УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/8/47

ШПЕРНЕРОВЫ ДЕРЕВЬЯ

В. Н. Салий

В бесконтурном орграфе отношение достижимости на множестве вершин является отношением порядка. Одним из интересных свойств для упорядоченного множества является его шпернеровость — наличие в нём антицепи максимальной длины, все элементы которой имеют одинаковую высоту. В графах с отношением достижимости это свойство обсуждается для выходящих и входящих деревьев, модифицируется и рассматривается для связанных с ними функциональных и контрафункциональных орграфов, для неориентированных деревьев.

Ключевые слова: *упорядоченное множество, бесконтурный орграф, шпернерово свойство, дерево, входящее дерево, выходящее дерево, функциональный орграф, контрафункциональный орграф.*

1. Под высотой элемента в конечном упорядоченном множестве $(A,\leqslant)$ понимается наибольшая из длин убывающих цепей, начинающихся с этого элемента (длина убывающей цепи — уменьшенное на единицу количество элементов в ней). Например, все минимальные элементы в $(A,\leqslant)$ имеют высоту 0.

Антицепь — это некоторый набор попарно не сравнимых элементов из $(A,\leqslant)$. Считая длиной антицепи количество элементов в ней, назовём антицепь главной, если она имеет максимально возможную для антицепей в $(A,\leqslant)$ длину, и назовем правильной, если все её элементы имеют одинаковую высоту.

Конечное упорядоченное множество по определению обладает шпернеровым свойством, или является шпернеровым, если среди его главных антицепей есть хотя бы одна правильная. Это свойство впервые рассмотрел Шпернер [1], доказавший, в частности, что оно выполняется для совокупности $P(S)$ всех подмножеств конечного множества S, упорядоченной теоретико-множественным включением.

2. Ориентированный граф (орграф), не содержащий контуров, называется бесконтурным орграфом. Говорят, что в данном орграфе G вершина v достижима из вершины u, если в G существует путь с началом u и концом v. В этом случае пишут $(u,v)\in\delta$, определяя тем самым отношение достижимости в G.

Известно, что отношение достижимости δ в бесконтурных орграфах является отношением порядка (о бесконтурных орграфах см. в [2]). Так что если $G=(V,\alpha)$ — бесконтурный орграф с множеством вершин V и отношением смежности α, то можно рассматривать ассоциированное с ним упорядоченное множество (V,δ). Бесконтурный орграф $G=(V,\alpha)$ назовём шпернеровым, если (V,δ) — шпернерово упорядоченное множество. В общем случае эффективного способа проверки свойства шпернеровости для бесконтурных орграфов пока нет. В [3] найден критерий шпернеровости для многоугольных орграфов, т. е. бесконтурных орграфов, получающихся из циклов путём ориентации рёбер. В [4] предложена полиномиальная по сложности процедура, позволяющая выяснить наличие или отсутствие шпернерова свойства для линейных орграфов, т. е. орграфов, получающихся путём ориентации рёбер из цепей.

Далее рассмотрим некоторые вопросы, связанные со свойством шпернеровости для деревьев.

3. Для заданного дерева, т. е. связного графа без циклов, при наличии у него n рёбер возможны 2^n ориентаций. Свойства ассоциированных с ними упорядоченных множеств исследовались различными авторами. Так, в [5] установлено, что наименьшая из длин

главных антицепей среди всех таких порядков равняется $[\lambda/2]$ или $[\lambda/2]+1$, где λ — количество висячих вершин дерева.

Наибольший интерес для деревьев представляют два типа ориентации рёбер: выходящее дерево — когда в полученном орграфе имеется единственный источник (вершина, не достижимая из других вершин), и входящее дерево — когда в полученном орграфе имеется единственный сток (вершина, из которой не достижимы другие вершины).

Нетрудно понять, что всякое выходящее дерево является шпернеровым. Действительно, в множестве его вершин, упорядоченном достижимостью, единственный источник — наибольший элемент, а стоки (висячие вершины) — минимальные элементы, причём эти минимальные элементы образуют главную антицепь, которая является правильной (у всех её элементов высота 0).

4. Пусть $G = (V, \alpha)$ — некоторый орграф. Его расконтуриванием называется всякая совокупность дуг, удаление которых превращает G в бесконтурный орграф. Расконтуривание, по определению, является минимальным, если никакое его собственное подмножество не является расконтуриванием. Заметим, что минимальное расконтуривание не нарушает свойства связности орграфа G. Орграф G назовем шпернеровым, если у него есть минимальное расконтуривание, приводящее к шпернеровому бесконтурному орграфу.

Орграф называется контрафункциональным, если каждая его вершина имеет степень захода 1, т. е. в неё входит единственная дуга. Известно [6], что связный орграф является контрафункциональным тогда и только тогда, когда в нём есть точно один контур и удаление из этого контура любой дуги (минимальное расконтуривание) приводит к образованию выходящего дерева. Поскольку, как было отмечено, все выходящие деревья — шпернеровы, любой связный контрафункциональный орграф также шпернеров.

5. Менее очевидны построения, связанные с входящими деревьями. Если (T, α) — входящее дерево, то очевидно, что соответствующее ему упорядоченное множество (T, δ) является нижней полурешёткой (у любых двух элементов есть точная нижняя грань), наименьший элемент которой — корень (единственный сток) дерева, и при этом у каждого элемента v имеется единственный нижний сосед (т. е. элемент u, такой, что $u < v$ и не существует $x \in T$ со свойством $u < x < v$).

Нижнюю полурешётку с наименьшим элементом (нулём), в которой у каждого ненулевого элемента имеется единственный нижний сосед, по ассоциации будем называть древесной полурешёткой. Элемент a конечного упорядоченного множества $(A, \leqslant)$ называется разложимым (в пересечение), если он является точной нижней гранью некоторых двух отличных от него элементов.

