

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22

DOI 10.17223/19988621/37/1

М.С. Бухтяк

## НОРМАЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПАРАБОЛОИДА. ДЕМИКВАДРИКИ

Представляется важной задача о построении на параболоиде вращения семейства линий, обладающих некоторыми свойствами, делающих их удобными для раскроя сетеполотна при проектировании и изготовлении параболической антенны. А именно, требуется, чтобы линии данного семейства локально были близки к геодезическим линиям в достаточно разумном смысле, а также наличие алгоритма, относящего линии указанного семейства к натуральному параметру. В решении поставленной задачи сделан первый, но важный шаг: обнаружен класс поверхностей, пересечение которых с параболоидом порождает класс линий, перспективных для достижения поставленных целей. Указанные поверхности – демиквадрики, особым образом связанные с нормальной конгруэнцией параболоида.

**Ключевые слова:** *параболоид, антенна, геодезическая линия, нормальная конгруэнция, демиквадрика.*

## 1. Постановка проблемы

Задача проектирования и конструирования рефлекторных антенн (не обязательно, но с очень большой вероятностью) требует проведения по поверхности родительского параболоида линий, пригодных для раскроя. Первая по приоритету, как это принято считать, линия, принадлежащая семейству геодезических линий. Следует заметить, однако, что упомянутое семейство линий не лишено недостатков. Именно, геодезическая линия действительно и прямейшая и кратчайшая – но только в локальном смысле. Сказанное демонстрирует пример, приведенный ниже. На рис. 1. изображен кусок параболоида вращения с фокальным параметром, равным 0.25 и геодезическая линия на нем.

Представляется невероятным, чтобы для реального раскроя была применена такая линия. Правда, при больших значениях фокального параметра поведение геодезической линии в некотором смысле «лучше». Но есть и другое обстоятельство. Линии, применяемые для раскроя, особенно удобны, если они отнесены к натуральному параметру – длине дуги. Тогда не составляет

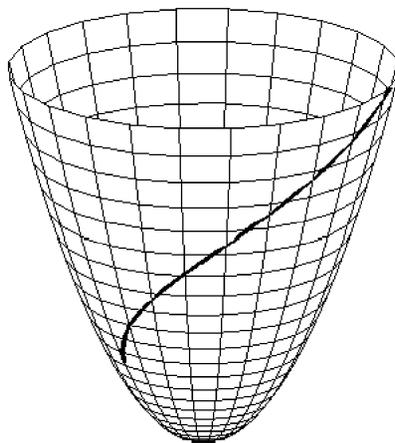


Рис. 1. Геодезическая линия на параболоиде

труда отмерять на таких линиях любые интересующие нас расстояния. Как раз для перехода к натуральному параметру геодезические линии параболоида слишком малоприспособлены. Это заставляет задуматься о поиске класса линий, наделенных следующими свойствами:

1. Локально они должны быть близки к геодезическим линиям в некотором разумном смысле.
2. Их можно относить к натуральному параметру без заметных вычислительных проблем.
3. Они должны однозначно определяться своими концевыми точками, указанными на параболоиде.

Разумеется, первые два условия довольно расплывчаты. Однако было бы странно, если бы удалось заранее уточнить их настолько, чтобы они привели к строгой постановке задачи и, лучше всего, – с единственным решением. Мы не располагаем возможностями для отыскания нужного класса линий, а можем лишь предложить некий класс и надеяться на приемлемость его качеств. Поэтому говорим не о задаче, а о проблеме – сколь бы скромной она ни выглядела.

## 2. Конгруэнция нормалей параболоида вращения

Необходимое соглашение о терминологии. Термин «линейчатая поверхность» сохраним за поверхностью, образующим элементом которой является точка, и через каждую точку такой поверхности проходит прямая (иногда не единственная), принадлежащая данной поверхности. Линейчатая поверхность – двумерное многообразие [1]. Термин «регулюс» [2, 3] обозначает одномерное многообразие, образующим элементом которого является прямая.

Характеристическое свойство геодезической линии: в каждой её точке главная нормаль [4] совпадает с нормалью поверхности в той же точке. Таким образом, регулюс главных нормалей геодезической линии принадлежит нормальной конгруэнции [5, 6] поверхности (в нашем случае – параболоида вращения). Указанная конгруэнция (обозначим её  $\mathfrak{Z}$ ) принадлежит линейному комплексу [7], который называется специальным [6–9], либо вырожденным [10]. Все прямые специального линейного комплекса  $\Omega$  пересекают одну прямую, называемую его осью. В нашем случае осью комплекса служит ось симметрии параболоида. Изначально прямая конгруэнции (либо комплекса) не имеет однозначно определенного направления, однако метод изучения, которым мы предполагаем пользоваться, требует связывать с прямой некоторое направление. Поэтому мы, как правило, говоря об 1-семействе прямых комплекса, конгруэнции или регулюса, будем именовать их лучами [3, с. 39, 78]. Впрочем, в некоторых ситуациях употребление термина «луч» приводит к нежелательным коллизиям. Так, если требуется, чтобы некоторая прямая  $n$ , несущая на себе два луча, отличалась от координатной оси  $Oz$ , то один из лучей (на прямой  $n$ ) может отличаться от оси  $Oz$ , в то время как второй из этих лучей совпадает с указанной осью. В ситуациях, способных породить такие коллизии, будем говорить о прямой, а не о луче.

