ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // Math. Zeitschrift. 1928. B. 27. No. 1. S. 544–548.
2. *Богомолов А. Д., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
3. *Салий В. Н.* Шпернерово свойство для многоугольных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 135–137.
4. *Новокшонова Е. Н.* Шпернерово свойство для линейных графов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. Центр «Наука», 2014. С. 230–231.
5. *Atkinson M. D. and Ng D. T. N.* On the width of an orientation of a tree // Order. 1988. V. 5. No. 1. P. 33–43.
6. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

УДК 519.1+519.173 DOI 10.17223/2226308X/8/48

О РАЗНООБРАЗИИ ШАРОВ ГРАФА ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА[1]

Т. И. Федоряева

Изучаются векторы разнообразия шаров (i-я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса i) для обыкновенных связных графов в асимптотике. Исследовано асимптотическое поведение числа графов с разнообразием шаров специального вида, в частности с локальным (полным) разнообразием шаров. Для типичного графа заданного диаметра получено описание строения разнообразия шаров больших радиусов.

Ключевые слова: *граф, шар, радиус шара, вектор разнообразия шаров.*

В работе изучается разнообразие шаров обыкновенного связного графа в асимптотике. Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве графа G с обычным расстоянием между вершинами, т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Определение 1 [1]. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_d(G))$, где $d = d(G)$ — диаметр графа G, называется *вектором разнообразия шаров* графа G.

Например, вектор разнообразия шаров простой цепи длины d, как показано в [1], равен $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d)$, где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geqslant d. \end{cases}$$

Определение 2 [2]. Граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$, $0 \leqslant t < d(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа G с полным разнообразием шаров имеет вид $(|V(G)|, \ldots, |V(G)|, 1)$. В [1] показано, что класс деревьев с полным разнообразием шаров является бедным, так как состоит лишь из звезды $K_{1,n}$, и получена

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00507.

характеризация деревьев с локальным разнообразием шаров. Наименьший порядок графов диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) найден в [3], а в [4] все такие графы наименьшего порядка явно описаны с точностью до изоморфизма и вычислены их векторы разнообразия шаров. В [3] установлены все возможные значения параметров n, d и t, при которых существует n-вершинный граф диаметра d с полным разнообразием шаров (локальным t-разнообразием шаров). В [5] изучен вопрос единственности n-вершинного графа диаметра d с полным разнообразием шаров. Только при $n = 2d > 6$ или $d \leqslant 1$ существует единственный такой граф — $2d$-вершинный цикл при $d > 3$ и полный граф K_n при $d \leqslant 1$.

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение числа графов с локальным (полным) разнообразием шаров и строение вектора разнообразия шаров графа заданного диаметра. Хорошо известен следующий результат.

Теорема 1 [6]. Почти все графы являются графами диаметра 2.

Более того, справедлива следующая

Теорема 2 [2]. Почти все графы являются графами диаметра 2 с полным разнообразием шаров.

Непосредственно из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. Граф диаметра 2 является графом полного разнообразия шаров.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 4. Пусть $d \geqslant 3$. Тогда в графе диаметра d число различных шаров радиуса i равно Δ_i^d для всех $i \geqslant d/2$.

Следствие 1. Пусть $d \geqslant 3$ и $t \geqslant d/2$. Тогда граф диаметра d не обладает локальным t-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоряева Т. И.* Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12. № 3. С. 74–84.
2. *Евдокимов А. А.* Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1. № 1. С. 5–12.
3. *Федоряева Т. И.* Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2007. Т. 14. № 2. С. 47–67.
4. *Федоряева Т. И.* О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17. № 1. С. 65–74.
5. *Федоряева Т. И.* Мажоранты и миноранты класса графов с фиксированными диаметром и числом вершин // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20. № 1. С. 58–76.
6. *Bollobas B.* Graph Theory. Springer Verlag, 1979.