (см., например, [10]). Однако, к примеру, для класса линейных функций и в случае конечного, и в случае бесконечного базиса, порождающего этот класс, функция Шеннона сложности реализации формулами растёт по порядку как n.

В связи с этим возникает вопрос о возможности получения высоких нижних оценок сложности (для всех трёх мер) над бесконечными базисами, аналогичных известным [11–13] высоким нижним оценкам сложности в конечных неполных базисах функций k-значной логики, $k \geqslant 3$.

Стоит отметить, что в случае булевых функций все замкнутые классы конечно-порождённые. Это значит, что любой бесконечный базис будет избыточным и из него можно выделить конечную подсистему, порождающую тот же замкнутый класс. Следовательно, порядок роста при переходе от конечного базиса булевых функций к бесконечному не может увеличиться. В случае же функций многозначной логики ситуация иная. Существуют примеры замкнутых классов, не имеющих конечного базиса [14], что даёт дополнительные возможности для получения высоких нижних оценок в бесконечных базисах по сравнению с оценками в конечных базисах.

Покажем, как для произвольного конечного множества $\mathfrak{A}$ функций k-значной логики и произвольной последовательности функций ζ_n из класса $[\mathfrak{A}]$ построить бесконечный базис $\mathfrak{B}$ функций $(k+2)$-значной логики и предъявить последовательность функций $\{\eta_n\}$ из класса $[\mathfrak{B}]$, для которых справедливы равенства $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$, $L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$, $D_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = D_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$.

Пусть $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$; $\mathfrak{A} = \{\varphi_1(x_1, \ldots, x_{i_1}), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{i_m})\}$ — конечная система функций k-значной логики, а $\zeta_1(x_1), \zeta_2(x_1, x_2), \ldots, \zeta_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ — последовательность функций k-значной логики. Рассмотрим следующие функции $(k+2)$-значной логики:

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_{l_i}) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, \ldots, x_{l_i}), & \text{если } x_1, \ldots, x_{l_i} \in E_k, \\ k & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\eta_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \zeta_n(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_1, \ldots, x_n \in E_k, \\ k & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} k, & \text{если } x_1 = k+1, \ldots, x_n = k+1, \\ k+1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $i \in \{1, \ldots, m\}$; $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathfrak{B} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m, \mu_1, \mu_2, \ldots\}$, $\mathfrak{B}' = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$. Покажем, что все рассматриваемые меры сложности реализации функций ζ_n над базисом $\mathfrak{A}$ равны соответствующим мерам сложности реализации функций η_n над базисом $\mathfrak{B}$.

Если в некоторой формуле над системой $\mathfrak{B}$ для некоторого n есть хотя бы один элемент вида μ_n, то очевидно, что такая формула на всех наборах переменных может принимать только значения k и $k+1$. В то же время функции η_n при некоторых значениях переменных принимают значения, отличные от этих двух. Значит, сложность реализации функций η_n над системой $\mathfrak{B}$ не изменится, если из этой системы убрать функции μ_n (тем самым получив систему $\mathfrak{B}'$).

Возьмем формулу над системой $\mathfrak{A}$, реализующую функцию $\zeta_n(x_1, \ldots, x_n)$, и для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ заменим в ней все вхождения функций $\varphi_i(A_1, \ldots, A_{l_i})$ на функции $\psi_i(A_1, \ldots, A_{l_i})$ ($A_1, \ldots, A_{l_i}$ — формулы). Очевидно, что мы получим формулу над системой $\mathfrak{B}'$, реализующую функцию $\eta_n(x_1, \ldots, x_n)$. И наоборот, если заменить все функции $\psi_1, \ldots, \psi_m$ на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то из формулы, реализующей функцию η_n, получим формулу, реализующую функцию ζ_n. Таким образом, доказаны следующие соотношения: $L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$, $D_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = D_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$. Аналогичным рассуждением получаем, что $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{A}}(\zeta_n) = L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(\eta_n)$.

Стоит отметить, что класс, порождённый построенным базисом $\mathfrak{B}$, является конечно-порождённым. Однако не представляет особой трудности привести аналогичный пример класса, не имеющего конечного базиса (возможно, с увеличением значности логики ещё на единицу). Для этого достаточно в качестве функций μ_n взять аналог функций из примера в [14].

