ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика и механика № 5(37)

УДК 519.6 DOI 10.17223/19988621/37/2

Ю.Н. Захаров, В.Н. Крутиков, Я.Н. Вершинин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ[1]

Исследована возможность решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса многошаговыми итерационными методами минимизации, обладающими свойствами метода сопряженных градиентов. Использовались метод сопряженных градиентов и многошаговый релаксационный субградиентый метод.

Ключевые слова: *уравнение Навье – Стокса*, *метод оптимизации*, *многошаговый метод минимизации*, *субградиентный метод*, *метод сопряженных градиентов.*

Существуют два подхода численного решения стационарных задач для системы уравнений Навье – Стокса, описывающей движение вязкой однородной несжимаемой жидкости. Один, и он наиболее часто используемый, сводится к решению каким-либо приближённым методом нестационарной задачи для системы уравнений Навье – Стокса и получение в пределе установившегося решения. Другой, менее популярный метод, заключается в построении системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) с помощью какой-либо аппроксимации решаемой стационарной задачи, а затем полученная система решается итерационными методами. Обзор обоих подходов можно найти в [1]. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. Главными достоинствами второго подхода к решению стационарных задач являются: 1) при сходимости итерационного процесса автоматически выполняется условие несжимаемости ($\operatorname{div} u = 0$), 2) можно использовать сложно реализуемые обычным способом краевые условия (см. [2–4]); 3) такой способ решения стационарных задач не зависит от способа замены стационарной системы уравнений Навье – Стокса на СНАУ. Недостатки данного подхода связаны с тем фактом, что итерационные методы решения СНАУ для своей сходимости требуют ограничений на нелинейные операторы системы и начальное приближение, что существенно ограничивает возможность применение этого метода решения стационарных задач (см. [5–7]). В работах [1, 8–12] был рассмотрен итерационный метод неполной аппроксимации решения разностных задач аппроксимирующих различные стационарные задачи для системы уравнений Навье – Стокса, основанный на минимизации нормы невязки, который оказался достаточно эффективным при их решении.

Для минимизации нормы невязки можно использовать методы оптимизации (МО), которые применяются для поиска минимумов многомерных функций. В настоящей работе рассматривается возможность решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса итерационными методами минимизации [13–23], которые обладают свойствами метода сопряженных градиентов на квадратичных функциях [13].

[1] Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания № 1.630.2014/К.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в ограниченной области Ω следующую стационарную задачу:

$$\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}+\nabla p=\nu\cdot\Delta\vec{u}\ ; \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\vec{u}=0\ ; \qquad (2)$$

$$l(\vec{u})=0, \qquad (3)$$

где Γ граница Ω, $\vec{u}$ – двухмерный или трехмерный вектор скоростей, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, $l(\vec{u})$ – некоторые краевые условия. В дальнейшем считаем, что задача (1) – (3) поставлена корректно.

Для решения задачи (1) – (3) будем использовать метод сеток (хотя все дальнейшие выкладки и выводы справедливы и для других численных методов решения задачи (1) – (3)), который заключается в построении сетки в области Ω и замене слагаемых в (1) разностными соотношениями (см. [21–23]). В итоге получаем, с учетом краевых условий (3), систему нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), размерность которой пропорциональна числу точек в $\Omega\cup\Gamma$, в которых необходимо вычислять скорость и давление. Таким образом, не углубляясь в методы замены задачи (1) – (3) СНАУ, в итоге имеем систему вида (более подробно смотри [1])

$$A(u,u)=f, \qquad (4)$$

где $u\in R^m\, A(u,u)=A_1(u,u)+A_2u,\quad A_1(u,u)$ – билинейное отображение, A_2 – линейный оператор в векторном пространстве E_m компонент вектора скоростей и давления.

Один из подходов решения систем нелинейных уравнений (4), аппроксимирующих уравнения гидродинамики (1) – (3), состоит в сведении задачи решения системы уравнений

$$r_i(u)=(A(u,u)-f)_i=0,\ \ i=1,2,...,m,\ \ u\in R^m\ , \qquad (5)$$

к задаче минимизации нормы невязки (см. [1])

$$\|r\|^2=f(u)=\sum_{i=1}^{m}r_i^2(u),\ \ u\in R^m\,. \qquad (6)$$

Здесь m – размерность задачи.

Развитые в [1] итерационные методы решения системы (4) основываются на специально разработанных схемах построения сопряженных направлений для задачи минимизации (6) и дают надежду на возможность использования специализированных методов оптимизации. В работе исследуется возможность решения систем уравнений гидродинамики (1) методами минимизации, использующими значения функции $f(u)$ и градиента $\nabla f(u)$. В отличие от специализированных методов, где кроме функции и градиента используется дополнительная информация в виде матриц, при использовании МО сокращается время подготовки задачи для счета. При использовании МО несложно наложить на решение дополнительные ограничения, например в виде функционалов регуляризации, которые трансформируются в дополнительные изменения вида функции $f(u)$ (6). Другой важный фактор актуальности использования МО состоит в том, что их применение не наталкивается на ограничения характеристик функции, накладываемые итерационным процессом, например, на ограничения свойств матриц линеаризации уравнений (5) или гессиана (6). С другой стороны, поскольку при нелинейности уравнений (5) для МО не существует доказательства их сходимости к требуемому решению и оценок их скорости сходимости, то эти вопросы следует изучать на основании вычислительного опыта.