Текущий луч  $l$  конгруэнции несет на себе две фокальные точки  $\Phi_1(l)$  и  $\Phi_2(l)$  [6]. Луч может быть гиперболическим (фокусы вещественные и различные), эллиптическим (фокусы комплексно-сопряженные), либо параболическим (фокус двойной). Двупараметрическое семейство фокусов  $\Phi_1(l)$  образует одну из так называемых фокальных поверхностей, соответственно из фокусов  $\Phi_2(l)$  составляет вторая фокальная поверхность.

Ввиду осевой симметрии параболоида, невырожденная фокальная поверхность есть поверхность вращения, для которой меридианом служит огибающая [4] семейства нормалей параболы (рис. 2).

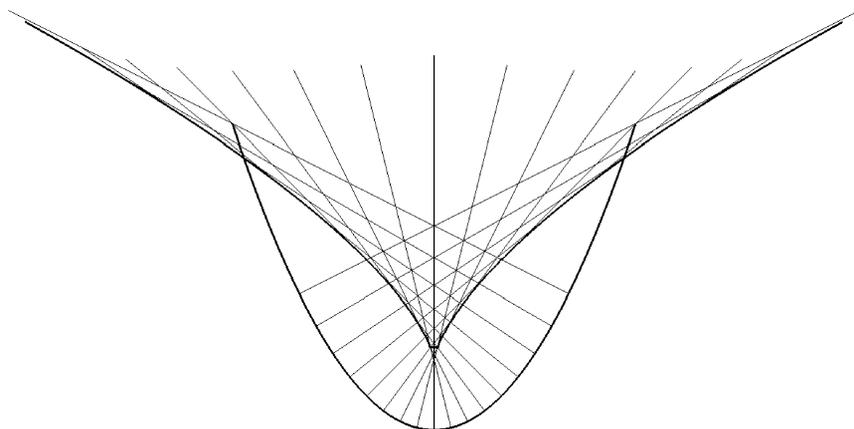


Рис. 2. Огибающая семейства нормалей параболы

Представление о фокальной поверхности нормальной конгруэнции параболоида дает рис. 3.

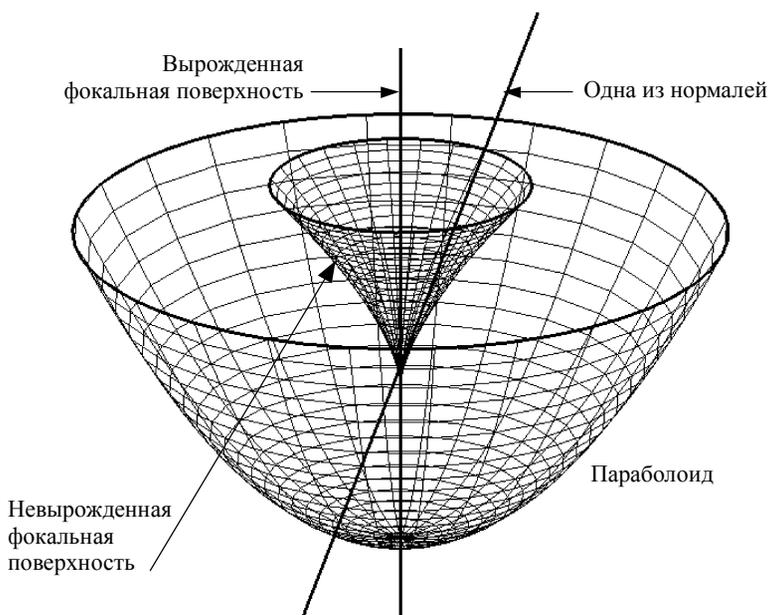


Рис. 3. Кусок параболоида вращения, две фокальные поверхности (одна вырождается в прямую) и одна из нормалей параболоида

Конгруэнция прямых есть двумерная поверхность в четырехмерном линейчатом пространстве [11; 12, с. 60].

В некоторой декартовой системе координат записано уравнение параболоида

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}, \quad (2.1)$$

где  $F$  – фокальный параметр.

Дальнейшие построения и анализ инвариантны относительно преобразований подобия. Совершая соответствующее преобразование с коэффициентом  $4F$ , то есть полагая

$$x = 4FX, y = 4FY, z = 4FZ, \quad (2.2)$$

приводим уравнение (1.1) к виду

$$f \equiv X^2 + Y^2 - Z = 0. \quad (2.3)$$

### 3. Область в специальном линейном комплексе

Рассматриваемое нами 2-семейство прямых, составляющих нормальную конгруэнцию параболоида вращения с осью  $Oz$ , есть подмножество специального линейного комплекса с осью  $Oz$ . Обозначим этот комплекс  $K$ . Для нас нет необходимости рассматривать все прямые данного комплекса. В самом деле, нас интересуют прямые этого комплекса, удовлетворяющие следующим условиям:

а) прямая не параллельна плоскости  $(xOy)$ ;

б) прямая не совпадает с осью  $Oz$  (точнее, конечно, было бы «прямая комплекса не совпадает с прямой – носителем оси  $Oz$ », но полагаем, что допускаемая вольность речи не приведет к недоразумениям).