Если в качестве $\mathfrak{A}$ взять систему функций k-значной логики из [13], то приведённым способом будет построен бесконечный базис, сложность реализации некоторой последовательности функций над которым растёт сверхэкспоненциальным образом. Более точно, для соответствующей последовательности $\{\eta_n\}$ функций $(k+2)$-значной логики справедливо равенство $L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\eta_n) = (n+1)\cdot 2^{n((k-3)^n-(k-4)^n)} - n$, где функция ζ_n зависит от $n+1$ переменной. В этом же примере для глубины верна следующая формула: $D_{\mathfrak{B}}(\eta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + n - 1$. Если же взять в качестве $\mathfrak{A}$ систему функций трёхзначной логики из [11], то для сложности соответствующей функции пятизначной логики η_n в бесконечном базисе $\mathfrak{B}$ справедливо равенство $L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{B}}(\eta_n) = 2C_n^{[n/2]} - 1$.

Недостаток приведённого метода в том, что порождающую систему можно разделить на две практически не связанные части: одна доставляет необходимую оценку, а вторая обеспечивает бесконечность системы. Это делает систему сильно искусственной. Построим пример бесконечной системы функций с высокими нижними оценками сложности, лишённый этого и некоторых других недостатков. Для этого определим два базиса функций k-значной логики ($k \geqslant 5$): конечный $\mathfrak{A}$ и бесконечный $\mathfrak{B}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}]$ (и, следовательно, класс $[\mathfrak{B}]$ конечно порождён);
2) функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами в этих базисах асимптотически равны (и растут соответственно экспоненциально и сверхэкспоненциально);
3) каждая функция базиса $\mathfrak{B}$ используется хотя бы в одной минимальной формуле, реализующей функцию, на которой достигается значение функций Шеннона.

Для описания такого примера сначала рассмотрим пример из работы [13]. Обозначим через E_k^n ($n \geqslant 1$) множество всех наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E_k$, а через Q_n множество всех наборов из E_k^n, состоящих только из символов $3, \dots, k-1$, причём хотя бы один символ 3 должен быть обязательно. Определим функции k-значной логики $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y,z)$, $\varphi_m(x,y)$ и $\zeta_n(y, x_1, \dots, x_n)$, где $m \in \{3, \dots, k-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0,\ y = 2, \\ 1, & \text{если } x = 0,\ y = 3 \text{ или если } x = 1, \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu(x,y,z) = \begin{cases} \lambda(x,z), & \text{если } x = y, \\ 2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varphi_m(x,y) = \begin{cases} 3, & \text{если } x = 3,\ y = m, \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\zeta_n(y, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \dots, x_n) \notin Q_n, \\ 1, & \text{если } y = 0,\ (x_1, \dots, x_n) \in Q_n \text{ или если } y = 1, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [13]. Пусть $\mathfrak{B} = \{\mu, \varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}, 2\}$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 4$. Тогда для функции k-значной логики ζ_n справедливо равенство

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{B}}(\zeta_n) = (n+1) \cdot 2^{n((k-3)^n - (k-4)^n)} - n.$$

При доказательстве этой теоремы в [13] установлено, что любая формула F, реализующая функцию ζ_n, устроена строго определённым образом, а именно: формула F получается из некоторой формулы

$$G = \lambda(\lambda(\ldots\lambda(\lambda(y, Z_1), Z_2), \ldots), Z_N), \tag{1}$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — формулы над $\mathfrak{B}$; N — натуральное, заменой всех подформул вида $\lambda(A, B)$ формулами $\mu(A, A, B)$. Во всех минимальных формулах над базисом $\mathfrak{B}$, реализующих функцию ζ_n, подформулы Z_i также устроены строго определённым образом: они все имеют вид $\varphi_{m_1}(\ldots\varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), \ldots, H_1)$, где $H_1, \ldots, H_{s+1}$ — различные переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$; каждая переменная из этого множества встречается в формуле Z_i как минимум один раз. Кроме того, установлено, что количество N таких подформул Z_i в формуле, реализующей функцию ζ_n, удовлетворяет соотношению $N \geqslant (k-3)^n - (k-4)^n$.

Особенности строения формул, описанные выше, поясним, приведя ряд свойств формул над базисами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ из работы [13], где $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \{\lambda(x, y)\}$. Для этого введём следующие определения и обозначения.

