ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

№ 8 ПРИЛОЖЕНИЕ Сентябрь 2015

Секция 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/8/37

НЕНАДЁЖНОСТЬ СХЕМ ПРИ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ И ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе, содержащем только штрих Шеффера. Предполагается, что каждый из элементов схемы подвержен неисправностям типа 0 или типа 1 на входах или выходах (с различными вероятностями). Получена верхняя асимптотическая оценка ненадёжности этих схем. Для почти любой булевой функции найдена нижняя асимптотическая оценка ненадёжности, и обе асимптотические оценки оказались равны.

Ключевые слова: *ненадёжные функциональные элементы, ненадёжность схемы, константные неисправности.*

Впервые задачу синтеза надёжных схем из ненадёжных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он также предполагал, что все базисные элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах и переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Задача синтеза надёжных схем при константных неисправностях одного типа (например, только типа 0 на входах элементов) решена в базисах из двухвходовых элементов [2]. В [3] приведены результаты о ненадёжности схем при инверсных неисправностях и отказах элементов. В этой работе впервые исследуется модель, в которой каждый элемент схемы может быть подвержен константным неисправностям четырёх типов: типа 0 или типа 1 на входах или выходах (с различными вероятностями). Заметим также, что инверсные неисправности элементов являются частным случаем в рассматриваемой модели неисправностей.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе $\{x|y\}$ (где $x|y = \overline{x\&y}$ — штрих Шеффера). Схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1,\ldots,a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагаем, что в каждый такт работы схемы на любом из входов и выходе любого из её элементов независимым образом могут происходить константные неисправности: типа 0 на входах с вероятностью $\gamma_0 \in (0,1/8)$, или типа 1 на входах с вероятностью $\gamma_1 \in (0,1/4)$, или типа 0 на выходах с вероятностью $\varepsilon_0 \in (0,1/4)$, или типа 1 на выходах с вероятностью $\varepsilon_1 \in (0,1/4)$.

Неисправности типа 0 *на входах элементов* характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует функцию $x|y$, а в неисправном поступающий на его вход нуль не искажается, а поступающая на вход единица с ве-

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00273.

роятностью γ_0 может превратиться в нуль. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах.

Неисправности типа 0 *на выходах элементов* характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует функцию $x|y$, а в неисправном — с вероятностью ε_0 константу 0. Аналогично определяются неисправности типа 1 на выходах.

Пусть схема S реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $\overline{f(\tilde{a}^n)}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. *Ненадёжность* $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S, \tilde{a}^n)$ по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Учитывая характер рассматриваемых неисправностей, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E при всех входных наборах этого элемента: $P_0(E,(00)) = \gamma_1^2(1-\varepsilon_1) + (1-\gamma_1^2)\varepsilon_0$, $P_0(E,(01)) = P_0(E,(10)) = \gamma_1(1-\gamma_0)(1 - \varepsilon_1) + (1-\gamma_1(1-\gamma_0))\varepsilon_0$, $P_1(E,(11)) = (1-\gamma_0)^2\varepsilon_1 + (2\gamma_0 - \gamma_0^2)(1-\varepsilon_0)$.

Замечание 1. Отметим, что 1) если $\gamma_0 = \gamma_1 = \varepsilon_1 = 0$, то получим неисправности типа 0 на выходах элементов с вероятностью ε_0; 2) если $\gamma_0 = \gamma_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 1 на выходах элементов с вероятностью ε_1; 3) если $\gamma_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 0 на входах элементов с вероятностью γ_0; 4) если $\gamma_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 1 на входах элементов с вероятностью γ_1; кроме того 5) если $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$, то получим инверсные неисправности на выходах элементов с вероятностью ε_0; 6) если $\gamma_0 = \gamma_1$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, то получим инверсные неисправности на входах элементов с вероятностью γ_0.

Обозначим $P_0(E,(00)), P_0(E,(01)), P_0(E,(10)), P_1(E,(11))$ через $\alpha, \beta, \delta, \tau$ соответственно. Поскольку в нашем случае $\beta = \delta$, ненадёжность элемента E равна $P(E) = \max\{\alpha, \beta, \tau\} \leqslant \max\{\gamma_1 + \varepsilon_0, 2\gamma_0 + \varepsilon_1\}$. Обозначим через $\varepsilon = \max\{\gamma_1 + \varepsilon_0, 2\gamma_0 + \varepsilon_1\}$. Очевидно, что $P(E) \leqslant \varepsilon$.

Справедлива теорема 1 об асимптотической верхней оценке ненадёжности схем.

Теорема 1. Любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически не больше, чем $2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Доказательство такое же, как и в случае, когда базисный элемент подвержен только одному типу неисправностей.

Пусть $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, а $K(n)$ — множество булевых функций вида $f(\tilde{x}^n) = (\bar{x}_i \vee h(\tilde{x}^n))^a$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$; $a \in \{0, 1\}$. Нетрудно проверить, что число функций в классе $K(n)$ не больше $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных. Обозначим $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(n)$. Справедлива теорема 2 об асимптотической нижней оценке ненадёжности схем.

Теорема 2. Если функция $f \notin K$, а S — любая схема, реализующая f, то ненадёжность $P(S)$ схемы S асимптотически не меньше, чем $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Доказательство такое же, как и в случае, когда базисный элемент подвержен только одному типу неисправностей.

Выводы:

1) любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически не больше $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$;

2) для почти любой функции f ($f \notin K$) такая схема функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$, т. е. оценку $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ нельзя понизить для функций $f \notin K$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies. C. Shannon and J. Mc. Carthy (eds). Princeton University Press, 1956. (Рус. пер.: Автоматы. М.: ИЛ, 1956.)
2. *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. 156 с.
3. *Алехина М. А, Барсукова О. Ю.* Об оценках ненадёжности схем при инверсных неисправностях и отказах функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 50–51.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/8/38

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что все базисные элементы независимо друг от друга переходят в такие неисправные состояния, что любой базисный элемент на любом входном наборе с вероятностью $1 - 2p$ выдаёт правильное значение и с вероятностью, равной p, может выдать любое из двух неправильных значений. Получена нижняя оценка ненадёжности схем, реализующих функции из некоторого класса.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, схема из ненадёжных функциональных элементов, надёжность и ненадёжность схемы.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : \{0, 1, 2\}^n \to \{0, 1, 2\}$. Обозначим через $\tilde{x}$ набор $(x_1, \ldots, x_n)$, тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\tilde{x})$.

Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе, состоящем из функции Вебба $V_3(x_1, x_2) = (\max(x_1, x_2) + 1) \bmod 3$. Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a})$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадёжны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что на произвольном входном наборе (a_1, a_2) базисного элемента, $V_3(a_1, a_2) = \nu$, этот элемент с вероятностью $1 - 2\varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, 1/4)$) выдаёт значение ν, с вероятностью ε — значение $(\nu + 1) \bmod 3$ и с вероятностью ε — значение $(\nu + 2) \bmod 3$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{a}$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}) = \tau$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}) \neq \tau}(S, \tilde{a})$ вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}) \neq \tau}(S, \tilde{a}) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a})$. Например,

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-00273 и 14-01-31360.