**Определение.** Совокупность прямых комплекса  $K$ , удовлетворяющих условиям а) и б), назовем семейством допустимых прямых и обозначим  $\tilde{K}$ .

Рассмотрим конструкцию, которая позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между  $\tilde{K}$  и некоторой областью трехмерного евклидова пространства  $E_3$ , в котором задана неподвижная прямая  $n$  (ось специального линейного комплекса) и плоскость  $\alpha$ , ортогональная этой прямой. Точку  $O$  пересечения прямой  $n$  и плоскости  $\alpha$  принимаем за начало декартовой системы координат. На прямой  $n$  помещаем ось  $OZ$ , произвольно выбрав направление на ней. Оси  $OX$  и  $OY$  оказываются в плоскости  $\alpha$ . Всякая прямая  $l$ , принадлежащая  $\tilde{K}$ , пересекает ось  $OZ$  в точке  $(0, 0, z)$  и плоскость  $XOY$  в точке  $(x, y, 0)$ , причем, в силу свойств  $\tilde{K}$ , эти точки различны. Упорядоченную тройку чисел  $(x, y, z)$  будем называть декартовыми координатами прямой  $l$  в системе координат  $(O, X, Y, Z)$ . Тройку чисел  $(\rho, \varphi, z)$  (рис. 4) назовем цилиндрическими координатами той же прямой. Положение оси  $OZ$  однозначно определено. Если мы не меняем положение плоскости  $XOY$ , то, учитывая равноправие всех направлений в этой плоскости, можем считать, что какое-то из этих направлений жестко закреплено за осью  $OX$ , а репер  $(O, X, Y, Z)$  неподвижен. Тогда канонически отождествляем  $E_3$  с  $\mathbb{R}^3$ .

Мы располагаем отображением

$$\tilde{K} \ni l \xrightarrow{f} M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

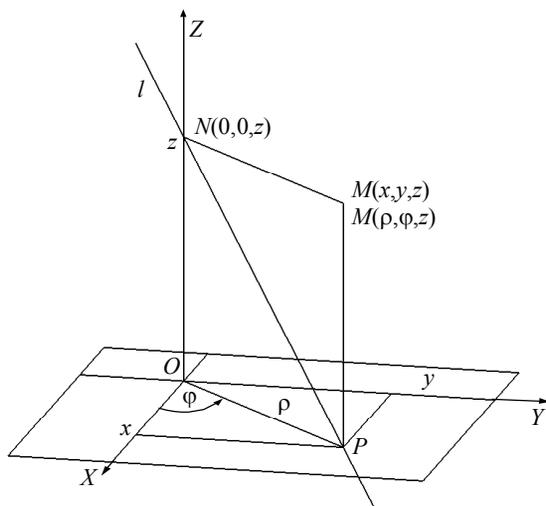


Рис. 4. Правило сопоставления тройки координат прямой линии, принадлежащей области специального линейного комплекса

Заметим, что тройка чисел  $(x, y, z)$  не произвольна. Исключаются точки, для которых выполнено условие

$$z(x^2 + y^2) = 0.$$

Множество точек в  $\mathbb{R}^3$ , не подпадающих под исключение, обозначим  $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ . Тогда вместо (3.1) можем указать взаимно-однозначное соответствие

$$\widetilde{\mathbb{K}} \ni l \leftrightarrow M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \subset \mathbb{R}^3; \quad (3.2)$$

$$\widetilde{\mathbb{R}^3} = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \& \ z(x^2 + y^2) \neq 0\}. \quad (3.3)$$

**Определение.** Если прямая  $l$  и точка  $M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3}$  находятся в отношении, заданном рис. 4, то будем говорить, что точка  $M$  изображает прямую  $l$ .

Подчеркивая связь между  $M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3}$  и  $l \in \widetilde{\mathbb{K}}$ , для точки  $M(x, y, z)$  примем обозначение  $\tilde{l}(x, y, z)$ . Тогда (3.2) запишется в виде

$$\widetilde{\mathbb{K}} \ni l \leftrightarrow \tilde{l}(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.4)$$

Стандартная метрика координатного пространства  $\mathbb{R}^3$  индуцирует метрику в  $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ , а значит, и метрику в  $\widetilde{\mathbb{K}}$ . Именно, если  $l_1 \leftrightarrow \tilde{l}_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $l_2 \leftrightarrow \tilde{l}_2(x_2, y_2, z_2)$ , а расстояние между  $l_1$  и  $l_2$  обозначим  $d(l_1, l_2)$ , то

$$d(l_1, l_2) \triangleq d(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.4)$$

Таким образом,  $\widetilde{\mathbb{K}}$  есть метрическое пространство [13, с. 40].