Пусть $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие формуле F дерево T с корнем v_*, в котором висячим вершинам приписаны символы из множества $\{x_1, \ldots, x_n, y, 2\}$. Между вершинами дерева T и подформулами формулы F естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, в частности, корневой вершине v_* соответствует формула F, главным подформулам формулы F — вершины, смежные с корневой, и так далее, висячим вершинам — выражения вида x_i, y или 2, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если A — некоторая подформула формулы F, а v — некоторая вершина дерева T, то через v_A будем обозначать вершину дерева T, соответствующую подформуле A, а через A_v — подформулу формулы F, соответствующую вершине v.

Раскрасим рёбра и вершины дерева T в белый, чёрный и зелёный цвета следующим образом. Пусть A — некоторая нетривиальная подформула формулы F. Если она имеет вид $A = \lambda(B, C)$, где B, C — формулы над $\mathfrak{A}$, то раскрасим ребро (v_A, v_B) в белый цвет, а ребро (v_A, v_C) в чёрный. Если A — формула вида $A = \mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы, то раскрасим рёбра $(v_A, v_B), (v_A, v_C)$ в белый цвет, а ребро (v_A, v_D) в чёрный. И наконец, если A — формула вида $\varphi_m(B, C)$, где B, C — формулы, $m \in \{3, \ldots, k-1\}$, то раскрасим ребро (v_A, v_B) в чёрный цвет, а ребро (v_A, v_C) в зелёный. Корень v_* дерева T раскрашивается в белый цвет. Вершина v, отличная от корня, раскрашивается в белый цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый цвет. Вершина v раскрашивается в чёрный цвет, если все рёбра цепи, соединяющей корень v_* дерева T с вершиной v, раскрашены в белый или чёрный цвет, причем чёрные есть обязательно. Все остальные вершины раскрашиваются в зелёный цвет. Будем говорить, что подформула формулы F белого, чёрного или зелёного цвета, если сопоставленная ей вершина дерева T раскрашена в белый, чёрный или зелёный цвет соответственно. Обозначим через $V(F)$ множество всех висячих вершин дерева T, раскрашенных в белый цвет, а через $W(F)$ — множество символов, соответствующих вершинам из $V(F)$. Очевидно, что имеет место соотношение $W(F) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y, 2\}$.

Нетрудно получить (аналогично [15]) следующие свойства формулы F:

1. Для любой белой подформулы A формулы F и любых наборов $\alpha, \beta \in E^{n+1}$, таких, что $F(\alpha) = 0$, $A(\beta) = 2$, выполняются соотношения $A(\alpha) = 0$, $F(\beta) = 2$.
2. Пусть формула F реализует функцию $\zeta_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, A — произвольная белая подформула формулы F, $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ — произвольный набор из E^{n+1}. Тогда выполняются следующие соотношения:
   а) $W(F) = \{y\}$;
   б) если $A(\alpha) = 0$, то $\alpha_0 = 0$;
   в) если $\beta_0 = 1$, то $A(\beta) = 1$;
   г) формула A имеет вид $\lambda(B, C)$ или $\mu(B, C, D)$, где B, C, D — формулы.

Теперь зафиксируем некоторое k и построим базис $\mathfrak{C} \subseteq P_k$ (где P_k — множество функций k-значной логики). Для этого возьмём базис $\mathfrak{B} \subseteq P_k$ и для всех натуральных n для всех минимальных формул над $\mathfrak{B}$ для функций ζ_n для всех подформул Z_i из (1) добавим в базис функции, реализуемые формулами Z_i (то есть все функции вида $\varphi_{m_1}(\ldots \varphi_{m_s}(H_{s+1}, H_s), \ldots, H_1)$, где $H_1, \ldots, H_{s+1}$ — различные переменные из множества $x_1, \ldots, x_n$). Получается, что бесконечный базис $\mathfrak{C}$ порождает тот же замкнутый класс, что и базис $\mathfrak{B}$, и при реализации функций ζ_n каждая функция базиса используется хотя бы в одной минимальной формуле (минимальные формулы в базисе $\mathfrak{C}$ — это те же самые формулы, которые являются минимальными в базисе $\mathfrak{B}$, с возможной заменой подформул над $\{\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}\}$ имеющейся в базисе функцией их суперпозиции), при этом формулы всё так же имеют описанные выше особенности строения. Это значит, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{C}$ — описанный выше бесконечный базис, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 4$. Тогда для функции k-значной логики ζ_n справедливо равенство

