УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/8/44

О КОЛИЧЕСТВЕ НЕДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм. Данной системе изоморфна конечная динамическая система (B^{s+c},γ), $s>0$, $c>1$, состояниями которой являются все возможные двоичные векторы размерности $s+c$. Приведена формула для подсчёта количества недостижимых состояний в рассматриваемых динамических системах, представлена соответствующая таблица для систем (B^{8+c},γ), $1<c<9$.

Ключевые слова: *конечная динамическая система, недостижимое состояние, пальма, сверхстройное (звездообразное) дерево.*

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S,δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*; $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s\in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами, или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относятся *ветвление* (количество непосредственных предшественников данного состояния) и, в частности, свойство *недостижимости* состояния (то есть когда состояние имеет нулевое ветвление). Автором составлены программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов [1], описаны недостижимые состояния конечных динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с графами [2], подсчитаны количества недостижимых состояний в системах, связанных с ориентациями цепей и циклов [3].

Дерево называется *пальмой*, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Пальма является частным случаем *сверхстройного* (*звездообразного*) *дерева* (дерево, в котором в точности одна вершина имеет степень больше 2).

Пусть пальма p образована объединением цепей $p_0,p_1,\ldots,p_c$, имеющих общую концевую вершину. Будем считать, что p_0 имеет среди этих цепей максимальную длину $s\geqslant 1$. Назовём p_0 *стволом пальмы* p, цепи $p_1,p_2,\ldots,p_c$, имеющие длину 1, — её *листьями*, а их совокупность — *кроной*. Будем говорить, что p является пальмой типа (s,c). Пальма с точностью до изоморфизма определяется своим типом. При $c=1$ пальма вырождается в цепь (см., например, [3, 4]), поэтому далее полагаем $c>1$.

Пусть имеется пальма p типа (s,c), $s+c=n$. Зафиксируем расположение её цепей и перенумеруем рёбра пальмы p, начиная от корня (начальной вершины ствола), двигаясь к кроне (рёбра с номерами от 1 по s), а далее рёбра кроны слева направо (рёбра с номерами от $s+1$ до $s+c$). Придадим каждому ребру пальмы произвольную ориентацию и сопоставим полученному ориентированному графу p n-мерный двоичный вектор $v(p)$, полагая его i-ю компоненту равной 1, если i-е ребро пальмы p ориентировано от корня, и 0 — в противном случае. Теперь можно последовательно выписать получившуюся последовательность из нулей и единиц: $v = v_1 \dots v_s.v_{s+1} \dots v_{s+c}$, где v_i, $0 < i \leqslant s+c$, принимает значение 0 или 1 в зависимости от ориентации i-го ребра пальмы. Таким образом, каждой ориентации пальмы сопоставляется n-мерный двоичный вектор, причём $n = s+c$. В свою очередь, каждый такой вектор $v = v_1 \dots v_s.v_{s+1} \dots v_{s+c}$ однозначно определяет некоторую ориентацию пальмы $p(v)$ типа (s, c). Таким образом, между множеством P_{s+c}, $s > 0$, $c > 1$, всех возможных ориентированных пальм типа (s, c) указанного вида и множеством B^{s+c}, $s > 0$, $c > 1$, всех двоичных векторов размерности $n = s + c$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем ориентации пальмы для простоты также будем называть пальмами.

Опишем конечную динамическую систему ориентаций (s, c)-пальмы p на языке двоичных векторов. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v = v_1 \dots v_s.v_{s+1} \dots v_{s+c} \in B^{s+c}$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\gamma(v) = v'$, полученном путём одновременного применения следующих правил:

1) если $v_1 = 0$, то $v'_1 = 1$;
2) если $v_i = 1$ и $v_{i+1} = 0$ для некоторого i, $0 < i < s$, то $v'_i = 0$ и $v'_{i+1} = 1$;
3) если $v_i = 1$ для некоторого i, $s < i \leqslant s + c$, то $v'_i = 0$;
4) если $v_s = 1$ и $v_i = 0$ для всех i, $s < i \leqslant s + c$, то $v'_s = 0$ и $v'_i = 1$ для всех i, $s < i \leqslant s + c$;
5) других отличий между v и $\gamma(v)$ нет.