#### 4. Конгруэнция нормалей параболоида вращения. Координатное представление

Конгруэнция нормалей параболоида есть 2-поверхность в области  $\bar{K}$ . Вывод уравнения (и параметрических уравнений этой поверхности) основан на следующих соображениях, поясняемых рис. 5. Уравнение параболоида (2.3) мы пишем, изменив обозначения координат, в виде

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2. \quad (4.1)$$

Неподвижный репер, на котором основаны построения пункта 3, мы строим, приняв за вершину репера вершину параболоида, ось  $Ox_3$  совмещаем с осью параболоида. Соответственно плоскость  $Ox_1x_2$  – касательная плоскость параболоида в его вершине.

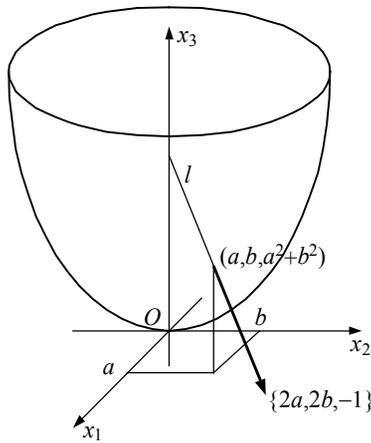


Рис. 5. Координаты нормали параболоида

Луч  $l$  нормальной конгруэнции пересекает параболоид в точке  $(a, b, a^2 + b^2)$ . Направляющим вектором для  $l$  служит вектор-градиент  $\{2a, 2b, -1\}$ . Параметрические уравнения данного луча имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = a + 2at, \\ x_2 = b + 2bt, \\ x_3 = a^2 + b^2 - t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Луч  $l$  пересекает плоскость  $Ox_1x_2$ . Соответствующее значение  $t$  равно

$$t_0 = a^2 + b^2. \quad (4.3)$$

Точка  $P$  пересечения луча  $l$  с указанной плоскостью имеет, согласно (4.2) и (4.3), координаты

$$P(a + 2a(a^2 + b^2), b + 2b(a^2 + b^2), 0). \quad (4.4)$$

Точка пересечения того же луча с осью  $Oz$  есть точка

$$\left(0, 0, a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (4.5)$$

Согласно пункту 3, координатами луча  $l$  являются первые две координаты точки  $P$  и последняя координата точки (4.5). Таким образом,

$$l\left(a + 2a(a^2 + b^2), b + 2b(a^2 + b^2), a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (4.6)$$

Точка  $\tilde{l}$ , изображающая этот луч, имеет, согласно пункту 3, те же координаты. Совокупность указанных точек заполняет поверхность  $\Sigma$ . Параметрические уравнения этой поверхности в декартовых переменных  $a, b$  и при замене их на полярные координаты  $\rho, \varphi$  имеют вид

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 = a + 2a(a^2 + b^2), \\ x_2 = b + 2b(a^2 + b^2), \\ x_3 = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \Sigma: \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi (1 + 2\rho^2), \\ x_2 = \rho \sin \varphi (1 + 2\rho^2), \\ x_3 = \rho^2 + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Параболоид задаем вектор-функцией

$$P = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho^2\}. \quad (4.7)$$

Построенное здесь изображение прямых специального линейного комплекса позволяют на одном рисунке изобразить и параболоид, и конгруэнцию его нормалей. Следует только учитывать, что каждая из точек может выступать в разных качествах. В одном контексте точка и есть точка, в другом она изображает прямую, принадлежащую  $\tilde{K}$ . Соответствующее изображение представлено на рис. 6.



Рис. 6. Кусок параболоида вращения (часть рисунка в центре) и изображение его нормальной конгруэнции в пространстве  $\mathbb{R}^3$

Отметим, что, исключая параметры из уравнений (4.7), получим уравнение поверхности, изображающей нормальную конгруэнцию параболоида в виде

$$\Sigma: x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_3^3 = 0. \quad (4.8)$$

Многочлен в левой части уравнения неприводим над полем вещественных чисел.

### 5. Операция соединения

Прямая  $l_1(x_1, y_1, z_1)$  есть точка в метрическом пространстве  $\tilde{K}$ . Если  $l_2(x_2, y_2, z_2)$  – вторая точка в  $\tilde{K}$ , то формально можно составить новую тройку чисел  $(x, y, z)$  по правилу

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y = (1-t)y_1 + ty_2, \quad z = (1-t)z_1 + tz_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.1)$$

Нет, однако, гарантии, что при всех допустимых значениях параметра  $t$  для тройки чисел  $(x, y, z)$  выполнено ограничение (3.3).

**Определение.** Две различные прямые  $l_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $l_2(x_2, y_2, z_2)$  из  $\tilde{K}$  называются *соединимыми*, если при любом  $t \in [0, 1]$  числа (5.1) удовлетворяют условиям (3.3).

Роль соединимых прямых в том, что для них формулы (5.1) суть параметрическое задание некоторого регулюса, содержащего эти прямые и принадлежащего  $\tilde{K}$ .