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{C}}(\zeta_n) = (n+1) \cdot 2^{n((k-3)^n - (k-4)^n)} - n.$$

Отметим, что для глубины рассматриваемых функций можно записать соответствующие соотношения:

$$D_{\mathfrak{B}}(\zeta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + n - 1,$$
$$D_{\mathfrak{C}}(\zeta_n) = (k-3)^n - (k-4)^n + 1.$$

Кроме того, в замкнутом классе $[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}]$ функции Шеннона глубины и сложности реализации формулами над базисом $\mathfrak{B}$ асимптотически равны соответствующим функциям Шеннона для формул над базисом $\mathfrak{C}$. Поясним этот факт.

Сначала отметим несколько очевидных свойств формул над базисом $\mathfrak{B}$:

1) если в некоторой формуле функция μ подаётся на вход функции φ_m для некоторого m, то при замене этой функции μ константой 2 реализуемая формулой функция не изменится;
2) если в некоторой формуле функция φ_m для некоторого m подаётся на вход функции μ не в качестве последнего аргумента, то при замене этой функции φ_m константой 2 реализуемая формулой функция не изменится;
3) для произвольных формул A и B справедливы равенства

$$\varphi_m(A, 2) = \varphi_m(2, A) = 2, \quad \mu(2, A, B) = \mu(A, 2, B) = 2.$$

Таким образом, для всех функций из класса $[\mathfrak{B}]$ минимальные формулы могут иметь один из следующих видов: константа 2; формула над системой $\{\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}\}$;

формула, в которой все чёрные подформулы имеют один из двух предыдущих видов, а каждая белая подформула либо имеет вид $\mu(A, B, C)$, где A, B, C — формулы, либо является переменной.

Аналогичные свойства справедливы и для базиса $\mathfrak{C}$ (мы добавили в базис только комбинации уже имеющихся функций), и минимальные формулы также имеют один из вышеперечисленных видов (с поправкой на то, что наряду с функциями $\{\varphi_3, \ldots, \varphi_{k-1}\}$ присутствуют и их суперпозиции). Это значит, что для любой функции из класса $[\mathfrak{B}]$ по любой её минимальной формуле над базисом $\mathfrak{C}$ очевидным образом получается минимальная формула для этой же функции над базисом $\mathfrak{B}$. Поскольку с точки зрения функции Шеннона нас, очевидно, интересуют функции третьего вида, можно сделать вывод, что асимптотика функций Шеннона в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ одинакова.

Таким образом, приведён пример конечно-порождённого класса, а также конечного и бесконечного базисов, его порождающих, для которых совпадают асимптотики роста функций Шеннона глубины и сложности реализации формулами.

Теперь построим замкнутые классы функций многозначной логики, не являющиеся конечно-порождёнными, в которых для всех типов рассматриваемых функций Шеннона при соответствующем выборе базиса (очевидно, бесконечного) справедливы нижние оценки с более высоким порядком роста, чем у известных [11 − 13] соответствующих нижних оценок в случае конечно-порождённых классов.

Пусть $\varphi(x)$ — функция трёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях; $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E_3^n в E_2^n, которое набору $(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$; $\tilde{\alpha}$ — набор из E_2^n. Определим функцию $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 следующим образом:

$$\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) \neq \tilde{\alpha}, \text{ или если } y = 2, \\ 1, & \text{если } y = 1, \text{ или если } y = 0 \text{ и } \Omega(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}. \end{cases}$$

Покажем, что для формул специального вида справедливы определённые свойства.

1. Пусть формула F выглядит следующим образом: $F = \lambda^3_{\tilde{\alpha}}(A_0, \ldots, A_n)$, где $A_0, \ldots, A_n$ — формулы, и для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ формула A_i имеет вид $A_i = \lambda^3_{\tilde{\beta}}(B_0, \ldots, B_l)$. Тогда при замене формулы A_i на константу 0 функция, реализуемая формулой F, не изменится.

Действительно, формула A_i принимает значения 0 и 1. При этом равенство $\varphi(x_i) = \alpha_i$ выполняется при $x_i = 1$ тогда и только тогда, когда оно выполняется и при $x_i = 0$. Значит, при замене формулы A_i константой 0 значение формулы F не изменится.