Теорема 1. Конечная древесная полурешётка есть шпернерово упорядоченное множество тогда и только тогда, когда в ней высота каждого максимального элемента больше высоты любого разложимого элемента.

Пусть (T, α) — входящее дерево. В упорядоченном множестве (T, δ) высота вершины — это расстояние от неё до корня, максимальными элементами являются висячие вершины, а разложимыми элементами — точки ветвления (в каждую такую вершину входят как минимум две дуги). Так что в терминах деревьев теорема 1 выглядит как

Теорема 2. Входящее дерево является шпернеровым тогда и только тогда, когда расстояние от каждой висячей вершины до корня больше, чем расстояние до него от любой точки ветвления.

6. Следующая полиномиальная процедура позволяет проверить наличие или отсутствие свойства шпернеровости для входящих деревьев.

Пусть A — матрица смежности, а D — (стандартно вычисляемая из A) матрица достижимости дерева (T, α). Тогда:

1) в матрице A выделяются нулевые столбцы, они соответствуют висячим вершинам, образующим подмножество $H \subset T$;
2) в матрице A выделяются столбцы, содержащие не менее двух единиц, они соответствуют точкам ветвления, образующим подмножество $B \subset T$;
3) в матрице D в каждой строке, соответствующей вершине $u \in H$, подсчитывается количество единиц $d(u)$. Выбирается число $d_H = \min\limits_{u \in H} d(u)$;
4) в матрице D в каждой строке, соответствующей вершине $v \in B$, подсчитывается количество единиц $d(v)$. Выбирается число $d_B = \max\limits_{v \in B} d(v)$;
5) дерево шпернерово тогда и только тогда, когда $d_H > d_B$.

Орграф называется функциональным, если каждая его вершина имеет степень исхода 1, т. е. из неё выходит единственная дуга. Известно [6], что связный орграф является функциональным тогда и только тогда, когда в нём есть точно один контур и удаление из этого контура любой дуги (минимальное расконтуривание) приводит к образованию входящего дерева. Проведя описанную выше процедуру для каждого минимального расконтуривания функционального орграфа, можно ответить на вопрос, является ли этот орграфа шпернеровым.

7. Неориентированное дерево назовём шпернеровым, если шпернеровым свойством обладает хотя бы одно из ассоциированных с ним входящих деревьев.

Дерево называется радиальным, если в нём есть вершина (центр), равноудалённая от всех висячих вершин.

Следствие 1. Радиальное дерево является шпернеровым.

Дерево называется сверхстройным, если в нём имеется единственная вершина со степенью не меньше 3. Сверхстройное дерево является объединением не менее чем трёх цепей, имеющих общую вершину (корень). Частные случаи: пальма (все цепи, кроме одной, имеют длину 1), звезда (у всех цепей длина 1).

Следствие 2. Сверхстройное дерево является шпернеровым.

Для того чтобы определить, является ли предъявленное дерево шпернеровым, нужно протестировать на шпернеровость связанные с ним входящие деревья — с помощью процедуры из п. 6. Для её запуска матрица смежности исходного дерева следующим образом преобразуется в матрицу смежности входящего дерева, получающегося при конкретном выборе корня.

Пусть в качестве корня выбрана вершина v. Тогда:

1) в начальной строке, соответствующей вершине v, матрицы смежности дерева каждая единица заменяется на ноль, а единица, симметричная ей относительно главной диагонали, помечается;
2) в строке, содержащей помеченную единицу, каждая непомеченная единица заменяется на ноль, а симметричная ей относительно главной диагонали единица помечается;
3) процесс заканчивается, когда в каждой строке, кроме начальной, останется только одна (помеченная) единица. Полученная матрица будет матрицей смежности для входящего дерева с корнем v.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // Math. Zeitschrift. 1928. B. 27. No. 1. S. 544–548.
2. *Богомолов А. Д., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
3. *Салий В. Н.* Шпернерово свойство для многоугольных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 135–137.
4. *Новокшонова Е. Н.* Шпернерово свойство для линейных графов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. Центр «Наука», 2014. С. 230–231.
5. *Atkinson M. D. and Ng D. T. N.* On the width of an orientation of a tree // Order. 1988. V. 5. No. 1. P. 33–43.
6. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

УДК 519.1+519.173 DOI 10.17223/2226308X/8/48

О РАЗНООБРАЗИИ ШАРОВ ГРАФА ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА[1]

Т. И. Федоряева

Изучаются векторы разнообразия шаров (i-я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса i) для обыкновенных связных графов в асимптотике. Исследовано асимптотическое поведение числа графов с разнообразием шаров специального вида, в частности с локальным (полным) разнообразием шаров. Для типичного графа заданного диаметра получено описание строения разнообразия шаров больших радиусов.

Ключевые слова: *граф, шар, радиус шара, вектор разнообразия шаров.*

В работе изучается разнообразие шаров обыкновенного связного графа в асимптотике. Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве графа G с обычным расстоянием между вершинами, т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Определение 1 [1]. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_d(G))$, где $d = d(G)$ — диаметр графа G, называется *вектором разнообразия шаров* графа G.

Например, вектор разнообразия шаров простой цепи длины d, как показано в [1], равен $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d)$, где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geqslant d. \end{cases}$$

Определение 2 [2]. Граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$, $0 \leqslant t < d(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа G с полным разнообразием шаров имеет вид $(|V(G)|, \ldots, |V(G)|, 1)$. В [1] показано, что класс деревьев с полным разнообразием шаров является бедным, так как состоит лишь из звезды $K_{1,n}$, и получена

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00507.