**Предложение 4.1.** Две скрещивающиеся нормали параболоида, из которых ни одна не совпадает с его осью, соединимы.

*Доказательство.* Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  суть скрещивающиеся прямые трехмерного евклидова пространства. Репер выбран так, как это показано на рис. 4. Тогда прямая  $l_1$  определена точкой  $P_1$  и точкой  $N_1$ , а прямая  $l_2$  определена точкой  $P_2$  и точкой  $N_2$ , причем

$$P_1 \neq O, \quad P_2 \neq O, \quad P_1 \neq P_2, \quad N_1 \neq N_2. \quad (5.2)$$

Заметим, что поскольку рассматриваемые нами прямые – нормали параболоида, то точки  $N_1$  и  $N_2$  имеют аппликаты одного знака. Не нарушая общности, можем считать, что точка  $N_1$  – внутренняя точка отрезка  $[ON_2]$ . Это позволяет направить вектор  $e_3$  коллинеарно им обоим, причем совместить его с вектором  $\overline{ON_1}$ .

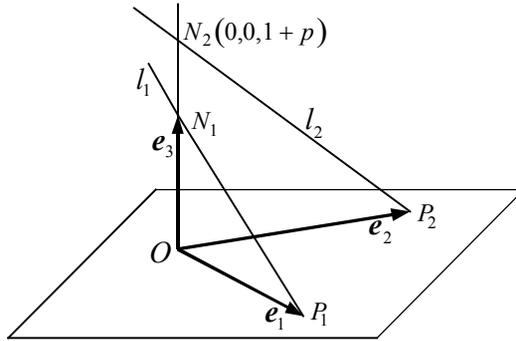


Рис. 7. Правило присвоения координат прямой, принадлежащей нормальной конгруэнции

Завершаем построение аффинного репера [2]  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$  следующим образом:

$$e_1 = \overline{OP_1}, \quad e_2 = \overline{OP_2}, \quad e_3 = \overline{ON_1}. \quad (5.3)$$

В таком репере, очевидно, интересующие нас точки имеют координаты

$$P_1(1, 0, 0), \quad P_2(0, 1, 0), \quad N_1(0, 0, 1), \quad N_2(0, 0, 1+p), \quad (5.4)$$

где  $p \in \mathbb{R}$ ,

$$p > 0. \quad (5.5)$$

Теперь, в соответствии с (3.1) и (5.4), можем написать

$$\tilde{l}_1(1, 0, 1), \quad \tilde{l}_2(0, 1, 1+p),$$

и соотношения (5.1) (в других обозначениях координат) принимают вид

$$\begin{cases} x_1 = 1-t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 1+tp. \end{cases} \quad (5.6)$$

Поскольку имеет место (5.5), то из (5.6) заключаем

$$(0 \leq t \leq 1) \Rightarrow x_3(x_1^2 + x_2^2) > 0,$$

что и доказывает предложение.

Геометрический смысл предложения в том, что пара прямых, принадлежащих нормальной конгруэнции, позволяет построить однопараметрическое семейство прямых в области  $\widetilde{K}$ . При этом числа  $x_1, x_2, x_3$  суть координаты переменной прямой указанного семейства (иначе говоря, переменной точки в  $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ ), а  $t$  – параметр семейства.

**Определение.** Построение по двум соединимым прямым  $l_1, l_2$  1-семейства прямых по формулам (5.1) называем *соединением* прямых  $l_1, l_2$ .

**Предложение 4.2.** Соединение прямых приводит к 1-семейству прямолинейных образующих гиперболического параболоида, причем соединяемые прямые принадлежат одной демиквадрике указанного гиперболического параболоида, а ось параболоида принадлежит второму семейству.

*Доказательство.* Обозначим текущую прямую  $l$ . Тогда

$$l(1-t, t, 1+tp). \quad (5.7)$$

На этой прямой отмечаем точку  $A$  в плоскости  $(O, e_1, e_2)$  репера и точку  $B$  на оси  $(O, e_3)$ . Тогда в  $\mathbb{R}^3$  имеем

$$A = (1-t, t, 0), \quad B = (0, 0, 1+tp). \quad (5.7)$$

Для текущей точки прямой  $(AB)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  радиус-вектор

$$\bar{M}(x_1, x_2, x_3) = (1-v)\bar{A} + v\bar{B}, \quad (5.8)$$

что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + v(t-1) = 0, \\ x_2 - vt = 0, \\ x_3 + (v-1)(1+tp) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Исключив параметры  $t, v$ , приходим к уравнению квадрики (обе части уравнения умножены на 2 ради удобства).

$$\begin{aligned} f \equiv 2x_3x_1 + 2x_3x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \\ - 2x_2p + 2x_2px_1 + 2x_2^2p = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ради удобства же переходим к однородным координатам  $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ , как это сделано в [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \equiv 2x_3x_1 + 2x_3x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \\ - 2x_2x_4p + 2x_2px_1 + 2x_2^2p. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Матрица квадратичной формы (5.11) имеет вид

$$W = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 2+p & 1 & -1 \\ 2+p & 2+2p & 1 & -1-p \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-p & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (5.12)$$

Квадрика невырожденная, поскольку

$$\det(W) = p^2 \neq 0. \quad (5.13)$$

Матрица квадратичной формы, содержащейся в (4.10), есть матрица

$$w = \begin{vmatrix} 2 & 2+p & 1 \\ 2+p & 2+2p & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Её главные угловые миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = -p^2 < 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Мы получили кусок гиперболического параболоида, для которого прямые  $l_1$  и  $l_2$  входят в одну из демиквадрик.