2. Пусть формула $F = \lambda^3_{\tilde{\alpha}}(0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, где $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, реализует константу 0. Тогда верно равенство $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = \lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l)$, где $A_0, \ldots, A_l$ — формулы.

Действительно, если на некотором наборе формула $\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l)$ принимает значение 1, то и формула $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ также принимает значение 1. Если на этом наборе формула $\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l)$ равна нулю, то в силу тождества $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \equiv 0$ имеем $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}(\lambda^3_{\tilde{\beta}}(A_0, \ldots, A_l), x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = 0$ на этом наборе. Значение 2 ни одна из этих формул принимать не может.

Пусть $R_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_2^n$. Из свойства 1 следует, что в семействе формул над базисом, состоящим из константы 0 и функций $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}$, где $\tilde{\alpha} \in R_2$, в минимальных по сложности фомулах все подформулы могут иметь нетривиальные подформулы только в качестве первого аргумента, то есть в таких базисах все минимальные формулы «вытянуты в цепочку».

Определим функции трёхзначной логики $\zeta_n^3(x_1,\ldots,x_n)$, $n \geqslant 1$, следующим образом. Функция ζ_n^3 принимает значение 0, если среди её аргументов чётное количество двоек, и значение 1, если нечётное. Рассмотрим неполный бесконечный базис $\mathfrak{A} = \{0\} \cup \{\lambda_{\tilde\alpha}^3 : \tilde\alpha \in R_2\}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Для функции трёхзначной логики ζ_n^3, $n \geqslant 1$, выполняется равенство

$$D_{\mathfrak{A}}(\zeta_n^3) = 2^{n-1}.$$

Доказательство. Сначала отметим, что $\zeta_n^3 \in [\mathfrak{A}]$. В процессе доказательства формула над $\mathfrak{A}$, реализующая указанную функцию, будет естественным образом получена.

Пусть формула F реализует функцию ζ_n^3. Если у некоторой её подформулы есть нетривиальные подформулы не в качестве первого аргумента, то заменим их на константу 0. Согласно свойству 1, реализуемая формулой функция от этого не поменяется, а глубина и сложность не увеличатся. В дальнейшем считаем, что у всех подформул все аргументы, кроме первого, тривиальны.

Итак, формула F имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \lambda_{\tilde\alpha_1}^3(A_{1,0}, A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}),\\ A_{1,0} &= \lambda_{\tilde\alpha_2}^3(A_{2,0}, A_{2,1}, \ldots, A_{2,m_2}),\\ &\ldots\\ A_{d-1,0} &= \lambda_{\tilde\alpha_d}^3(A_{d,0}, A_{d,1}, \ldots, A_{d,m_d}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $A_{1,1},\ldots,A_{1,m_1},\ldots,A_{d,1},\ldots,A_{d,m_d}$ и $A_{d,0}$ — тривиальные формулы.

Из определения функций $\lambda_{\tilde\alpha}^3$ следует, что если на некотором наборе формула $A_{i,0}$ $(i \in \{1,\ldots,d\})$ принимает значение 1, то и формула F на нём также принимает значение 1. Из определения также следует, что если на некотором наборе формула F принимает значение 0, то и для всех $i \in \{1,\ldots,d-1\}$ формулы $A_{i,0}$ также принимают значение 0.

Пусть формула $A_{d,0}$ имеет вид x_i для некоторого i. Тогда на наборе $(1,1,\ldots,1)$ функция $\zeta_n^3(x_1,\ldots,x_n)$ принимает значение 0, а формула F — значение 1. Следовательно, $A_{d,0}$ представляет из себя константу 0.

Рассмотрим формулы $B_1 = \lambda_{\tilde\alpha_1}^3(0, A_{1,1},\ldots,A_{1,m_1}),\ldots,B_d = \lambda_{\tilde\alpha_d}^3(0, A_{d,1},\ldots,A_{d,m_d})$. Если какая-нибудь из них реализует константу 0, то, согласно свойству 2, можно удалить соответствующую ей подформулу из «цепочки» (2). При этом реализуемая функция не изменится, глубина формулы не увеличится, а сложность уменьшится. Проделаем такую операцию со всеми подформулами, реализующими ноль. Далее будем считать, что все формулы B_i не реализуют константу 0, а значит, равны единице на некотором наборе (значения 2 они принимать не могут). Для формулы B_i обозначим такой набор $\tilde\sigma_i$. Заметим, что в силу показанных ранее соотношений формула F на всех наборах $\tilde\sigma_i$ $(i = 1,\ldots,d)$ принимает значение 1.

