УДК 519.71 DOI 10.17223/2226308X/8/40

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЁЖНОСТИ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ С НЕНАДЁЖНЫМ СТОП-ОПЕРАТОРОМ[1]

С. М. Грабовская

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе. Предполагается, что вычислительные операторы программы с вероятностью $\varepsilon \in (0,1/2)$ подвержены однотипным константным неисправностям на выходах, а стоп-операторы — с вероятностями $\delta \in (0,1/2)$ и $\eta \in (0,1/2)$ неисправностям 1-го и 2-го рода соответственно. Найдены верхние оценки ненадёжности неветвящихся программ во всевозможных полных конечных базисах.

Ключевые слова: *булева функция, неветвящаяся программа, оператор условной остановки, надёжность, константные неисправности.*

Программы с оператором условной остановки [1] характеризуются наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы программы при выполнении определённого условия, а именно при поступлении единицы на вход оператора условной остановки (который ещё называют стоп-оператором).

Будем считать, что все вычислительные операторы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0,1/2)$ подвержены константным неисправностям либо типа 0, либо типа 1 на выходах [2]. Константные неисправности типа 0 (типа 1) характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — функцию 0 (функцию 1).

Предполагается, что операторы условной остановки ненадёжны и независимо друг от друга подвержены неисправностям двух типов: первого и второго рода [3]. Неисправность первого рода характеризуется тем, что при поступлении единицы на вход стоп-оператора он с вероятностью $\delta \in (0,1/2)$ не срабатывает и, следовательно, работа программы продолжается. Неисправность второго рода такова, что при поступлении нуля на вход стоп-оператора он с вероятностью $\eta \in (0,1/2)$ срабатывает и, следовательно, работа программы прекращается. Обозначим $\mu = \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$.

Замечание 1. Заметим, что схему из функциональных элементов (ФЭ) [2] можно считать частным случаем неветвящихся программ, а именно неветвящейся программой, в которой нет стоп-операторов.

Определение 1. Ненадёжностью $N_\mu(Pr)$ программы Pr назовём максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Надёжность программы Pr равна $1 - N_\mu(Pr)$.

Определение 2. Особенной функцией называется функция вида $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0$ ($\beta_i \in \{0,1\}$, $i = 0,1,2,3$).

Известно [4], что из всякой нелинейной функции от трёх или более переменных отождествлением и/или переименованием переменных можно получить либо некоторую нелинейную функцию двух переменных $\phi(x_1,x_2) = x_1x_2 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_0$, либо некоторую особенную функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0$,

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-31360.

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0, 1\}$. Поскольку в любом полном конечном базисе содержится нелинейная функция, далее без ограничения общности будем считать, что рассматриваемый полный базис B содержит либо нелинейную функцию двух переменных, либо особенную функцию.

Для нелинейной функции двух переменных $(x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2})^{\alpha_3}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1\})$ возможны два случая: 1) $\alpha_3 = 0$, тогда функция принимает вид $x_1^{\bar{\alpha_1}} \vee x_2^{\bar{\alpha_2}}$, и будем называть её обобщённой дизъюнкцией; 2) $\alpha_3 = 1$, в этом случае функция принимает вид $x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2}$, будем называть её обобщённой конъюнкцией.

Таким образом, рассмотрим три вида базисов, содержащих 1) особенную функцию; 2) обобщённую дизъюнкцию; 3) обобщённую конъюнкцию. Получены следующие результаты.

1. Пусть полный конечный базис B содержит особенную функцию.

Теорема 1. В полном конечном базисе, содержащем особенную функцию, любую булеву функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f при однотипных константных неисправностях на выходах вычислительных операторов, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\mu(Pr_f) \leqslant \max\{\varepsilon, \eta\} + 68\mu^2$.

2. Пусть полный конечный базис содержит обобщённую дизъюнкцию. Здесь возможны два варианта: вычислительные операторы подвержены константным неисправностям на выходах либо типа 0, либо типа 1.

