2) для почти любой функции f ($f \notin K$) такая схема функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$, т. е. оценку $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ нельзя понизить для функций $f \notin K$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies. C. Shannon and J. Mc. Carthy (eds). Princeton University Press, 1956. (Рус. пер.: Автоматы. М.: ИЛ, 1956.)
2. *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. 156 с.
3. *Алехина М. А, Барсукова О. Ю.* Об оценках ненадёжности схем при инверсных неисправностях и отказах функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 50–51.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/8/38

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что все базисные элементы независимо друг от друга переходят в такие неисправные состояния, что любой базисный элемент на любом входном наборе с вероятностью $1 - 2p$ выдаёт правильное значение и с вероятностью, равной p, может выдать любое из двух неправильных значений. Получена нижняя оценка ненадёжности схем, реализующих функции из некоторого класса.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, схема из ненадёжных функциональных элементов, надёжность и ненадёжность схемы.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$. Обозначим через $\tilde{x}$ набор $(x_1, \ldots, x_n)$, тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\tilde{x})$.

Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе, состоящем из функции Вебба $V_3(x_1, x_2) = (\max(x_1, x_2) + 1) \bmod 3$. Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a})$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадёжны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что на произвольном входном наборе (a_1, a_2) базисного элемента, $V_3(a_1, a_2) = \nu$, этот элемент с вероятностью $1 - 2\varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, 1/4)$) выдаёт значение ν, с вероятностью ε — значение $(\nu + 1) \bmod 3$ и с вероятностью ε — значение $(\nu + 2) \bmod 3$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{a}$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}) = \tau$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S, \tilde{a})$ вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S, \tilde{a}) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a})$. Например,

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-00273 и 14-01-31360.

если входной набор $\tilde{a}$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна $P_{f(\tilde{a})\neq 0}(S,\tilde{a}) = P_1(S,\tilde{a}) + P_2(S,\tilde{a})$.

Ненадёжностью схемы S будем называть число $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Теорема 1 [1]. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой D, что $P(D) \leqslant 8\varepsilon + 268\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/10^4]$.

Из теоремы 1 следует, что любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 8ε.

Обозначим через $K(n)$ множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), принимает все три значения $0, 1, 2$ и не представима в виде $\max\{x_k, h(\tilde{x}^n)\} + c$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$, $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция трёхзначной логики).

Обозначим через K множество $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Справедлива теорема 2 о нижней оценке ненадёжности, доказательство которой аналогично доказательству теоремы о нижних оценках [2] (кратко в [3]).

Теорема 2. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, при $\varepsilon \in (0, 1/10^4]$ верно неравенство $P(S) \geqslant 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$.

Утверждение 1. $|K(n)| \geqslant 3^{3^n} - n3^{1+2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}$.

Из утверждения 1 следует, что класс K содержит почти все функции из P_3, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{3^n} - n3^{1+2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}}{3^{3^n}} = 1.$$

Из теоремы 2 следует, что функцию из класса K (содержащего почти все функции множества P_3) нельзя реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) меньше 6ε.

Таким образом, получаем следующий результат: в базисе $\{V_3(x_1, x_2)\}$ почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше 8ε и асимптотически не меньше 6ε при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Верхняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Известия высших учебных заведений. Математика. Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. №3. С. 15–27.
2. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Оценки ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2014. №1. С. 33–50.
3. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. №7. С. 109–110.