Пусть найдутся такие числа i и j, что в формулу B_i не входит переменная x_j $(i \in \{1,\ldots,d\},\ j \in \{1,\ldots,n\})$. Тогда в наборе $\tilde\sigma_i$ заменим j-ю компоненту: если она равнялась двум, то заменим её нулём, а если нет, то заменим её двойкой. В результате получим набор $\tilde\sigma_i'$. С одной стороны, у этого набора и у набора $\tilde\sigma_i$ разная чётность количества двоек, и, следовательно, функция ζ_n^3 принимает на них разные значения.

С другой стороны, эти наборы отличаются только в j-й компоненте. А так как переменная x_j не входит в формулу B_i, то $B_i(\tilde{\sigma}_i) = B_i(\tilde{\sigma}'_i)$. Значит, $B_i(\tilde{\sigma}'_i) = 1$ и $F(\tilde{\sigma}'_i) = 1$. Полученное противоречие показывает, что во всех формулах B_i присутствуют все переменные $x_1, \ldots, x_n$ в качестве подформул.

Согласно определению функции $\lambda^3_{\tilde{\alpha}}$, все наборы, на которых B_i принимает значение 1, отображением Ω переводятся в один и тот же набор из P_2 (если переменные упорядочены и встречаются по одному разу, то этот набор — $\tilde{\alpha}$). Рассмотрим все наборы, на которых функция ζ^3_n принимает значение 1. При отображении Ω эти наборы перейдут в 2^{n-1} наборов из P_2. Принимая во внимание то, что для равенства формулы F единице на некотором наборе необходимо, чтобы на этом наборе хотя бы одна из формул B_i принимала значение 1, получаем, что количество d формул B_i удовлетворяет неравенству $d \geqslant 2^{n-1}$.

В качестве примера формулы глубины 2^{n-1}, реализующей функцию ζ^3_n, можно привести следующую: $m_1 = \ldots = m_d = n$, $A_{i,j} = x_j$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_d$ — это все наборы длины n с чётным количеством единиц. ■

Заметим также, что сложность реализации функции схемами над некоторым базисом не меньше глубины этой функции над этим базисом. Поэтому приведённая выше формула доставляет пример минимальной схемы над базисом $\mathfrak{A}$ для функции ζ^3_n, т. е.

$$L^{\text{СФЭ}}_{\mathfrak{A}}(\zeta^3_n) = 2^{n-1},$$

причём полученное значение сложности превосходит максимальные нижние оценки, известные [11] для случая конечных базисов.

Покажем теперь, как на основе этого примера построить бесконечный базис в P_4 и последовательность функций, сложность реализации которых формулами над этим базисом растёт сверхэкспоненциально (и быстрее известных рекордных высоких оценок для случая конечно-порождённых классов P_4).

Пусть $\varphi(x)$ — функция четырёхзначной логики, принимающая значение 1 при $x = 2$ и значение 0 в остальных случаях; $\Omega(\tilde{x})$ — отображение из E^n_4 в E^n_2, которое набору $(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет набор $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$; $\tilde{\alpha}$ — набор из E^n_2. Определим функции $\lambda^4_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n)$ и $\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ из P_4 следующим образом:

$$\lambda^4_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \lambda^3_{\tilde{\alpha}}(y, x_1, \ldots, x_n), & \text{если } (y, x_1, \ldots, x_n) \in E^n_3, \\ 3 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} 3, & \text{если } x_i = 3 \text{ для некоторого} \\ & i \in \{1, \ldots, n+2\}, \text{ или если } x_1 \neq x_2, \\ \lambda^4_{\tilde{\alpha}}(x_2, \ldots, x_{n+2}) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим последовательность функций четырёхзначной логики $\zeta^4_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, следующим образом. Если среди аргументов функции есть хотя бы одна тройка, то она принимает значение 3. Если же нет, то функция ζ^4_n принимает значение 0, если среди её аргументов чётное количество двоек, и значение 1, если нечётное. Рассмотрим неполный бесконечный базис $\mathfrak{A} = \{0\} \cup \{\mu_{\tilde{\alpha}} : \tilde{\alpha} \in R_2\}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Для функции четырёхзначной логики ζ^4_n, $n \geqslant 1$, верно равенство*

$$L^{\Phi}_{\mathfrak{A}}(\zeta^4_n) = 2^{2^{n-1}} - 1.$$

Доказательство. Отметим, что функция ζ_n^4 лежит в замыкании системы $\mathfrak{A}$, и соответствующая формула для неё будет построена в процессе доказательства.