Теорема 2. В полном конечном базисе, содержащем обобщённую дизъюнкцию, любую булеву функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f при константных неисправностях типа 0 на выходах вычислительных операторов, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\mu(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 78\mu^2$.

Теорема 3. В полном конечном базисе, содержащем обобщённую дизъюнкцию, любую булеву функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f при константных неисправностях типа 1 на выходах вычислительных операторов, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\mu(Pr_f) \leqslant 80\mu^2$.

3. Пусть полный конечный базис содержит обобщённую конъюнкцию. Так же, как и в предыдущем случае, рассмотрим два варианта: вычислительные операторы подвержены константным неисправностям типа 0 либо типа 1 на выходах.

Теорема 4. В полном конечном базисе, содержащем обобщённую конъюнкцию, любую булеву функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f при константных неисправностях типа 0 на выходах вычислительных операторов, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\mu(Pr_f) \leqslant 80\mu^2$.

Теорема 5. В полном конечном базисе, содержащем обобщённую конъюнкцию, любую булеву функцию f можно реализовать такой неветвящейся программой Pr_f при константных неисправностях типа 1 на выходах вычислительных операторов, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N_\mu(Pr_f) \leqslant \varepsilon + 78\mu^2$.

Таким образом, в произвольном полном конечном базисе верхняя оценка ненадёжности неветвящихся программ при однотипных константных неисправностях на выходах вычислительных операторов составляет $\max\{\varepsilon, \eta\} + 78\mu^2$ для всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ и $\mu = \max\{\varepsilon, \delta, \eta\}$. Однако в некоторых случаях эта оценка может быть существенно улучшена. Например, в базисе, содержащем обобщённую дизъюнкцию (конъюнкцию), любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой при константных неисправностях типа 1 (0) на выходах вычислительных операторов с ненадёжностью не больше $80\mu^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

В качестве сравнения, для схем из ФЭ известно [2], что в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию f можно реализовать схемой из ФЭ при тех же типах неисправностей с ненадёжностью не больше $3\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in$ $\in (0, 1/960]$. Однако в некоторых базисах данную верхнюю оценку можно улучшить. Например, в базисе $\{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ она составляет $2\varepsilon + 42\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/140]$; в базисе $\{x_1 \& \bar{x}_2, x_1 \sim x_2\}$ имеем $\varepsilon + 6\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/320]$. Заметим, что для неветвящихся программ без стоп-операторов (см. замечание 1) $\delta = \eta = 0$, следовательно, $\mu = \varepsilon$. Тогда верхняя оценка ненадёжности таких программ составляет $\varepsilon + 78\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$, а в некоторых базисах $80\varepsilon^2$, что в общем случае лучше, чем для схем из ФЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чашкин А. В.* О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 1997. Т. 4. №1. С. 60–78.
2. *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006.
3. *Алехина М. А., Грабовская С. М.* Асимптотически оптимальные по надежности неветвящиеся программы с оператором условной остановки. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2013.
4. *Редькин Н. П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. 1989. Вып. 2. С. 198–222.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/8/41

О ДЛИНЕ, ВЫСОТЕ И НАДЁЖНОСТИ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ФУНКЦИИ ВЫБОРА v_{2i}[1]

А. В. Рыбаков

Рассматриваются клеточные (плоские) схемы, реализующие функции выбора v_{2i}. Предполагается, что коммутационные элементы абсолютно надёжны, а функциональные подвержены инверсным неисправностям на выходах, причём переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Найдены соотношения для длины и высоты, а также получена оценка ненадёжности таких схем.

Ключевые слова: *булевы функции, клеточные (плоские) схемы, инверсные неисправности функциональных элементов, ненадёжность схемы, функция выбора.*

Впервые задачу синтеза надёжных схем из ненадёжных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию ϕ, а в неисправном — функцию $\overline{\phi}$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил [1], что в произвольном полном базисе при $\varepsilon \in (0; 1/6]$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки, на выходе которой при любом

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект №14-01-31360.