УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/8/39

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ РОССЕРА — ТУРКЕТТА (В P_4)[1]

М. А. Алехина, С. П. Каргин

Рассматривается реализация функций четырёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью p подвержены инверсным неисправностям на выходах, т. е. каждый базисный элемент на любом входном наборе с вероятностью p выдаёт каждое из трёх неверных значений, с вероятностью $1 - 3p$ выдаёт верное значение. Найден класс функций K, содержащий почти все четырёхзначные функции, и показано, что любая схема, реализующая функцию из класса K, функционирует с ненадёжностью, которая асимптотически (при малых значениях p) не меньше $9p$.

Ключевые слова: *функции четырёхзначной логики, ненадёжные функциональные элементы, ненадёжность схемы, инверсные неисправности на выходах элементов.*

Многозначная логика предоставляет широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач. Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т. д.

В [1] описан функционально полный в P_3 базис, в котором на компромиссной основе согласованы математические и технические (МДП-техники) требования и интересы, а также рассмотрены некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе. В [2] построен функционально полный в P_4 базис, реализуемый в МОП-структурах.

Таким образом, определённый интерес представляет задача исследования надёжности функционирования схем в полном конечном базисе из k-значных функций ($k \geqslant 3$). Задача построения надёжных схем в произвольном полном базисе из трёхзначных функций ($k = 3$) решена в [3].

В работе получена нижняя оценка ненадёжности схем в базисе Россера — Туркетта при $k = 4$. Нижняя оценка ненадёжности схем в том же базисе при $k = 3$ опубликована в [4].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а P_4 — множество всех функций четырёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : \{0, 1, 2, 3\}^n \to \{0, 1, 2, 3\}$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_4 схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта $\{0, 1, 2, 3, J_0(x_1), J_1(x_1), J_2(x_1), J_3(x_1), \min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\}$ ($\min\{x_1, x_2\}$ будем также обозначать через &, а $\max\{x_1, x_2\}$ — через $\vee$ [1]).

Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i ($i \in$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00273.

$\in \{0,1,2,3\}$) на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n)$ — вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S,\tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S,\tilde{a}^n) + P_{\tau+3}(S,\tilde{a}^n)$. (В выражениях $\tau+1$, $\tau+2$ и $\tau+3$ сложение осуществляется по mod 4.)

Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n)=0$, то вероятность появления ошибки на этом наборе равна $P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S,\tilde{a}^n) = P_1(S,\tilde{a}^n)+P_2(S,\tilde{a}^n)+P_3(S,\tilde{a}^n)$.

Ненадёжностью схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть число $P(S)$, равное наибольшей из вероятностей появления ошибки на выходе схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1-P(S)$.

Предполагается, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0,1/6)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах, т. е. каждый базисный элемент с функцией $\varphi(\tilde{x}^k)$ ($k \in \{1,2\}$) на любом входном наборе $\tilde{a}^k$, таком, что $\varphi(\tilde{a}^k)=\tau$, с вероятностью ε выдаёт значение $(\tau+1) \bmod 4$, с вероятностью ε — значение $(\tau+2) \bmod 4$ и с той же вероятностью — значение $(\tau+3) \bmod 4$. Очевидно, что ненадёжность любого базисного элемента равна 3ε, а надёжность равна $1-3\varepsilon$.

Обозначим через $K(n)$ множество таких функций четырёхзначной логики, зависящих от переменных $x_1,\ldots,x_n$ ($n \geqslant 3$), что каждая из этих функций принимает все четыре значения $0,1,2,3$ и не представима ни в виде $x_k \vee h(\tilde{x}^n)$, ни в виде $x_k \& h(\tilde{x}^n)$ ($k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция четырёхзначной логики). Пусть $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Теорема 1. $|K(n)| \geqslant 4^{4^n} - 2n4^{3\cdot 4^{n-1}} - 4\cdot 3^{4^n}$.

Доказательство проводится с использованием представления функции из класса $K(n)$ в совершенной ДНФ.

Из теоремы 1 следует, что класс $K(n)$ содержит почти все функции четырёхзначной логики из $P_4(n)$, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n4^{3\cdot 4^{n-1}} + 4\cdot 3^{4^n}}{4^{4^n}} = 0.$$

Справедлива теорема о нижней оценке ненадёжности схем, реализующих функции из класса K.

Теорема 2. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, при $\varepsilon \in (0,1/1000]$ верно неравенство $P(S) \geqslant 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$.

Из теоремы 2 следует, что любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадёжностью, которая асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не меньше 9ε.

Таким образом, функцию из класса K (содержащего почти все функции из P_4) нельзя реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) меньше 9ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов Ю. А.* О синтезе трехзначных МДП-схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. М.: Наука, 1991. С. 187–198.
2. *Виноградов Ю. А.* О синтезе четырехзначных квазикомплементарных МОП-схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. М.: Наука, 1999. С. 298–300.
3. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
4. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 109–110.