Очевидно, что если каждая переменная участвует в построении формулы, то условие равенства формулы тройке на всех наборах, содержащих тройку, выполняется всегда. Заметим также, что если какая-то подформула на некотором наборе принимает значение 3, то и вся формула на этом наборе также принимает значение 3. Это следует из определения функций $\mu_{\tilde{\alpha}}$.

Пусть F — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $\zeta_n^4(x_1, \dots, x_n)$. Преобразуем формулу F без увеличения её сложности и глубины и одновременно построим по формуле F формулу G специального вида. Изначально возьмём $G = F$. Пусть формула F имеет вид $A = \mu_{\tilde{\alpha}}(A_1, \dots, A_{n+2})$ (для некоторого $\tilde{\alpha}$). На всех наборах, не содержащих троек, формулы A_1 и A_2 принимают одинаковые значения. Пусть без ограничения общности $L_{\mathfrak{A}}^{\Phi}(A_1) \geqslant L_{\mathfrak{A}}^{\Phi}(A_2)$. Тогда в формуле F заменим A выражением $\mu_{\tilde{\alpha}}(A_2, A_2, \dots, A_{n+2})$, а в формуле G — выражением $\lambda_{\tilde{\alpha}}^4(A_2, \dots, A_{n+2})$. На наборах, не содержащих троек, значения формул от такой замены не поменяются. Далее проведём подобную замену для всех подформул формулы F (и соответственно G), затем для всех их подформул, и так далее, пока формула G не перестанет содержать функции вида $\mu_{\tilde{\alpha}}$ (для всех возможных $\tilde{\alpha}$).

Теперь заметим, что поскольку получившиеся формулы на всех наборах, не содержащих троек, принимают значения, равные значениям ζ_n^4 на этих же наборах, и значения на этих наборах зависят от всех переменных, то в формулы F и G каждая переменная входит в качестве подформулы. Это значит, что и на всех наборах, содержащих тройки, значения получившихся формул и функции ζ_n^4 также равны. При ограничении на наборы без троек формула G реализует ранее определённую функцию трёхзначной логики и, следовательно, её глубина не меньше чем 2^{n-1}. Очевидно, что у формулы F глубина такая же, а сложность удовлетворяет соотношению $L_{\mathfrak{A}}^{\Phi}(F) = 2^{D_{\mathfrak{A}}(F)} - 1$.

Пример формулы G, для которой полученная оценка достигается, такой же, как и в теореме 3. Формула F получается из неё тривиальной заменой $\lambda_{\tilde{\alpha}}^4(A_1, \dots, A_{n+1})$ на $\mu_{\tilde{\alpha}}(A_1, A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$. Легко видеть, что построенная таким образом формула реализует функцию ζ_n^4 ■

Отметим, что установленный в теореме 4 рост сложности реализации последовательности функций ζ_n^4 формулами над бесконечным базисом $\mathfrak{A}$, порождающий замкнутый класс в P_4, не имеющий конечного базиса, превосходит известную [12] рекордную оценку сложности реализации последовательности функций над конечным базисом в P_4, имеющую вид