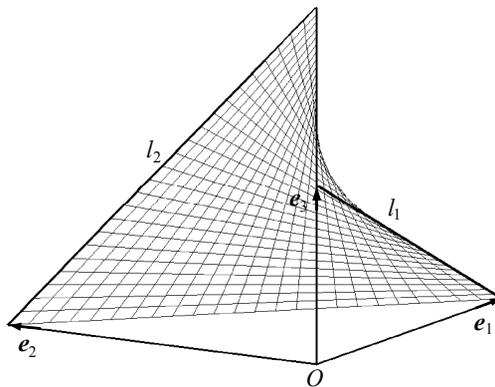


Рис. 8. Кусок гиперболического параболоида, полученного соединением прямых  $l_1$  и  $l_2$

Ясно, что ось аппликат входит в другую демиквадрику того же гиперболического параболоида.

**Определение.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  будем называть опорными прямыми гиперболического параболоида (5.10).

## 6. Отклонение демиквадрики от нормальной конгруэнции

Как уже было заявлено, наша цель – соединить точки параболоида линией  $L$ , локально близкой к геодезической линии. Мы не располагаем возможностью придать этой фразе уточняющий смысл, приводящий к корректной геометрической задаче. Самое большее, что нам доступно (сейчас, по крайней мере) – это предложить способ построения такой линии и получить разумную оценку качества избранного пути. Следует отметить, что построения в данном пункте носят «разведывательный» характер. Их цель – убедиться в оправданности нашего способа действий в принципе, чтобы иметь основу для более точной постановки задачи в следующей публикации, имея в виду практическое применение полученных результатов.

Пусть требуется соединить точки  $A_1$  и  $A_2$  параболоида вращения линией  $L$ . Нормали  $l_1$  и  $l_2$  в соответствующих точках используем в качестве опорных прямых гиперболического параболоида. В качестве линии  $L$  используем линию пересече-

чения соответствующего куска гиперболического параболоида с параболоидом вращения. Точки же  $\tilde{l}_1$  и  $\tilde{l}_2$  области  $\widehat{\mathbb{R}^3}$  при этом соединяются некоторым отрезком прямой в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Цель данного пункта – оценить меру отклонения точек указанного отрезка от поверхности  $\Sigma$ , изображающей нормальную конгруэнцию  $\mathfrak{S}$  параболоида.

Пусть по (4.6) точки  $\tilde{l}_1$  и  $\tilde{l}_2$  имеют координаты

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 & \left( a_1 + 2(a_1^2 + b_1^2)a_1, b_1 + 2(a_1^2 + b_1^2)b_1, \frac{1}{2} + a_1^2 + b_1^2 \right), \\ \tilde{l}_2 & \left( a_2 + 2(a_2^2 + b_2^2)a_2, b_2 + 2(a_2^2 + b_2^2)b_2, \frac{1}{2} + a_2^2 + b_2^2 \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Текущая точка отрезка  $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$  имеет в  $\mathbb{R}^3$  радиус-вектор

$$R = (1-t)\tilde{l}_1 + t\tilde{l}_2, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (6.2)$$

Как это часто делается, отождествляем в  $\mathbb{R}^3$  точку и её радиус-вектор. Поверхность  $\Sigma$ , согласно (4.7), задаем радиус-вектором

$$W = \left\{ r \cos(T)(1+2r^2), r \sin(T)(1+2r^2), \frac{1}{2} + r^2 \right\}, \quad (0 < r \leq 1, 0 < T \leq 2\pi). \quad (6.3)$$

Квадрат расстояния от текущей точки отрезка  $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$  до текущей точки поверхности  $\Sigma$  равен

$$f = \sum_{i=1}^3 (R_i - W_i)^2; \quad (6.4)$$

$f$  есть функция семи аргументов и чрезмерно сложна для анализа. Её можно табулировать, но и для таблицы число входов слишком велико. Их количество поддается уменьшению. На плоскости параметров  $(a, b)$  отметим точки  $E_1(a_1, b_1), E_2(a_2, b_2)$ . На той же плоскости введем полярную систему координат  $(O, \vec{m})$  таким образом, что точка  $O$  совпадает с вершиной декартова репера, а полярная ось  $\vec{m}$  делит пополам угол  $E_1OE_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_1 & = u_1 \cos v, \quad b_1 = u_1 \sin v, \quad a_2 = u_2 \cos v, \quad b_2 = -u_2 \sin v, \\ 0 & \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq u_2 \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Число параметров уменьшено на 1 (вместо двух независимых полярных углов – один), и это не повлияло на общность построений. Следующий шаг уменьшения числа параметров, однако, вносит некоторое ограничение (на наш взгляд, не принципиальное). Именно, полагаем