Пусть теперь имеется n-рёберная (s, c)-пальма. На языке ориентаций пальм эволюция динамической системы вводится следующим образом: если дана некоторая ориентированная пальма $p \in P_{s+c}$, то её динамическим образом $\gamma(p)$ является пальма, получаемая из p одновременным превращением всех стоков в источники. Это частный случай динамики бесконтурных связных графов, введённой в [5]. Преобразования ориентаций пальм в динамической системе (P_{s+c}, γ), $s > 0$, $c > 1$, соответствуют эволюционным преобразованиям соотносимых им двоичных векторов в динамической системе (B^{s+c}, γ), $s > 0$, $c > 1$, и обратно, а именно $v(\gamma(p)) = \gamma(v(p))$ [6]. Таким образом, динамические системы (B^{s+c}, γ) и (P_{s+c}, γ), $s > 0$, $c > 1$, изоморфны.

Теорема 1. Количество недостижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ), $s > 0$, $c > 1$, равно

$$\text{КНС}_{(s+c,\gamma)} = 2^{s+c} - 2^s - 2^{s-3} + \Omega(-1) - 2\Omega(1) + \Omega(3),$$

где

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{[(s-x)/4]} (-1)^{i+1} \cdot 2^{s-x-4i} \cdot C^i_{s-x-3i},$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то соответствующие выражения принимают значение 0.

С помощью программы для ЭВМ получены данные о количестве недостижимых состояний в динамической системе (B^{s+c}, γ), представленные для $s = 8$ и $1 < c < 9$ в таблице.

c	2	3	4	5	6	7	8
$\text{КНС}_{(8+c,\gamma)}$	862	1 886	3 934	8 030	16 222	32 606	65 374

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
2. *Жаркова А. В.* О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 76–78.
3. *Жаркова А. В.* Недостижимые состояния в динамических системах, ассоциированных с цепями и циклами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. С. 116–123.
4. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
5. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-reversal Dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. 385 p.
6. *Власова А. В.* Динамические системы, определяемые пальмами // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 57–60.

УДК 519.7 DOI 10.17223/2226308X/8/45

СОВЕРШЕННЫЕ ДВОИЧНЫЕ КОДЫ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ[1]

С. А. Малюгин

Подмножество C в бесконечномерном двоичном кубе $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ называется совершенным двоичным кодом с расстоянием 3, если все шары единичного радиуса (в метрике Хемминга) с центрами из C попарно не пересекаются и их объединение покрывает куб $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Аналогичным образом определяется совершенный двоичный код в нулевом слое $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_0$, состоящем из всех векторов куба $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, имеющих конечные носители. В работе доказывается, что мощность множества всех классов эквивалентности совершенных двоичных кодов в нулевом слое $\{0,1\}^{\mathbb{N}}_0$ равна континууму, а мощность множества классов эквивалентности совершенных двоичных кодов во всём кубе — гиперконтинууму.

Ключевые слова: *совершенные двоичные коды, код Хемминга, расстояние Хемминга, коды Васильева, классы эквивалентности, континуум, гиперконтинуум.*

1. Основные определения

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. *Бесконечномерный куб* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ состоит из всевозможных бесконечных последовательностей $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, где $u_n \in \{0,1\}$; $n \in \mathbb{N}$. Сумма двух элементов $u, v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ определяется формулой $u + v = (u_1 \oplus v_1, \ldots, u_n \oplus v_n, \ldots)$, где $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, $v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ и $u_n \oplus v_n$ — сумма элементов u_n, v_n в двухэлементном поле Галуа $\mathrm{GF}(2) = \{0,1\}$. Относительно такой операции сложения куб $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ является бесконечномерным векторным пространством над полем GF(2). Элементы куба $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ далее будем называть векторами. Нулевой вектор обозначаем через $\mathbf{0}$, а базисные векторы с единичной i-й координатой — через $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots)$. *Носитель* вектора $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (множество индексов i, для которых $u_i = 1$) обозначается через $[u]$. Число ненулевых координат вектора u называется его *весом* и обозначается через $|u|$. В отличие от конечномерного случая вес может

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-00463; 14-01-00507.