$$2^{C_n^{[n/2]}}([n/2] + 1) - [n/2].$$

Конструкции из доказательств теоремы 3 (для функций трёхзначной логики) и теоремы 4 (для функций четырёхзначной логики) могут быть обобщены на случай функций k-значной логики для бо́льших значений k. При $k > 3$, $n \geqslant 1$ можно привести пример замкнутого класса, не имеющего конечного базиса, и последовательности лежащих в нём функций от n переменных, глубина (и сложность реализации схемами) которых над некоторым бесконечным базисом, порождающим этот класс, равна $(k-1)^{n-1}$. При $k > 4$, $n \geqslant 1$ можно привести пример замкнутого класса, не имеющего конечного базиса, и последовательности лежащих в нём функций от n переменных, сложность реализации формулами которых над некоторым бесконечным базисом, порождающим этот класс, равна $2^{(k-2)^{n-1}} - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
2. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984. 136 с.
3. *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 1. С. 120–140.
4. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
5. *Лупанов О. Б.* О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 43–81.
6. *Касим-Заде О. М.* Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 4. С. 59–61.
7. *Касим-Заде О. М.* О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 1. С. 18–21.
8. *Кочергин А. В.* О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 1. С. 56–59.
9. *Кочергин А. В.* О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 1. С. 22–26.
10. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. М., 1980. № 112.
11. *Ткачёв Г. А.* О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1977. № 1. С. 45–47.
12. *Угольников А. Б.* О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 3. С. 52–55.
13. *Андреев А. А.* О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25–30.
14. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 44–46.
15. *Андреев А. А.* Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 52–57.

REFERENCES

1. *Yablonskiy S. V.* Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction to Discrete Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 384 p. (in Russian)
2. *Lupanov O. B.* Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem [Asymptotic Bounds for the Complexity of Control Systems]. Moscow, MSU Publ., 1984. 136 p. (in Russian)
3. *Lupanov O. B.* Ob odnom metode sinteza skhem [A method of circuits synthesis]. Izvestiya vuzov. Radiofizika, 1958, vol. 1, no. 1, pp. 120–140. (in Russian)
4. *Lupanov O. B.* O slozhnosti realizatsii funktsiy algebry logiki formulami [On the complexity of Boolean functions realization by formulas.] Problemy kibernetiki, iss. 3. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, pp. 61–80. (in Russian)
5. *Lupanov O. B.* O skhemakh iz funktsional'nykh elementov s zaderzhkami [On circuits of functional elements with delays]. Problemy kibernetiki, iss. 23. Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 43–81. (in Russian)

6. *Kasim-Zade O. M.* Obshchaya verkhnyaya otsenka slozhnosti skhem v proizvol'nom beskonechnom polnom bazise [Total upper bound for the circuits complexity in any infinite complete basis]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 1997, no. 4, pp. 59–61. (in Russian)
7. *Kasim-Zade O. M.* O glubine bulevykh funktsiy pri realizatsii skhemami nad proizvol'nym bazisom [The depth of Boolean functions realized by circuits over an arbitrary basis]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2007, no. 1, pp. 18–21. (in Russian)
8. *Kochergin A. V.* O glubine funktsiy k-znachnoy logiki v konechnykh bazisakh [Depth of k-valued logic functions in finite bases]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2013, no. 1, pp. 56–59. (in Russian)
9. *Kochergin A. V.* O glubine funktsiy k-znachnoy logiki v beskonechnykh bazisakh [Depth of k-valued logic functions in infinite bases]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2011, no. 1, pp. 22–26. (in Russian)
10. *Ugol'nikov A. B.* Sintez skhem i formul v nepolnykh bazisakh [The circuits and formulas synthesis in incomplete bases]. Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 1980, no. 112. (in Russian)
11. *Tkachev G. A.* O slozhnosti realizatsii odnoy posledovatel'nosti funktsiy k-znachnoy logiki [On the complexity of a sequence of k-ary functions realization]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika, 1977, no. 1, pp. 45–47. (in Russian)
12. *Ugol'nikov A. B.* O slozhnosti realizatsii formulami odnoy posledovatel'nosti funktsiy 4-znachnoy logiki [On the complexity of one sequence of 4-ary functions realization by formulas]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2004, no. 3, pp. 52–55. (in Russian)
13. *Andreev A. A.* O nizhnikh otsenkakh slozhnosti dlya nekotorykh posledovatel'nostey funktsiy mnogoznachnoy logiki [Lower complexity estimates for some sequences of functions of multivalued logic]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2013, no. 6, pp. 25–30. (in Russian)
14. *Yanov Yu. I., Muchnik A. A.* O sushchestvovanii k-znachnykh zamknutykh klassov, ne imeyushchikh konechnogo bazisa [On the existence of k-valued closed classes without a finite basis]. Reports of the USSR Academy of Sciences, 1959, vol. 127, no. 1, pp. 44–46. (in Russian)
15. *Andreev A. A.* Ob odnoy posledovatel'nosti funktsiy mnogoznachnoy logiki [A sequence of functions of the multi-valued logic]. Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 2011, no. 6, pp. 52–57. (in Russian)