$$u_2 = 1 - u_1. \quad (6.6)$$

Теперь (6.2) принимает вид

$$\begin{aligned} R & = \left\{ -\cos v(-u_1 - 2u_1^3 + 8tu_1 + 4tu_1^3 - 3t - 6tu_1^2), \right. \\ & \left. -\sin v(-u_1 - 2u_1^3 + 3t - 6tu_1 + 6tu_1^2), \frac{1}{2} + u_1^2 + t - 2tu_1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

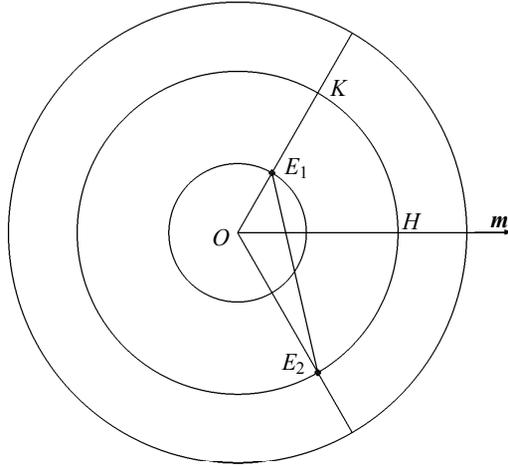


Рис. 9. Точки  $E_1$  и  $E_2$  на полярной плоскости.  
 $\angle HOK = v$ ,  $\angle HOE_2 = -v$ ,  $|OE_1| = u_1$ ,  $|OE_2| = 1 - u_1$

Зафиксируем параметры, от которых зависит положение точки  $R$ , то есть  $u_1, v, t$ . Тогда значение функции  $f$  определяется значениями параметров  $r$  и  $T$ . Стационарные значения этой функции достигаются при тех значениях указанных параметров, при которых выполнены равенства

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = 0. \quad (6.8)$$

Априори нет гарантий, что стационарные значения и есть наименьшие. Однако истинные экстремумы во всяком случае не больше стационарных значений, так что верхние оценки наименьших значений функции  $f$  мы, во всяком случае, получим.

Уравнения (6.8) в развернутой записи чрезвычайно громоздки, и здесь не приведены. Поскольку мы организуем исследование по табличному образцу, то дело сведется к численному решению систем уравнений, пусть и очень сложных. Следует учесть, что Maple – не идеальная система компьютерной алгебры и вполне способна допускать сбои при решении уравнений с тригонометрическими функциями. Поэтому после вычисления производных, входящих в (6.8), заменяем тригонометрические функции параметра  $T$ :

$$\cos T = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad \sin T = \frac{2w}{1 + w^2}.$$

Результаты вычислений оформлены в виде серии таблиц. При этом параметр  $t$  принимает значения  $\frac{i}{m}$ , угол  $v$  принимает значения  $\frac{j\pi}{4m}$ , где  $i = 0, \dots, m$ ;  $j = 0, \dots, m$ , и  $m$  – число градаций для соответствующего промежутка.

С целью избежать чрезмерного размера текста, принято  $m = 4$ . Кроме того, значения, по модулю не превосходящие  $10^{-100}$ , автор отождествлял с нулем.

Верхние оценки минимальных значений функции  $f$   
при различных значениях параметров  $u_1, t, v$

$u_1 = 0.1$		
Параметр $t$	Угол $v$	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000033
0.500000	0.000000	0.000499
0.750000	0.000000	0.000362
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	0.000014
0.500000	0.196350	0.000443
0.750000	0.196350	0.000340
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	$0.334106 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.392699	0.000302
0.750000	0.392699	0.000279
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.000110
0.500000	0.589049	0.000139
0.750000	0.589049	0.000199
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.000449
0.500000	0.785398	0.000026
0.750000	0.785398	0.000122
1.000000	0.785398	0.000000

$u_1 = 0.2$		
Параметр $t$	Угол $v$	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000039
0.500000	0.000000	0.000208
0.750000	0.000000	0.000145
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	$0.759231 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.196350	0.000139
0.750000	0.196350	0.000115
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.000025
0.500000	0.392699	0.000018
0.750000	0.392699	0.000048
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.000555
0.500000	0.589049	0.000057
0.750000	0.589049	$0.142069 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.001974
0.500000	0.785398	0.000485
0.750000	0.785398	0.000032
1.000000	0.785398	0.000000

Продолжение таблицы

$u_1 = 0.3$		
Параметр $t$	Угол $v$	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000016
0.500000	0.000000	0.000049
0.750000	0.000000	0.000033
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	$0.165869 \cdot 10^{-6}$
0.500000	0.196350	$0.930863 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.196350	0.000013
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.000177
0.500000	0.392699	0.000072
0.750000	0.392699	$0.738750 \cdot 10^{-5}$

