Секция 6

# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ, АВТОМАТОВ И ГРАФОВ

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/8/42

## О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ТУРНИРА

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Получены нижняя и верхняя оценки для числа дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения произвольного турнира. Показывается, что оценки являются точными, и описываются турниры, для которых оценки достигаются.

**Ключевые слова:** *турнир, минимальное вершинное расширение, отказоустойчивость.*

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным $k$-расширением* ($k$ — натуральное, в данной работе $k = 1$) $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) $G^*$ является вершинным $k$-расширением $G$, то есть граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любых его $k$ вершин;
2) $G^*$ содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального вершинного $k$-расширения введено на основе понятия оптимальной $k$-отказоустойчивой реализации, которое предложено Хейзом в [1] при построении модели отказоустойчивости, основанной на графах. Основные определения используются согласно [2].

Через $ec(G)$ обозначим количество дополнительных рёбер (дуг) в минимальном вершинном 1-расширении графа $G$ по сравнению с самим графом $G$.

В работе [3] доказываются некоторые результаты о связи между минимальными вершинными $k$-расширениями неориентированных и ориентированных графов.

**Лемма.** Пусть орграф $G^*$ есть минимальное вершинное $k$-расширение орграфа $G$. Тогда симметризация орграфа $G^*$ является вершинным $k$-расширением симметризации орграфа $G$.

**Следствие.** Число дополнительных дуг минимального вершинного $k$-расширения орграфа $G$ не меньше числа дополнительных рёбер минимального вершинного $k$-расширения симметризации орграфа $G$.

Легко убедиться, что единственным минимальным вершинным 1-расширением графа $K_n$ является граф $K_{n+1}$, причём $ec(K_n) = n$.

### Нижняя оценка

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *точным вершинным $k$-расширением* $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если граф $G$ изоморфен каждому подграфу графа $G^*$, получающемуся из графа $G^*$ путём удаления любых его $k$ вершин и всех связанных с ними дуг (рёбер).

Можно заметить, что минимальное вершинное 1-расширение графа $K_n$ является и его точным вершинным 1-расширением.

Если ориентировать каждое ребро полного графа $K_n$, то получим некоторый турнир $\overrightarrow{T}_n$. Согласно следствию можно сделать следующий вывод:

$$ec(\overrightarrow{T}_n) \geqslant n,$$

то есть число дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения произвольного турнира $\overrightarrow{T}_n$ не может быть меньше $n$, причём в этом случае минимальное вершинное 1-расширение является и точным вершинным 1-расширением. Такие турниры существуют, например транзитивные, вершинно-симметрические и некоторые другие [4], и относительно хорошо изучены. Большинство турниров не имеют точного вершинного 1-расширения, поэтому для них

$$ec(\overrightarrow{T}_n) > n.$$

Удалось доказать, что не существует турниров с числом дополнительных дуг в минимальном вершинном 1-расширении равном $n + 1$.

**Теорема 1.** Если минимальное вершинное 1-расширение турнира $\overrightarrow{T}_n$ не является его точным вершинным 1-расширением, то справедливо неравенство

$$ec(\overrightarrow{T}_n) > n + 1.$$

Данная оценка является достижимой.

**Теорема 2.** Турнир, получающийся из транзитивного заменой ориентации одной дуги из источника в сток, имеет минимальное вершинное 1-расширение с $(n + 2)$ дополнительными дугами.

**Верхняя оценка**

Граф $G_t = (V_t, \alpha_t)$ называется *тривиальным $k$-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если $G_t$ получается из $G$ добавлением $k$ вершин, соединением их со всеми вершинами графа $G$ и друг с другом. Граф $G_t$ можно представить как соединение $G$ и полного графа $K_k = (V_k, \alpha_k)$: $G_t = (V_t, \alpha_t) = (V \cup Vk, \alpha \cup \alpha_k \cup V \times V_k \cup V_k \times V)$. Очевидно, что тривиальное $k$-расширение графа является и его вершинным $k$-расширением, что позволяет получить общую верхнюю оценку для числа дополнительных дуг произвольного орграфа:

$$ec(\overrightarrow{T}_n) \leqslant 2n.$$

Оказалось, что для турниров эта оценка является достижимой.