$u_1 = 0.4$		
Параметр $t$	Угол $v$	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	$0.151372 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.000000	$0.335241 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.000000	$0.212844 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	0.000011
0.500000	0.196350	$0.981345 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.196350	$0.279079 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.00027
0.500000	0.392699	0.000317
0.750000	0.392699	0.000116

Окончание таблицы

$u_1 = 0.3$		
Параметр $t$	Угол $\nu$	Верхняя оценка минимума отклонения
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.001174
0.500000	0.589049	0.000715
0.750000	0.589049	0.000152
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.003879
0.500000	0.785398	0.002505
0.750000	0.785398	0.000579
1.000000	0.785398	0.000000

$u_1 = 0.4$		
Параметр $t$	Угол $\nu$	Верхняя оценка минимума отклонения
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.001466
0.500000	0.589049	0.001727
0.750000	0.589049	0.000624
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.004517
0.500000	0.785398	0.005343
0.750000	0.785398	0.001825
1.000000	0.785398	0.000000

### 7. Заключение

Заключение носит предварительный характер. Предстоит решить следующие задачи. Для линии пересечения демиквадрики с параболоидом построить 1-семейство главных нормалей и вычислить меру отклонения их от нормалей параболоида в соответствующих точках. Наконец, построить процедуру, позволяющую отнести указанную линию к натуральному параметру. Решение этих задач – в следующих публикациях.

### 8. Исправление

В статью [14] по недосмотру одного из авторов вкралось досадное недоразумение. На стр. 9 после рис. 4 уравнение линии должно иметь вид

$$Y = 0.00003281 + 0.022860 X + 0.00017870 X^2 - 0.0021397 X^3 + \\ + 0.00006064 X^4 + 0.0000041634 X^5.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956. 250 с.
2. *Щербаков Р.Н.* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960. 194 с.
3. *Щербаков Р.Н., Лучинин А.А.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Томск: ТГУ, 1974. 250 с.
4. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
5. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960. 559 с.
6. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 528 с.
7. *Кованцов Н.И.* Теория комплексов. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1963. 292 с.
8. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
9. *Фиников С.П.* Теория пар конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1956. 443 с.
10. *Зейлигер Д.Н.* Комплексная линейчатая геометрия. Л.-М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. 195 с.
11. *Фиников С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, ГИТТЛ, 1937. 263 с.
12. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: МГУ, 1960. 307 с.
13. *Шварц Лоран.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972. 824 с.

14. Бухтыак М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 5–14.

Статья поступила 12.07.2015 г.

*Bukhtyak M.S.* NORMAL CONGRUENCE OF PARABOLOID. DEMIQUADRICS

DOI 10.17223/19988621/37/1

It is an important problem to build a family of lines on the paraboloid of rotation with certain properties convenient for metallic mesh tailoring upon designing and manufacturing a parabolic antenna. Namely, the lines of this family should be locally close to geodesic lines to a reasonable extent, and an algorithm relating the line of this family to the natural parameter is also necessary. The first and important step has been made in solving the problem: a class of surfaces whose intersection with the paraboloid generates a class of lines promising for the achievement of the declared goals is revealed. These surfaces are demiquadratics associated in a special way with the normal congruence of the paraboloid.

Keywords: paraboloid, antenna, geodesic line, normal congruence, demiquadratics.

*БУХТЫАК Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

#### REFERENCES

1. de Ram Zh. *Differentsiruemye mnogoobraziya*. Moscow, IL Publ., 1956. 250 p. (in Russian)
2. Shcherbakov R.N. *Kurs affinnoy i proektivnoy differentsial'noy geometrii*. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 1960. 194 p. (in Russian)
3. Shcherbakov R.N., Luchinin A.A. *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii*. Tomsk, TGU Publ., 1974. 250 p. (in Russian)
4. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 428 p. (in Russian)
5. Favar Zh. *Kurs lokal'noy differentsial'noy geometrii*. Moscow, IL Publ., 1960. 559 p. (in Russian)
6. Finikov S.P. *Teoriya kongruentsiy*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 528 p. (in Russian)
7. Kovantsov N.I. *Teoriya kompleksov*. Kiev, Izd-vo Kiev. un-ta, 1963. 292 p. (in Russian)
8. Kleyn F. *Vysshaya geometriya*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 400 p. (in Russian)
9. Finikov S.P. *Teoriya par kongruentsiy*. Moscow, GITTL Publ., 1956. 443 p. (in Russian)
10. Zeyliger D.N. *Kompleksnaya lineychataya geometriya*. Leningrad, Moscow, ONTI GTTI Publ., 1934. 195 p. (in Russian)
11. Finikov S.P. *Proektivno-differentsial'naya geometriya*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP, GTTL, 1937. 263 p. (in Russian)
12. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere*. Moscow, MGU Publ., 1960. 307 p. (in Russian)
13. Shvarts Loran. *Analiz*. Moscow, Mir Publ., 1972, vol. 2, 824 p. (in Russian)
14. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 5–14. (in Russian)