**Теорема 3.** Турнир с числом вершин $n = 4k + 2$, все вершины которого имеют степени $(3k + 1, k)$ или $(k, 3k + 1)$, имеет минимальное вершинное 1-расширение с $2n$ дополнительными дугами.

Таким образом, получается общий результат.

**Теорема 4.** Если минимальное вершинное 1-расширение турнира $\overrightarrow{T}_n$ не является его точным вершинным 1-расширением, то справедливо неравенство

$$n + 2 \leqslant ec(\overrightarrow{T}_n) \leqslant 2n,$$

причём верхняя и нижняя оценки являются достижимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. Т. 23. №2. С. 93–102.
4. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Семейства точных расширений турниров // Прикладная дискретная математика. 2008. №1. С. 101–107.


УДК 519.6 DOI 10.17223/2226308X/8/43

## УСЛОВИЯ ПРИМИТИВНОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГРАФОВ

Я. Э. Авезова, В. М. Фомичев

Получены достаточные условия примитивности системы двух $n$-вершинных орграфов в случае, когда один из орграфов не содержит ациклических вершин, в частности, когда содержит гамильтонов контур. Получена оценка экспонента системы двух орграфов через экспонент их произведения. Результаты могут быть использованы для оценки перемешивающих свойств итеративных функций, построенных на основе разветвления преобразования на два заданных преобразования.

**Ключевые слова:** *примитивный граф, экспонент графа, гамильтонов цикл.*

Пусть $S = \{A, B\}$ — система двух неотрицательных матриц порядка $n$. Получим условия, при которых система $S$ является примитивной. По определению система $S$ примитивная, если мультипликативная полугруппа $\langle A, B\rangle$ содержит положительную матрицу. Длина наименьшего слова в алфавите $S$, соответствующего положительной матрице, называется экспонентом системы $S$, обозначается $\exp S$. Далее слово $w = C_1 \cdot \ldots \cdot C_l$ в алфавите $S$ (то есть $C_i \in S$, $i = 1, \ldots, l$) отождествляется с матрицей, равной произведению $C_1 \cdot \ldots \cdot C_l$.

Один из способов получения оценки $\exp S$ состоит в построении примитивного слова $w$. Если длина слова $w$ равна $l$, то $\exp S \leqslant l \cdot \exp w$. Получим условия на матрицы $A$ и $B$, при которых слово $AB$ примитивное. Воспользуемся аппаратом теории графов, что при исследовании примитивности равносильно. Если $\Gamma_1$ есть часть графа $\Gamma_2$, то обозначим это $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$.

Обозначим $\Gamma(A)$ $n$-вершинный орграф с матрицей смежности $A$. Пусть орграф $\Gamma(A)$ не содержит ациклических вершин, то есть состоит из $k$ непересекающихся компонент сильной связности, $1 \leqslant k \leqslant n$.

**Лемма 1.** Если $\Gamma(B)$ имеет петли в каждой вершине, то $\Gamma(A) \leqslant \Gamma(AB)$.

**Следствие 1.** В условиях леммы множество простых контуров орграфа $\Gamma(AB)$ содержит все простые контуры орграфа $\Gamma(A)$.

Для орграфа $\Gamma(A)$, не содержащего ациклических вершин, построим $k$-вершинный орграф $\Gamma_A(B)$ с помощью отождествления некоторых вершин орграфа $\Gamma(B)$: вершины $i$ и $j$ орграфа $\Gamma(B)$ отождествляются, если и только если эти вершины принадлежат одной компоненте сильной связности орграфа $\Gamma(A)$.

**Лемма 2.** Если орграф $\Gamma_A(B)$ сильносвязный, то орграф $\Gamma(AB)$ тоже сильносвязный.