С учетом эффективности существующих универсальных МО градиентного типа, ограничимся исследованием возможности использования применительно к задаче (6) релаксационных методов, которые при определенных условиях на квадратичных функциях обладают свойствами метода сопряженных градиентов (МСГ) [13, 14]. Свойства МСГ следующие: 1) на квадратичных функциях последовательные направления спуска в МСГ являются сопряженными векторами, что обеспечивает конечное окончание процесса за число итераций, не превосходящее размерность задачи m [16], при этом генерация последовательности не требует хранения всей системы сопряженных векторов; 2) на гладких функциях, в силу справедливости квадратичного представления функции в некоторой локальной окрестности точки, свойство конечной сходимости метода на квадратичных функциях существенно влияет на увеличение скорости сходимости метода минимизации.

Свойством генерации последовательности сопряженных направлений обладают следующие классы методов: 1) методы сопряженных градиентов [13, 14]; 2) квазиньютоновские методы [16, 17]; 3) многошаговые релаксационные субградиентные методы [24–29]; 4) релаксационные субградиентые методы с растяжением пространства [16–20]. Методы классов 1 и 2 основаны на квадратичной модели функции [13, 14], а алгоритмы классов 3 и 4 организованы по типу ε-субградиентных методов [15]. В методах классов 1 и 3 требуемая память для хранения промежуточной информации и вычислительные затраты на итерации пропорциональны размерности пространства m. В методах классов 2 и 4 аналогичные затраты пропорциональны m^2, что ограничивает их применение в задачах высокой размерности.

На предварительном этапе отбора методов при малых размерностях численно исследовались алгоритмы классов 2 и 4: квазиньютоновский метод, основанный на формуле BFGS [14] и субградиентный метод с растяжением – сжатием пространства [18]. Перечисленные алгоритмы по затратам вычислений функции и градиента минимизируемой функции на порядок превосходят используемые методы классов 1 и 3. В силу их неприменимости в задачах высокой размерности для решения поставленных задач использовались только методы классов 1 и 3.

2. Используемые методы оптимизации

Для решения задачи минимизации (6) было выбрано два метода, описание которых приведено ниже.

1. **Общая схема релаксационного процесса минимизации.** Итерация рассматриваемых в работе релаксационных МО с точным одномерным спуском имеет вид

$$u^{n+1} = u^n - \alpha_n s^n, \quad \alpha_n = \arg\min_{\alpha \ge 0} f\left(u^n - \alpha s^n\right), \quad n = 0,1,..., \tag{7}$$

где задается начальная точка u^0, а s^n – градиентно-согласованное направление спуска, т.е. $(\nabla f(u^n), s^n) > 0$.

2. **Метод сопряжённых градиентов.** В методах сопряженных градиентов (МСГ) направление спуска вычисляется по правилу

$$s^0 = g^0, \quad s^n = g^n + \beta_n s^{n-1}, n = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

где параметр $\beta_n = 0$ при n кратном m, а при n не кратном m вычисляется по одной из формул [10, 11]:

$$\text{а) } \beta_n = -\frac{(g^n, y^{n-1})}{(y^{n-1}, s^{n-1})}; \quad \text{б) } \beta_n = \frac{(g^n, y^{n-1})}{(g^{n-1}, g^{n-1})}; \quad \text{в) } \beta_n = \frac{(g^n, g^n)}{(g^{n-1}, g^{n-1})}. \tag{9}$$

Здесь принято обозначение $g^n = \nabla f(u^n)$, $y^{n-1} = \nabla f(u^n) - \nabla f(u^{n-1})$. Схемы МСГ в соответствии с (9) будем обозначать МСГа, МСГб и МСГв.

3. **Многошаговый релаксационный субградиентый метод** [21, 22]. Как отмечено в [14], зачастую метод сопряженных градиентов является единственным универсальным средством решения большеразмерных задач. К недостаткам метода следует отнести необходимость высокой точности одномерного спуска и быстрое накопление погрешностей в вычислении сопряженных направлений даже в случае квадратичных функций (см. [13, 14]). По этой причине в работе для решения гладких задач минимизации использован релаксационный субградиентый метод [21, 22], менее требовательный к точности одномерного спуска. Направление спуска этого алгоритма формируется по схеме [22]

$$s^0 = \frac{g^0}{(g^0, g^0)}, \quad s^n = s^{n-1} + \frac{1 - \left(s^{n-1}, g^n\right)}{\left(p^n, g^n\right)} p^n, \ n = 1, 2, \dots; \tag{10}$$

$$p^n = \begin{cases} g^n, & \textit{если } (g^n, g^{n-1}) \ge 0, \\ g^n - \dfrac{(g^n, g^{n-1})}{\left\| g^{n-1} \right\|^2} g^{n-1}, & \textit{если } (g^n, g^{n-1}) < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $g^n = \nabla f(u^n)$.

Алгоритм (7), (10), (11) [22] (назовем его МРСМ) предложен в [22] для минимизации негладких функций и является упрощением алгоритма из [21]. На квадратичных функциях он генерирует последовательность приближений минимума, идентичную последовательности, генерируемой алгоритмами МСГ. Алгоритм МРСМ хорошо зарекомендовал себя при решении негладких задач высокой размерности. В работе [20] приводятся результаты решения этим методом регуляризованной задачи линейного программирования высокой размерности с двухсторонними ограничениями.

Отличия использованных алгоритмов существенно. В МРСМ используется менее точный одномерный поиск, нежели в МСГ. При обмене процедурами одномерной минимизации эффективность обоих методов резко снижается. Субградиентный метод МРСМ использует технику выбора направления спуска, согласованного с направлениями субградиента некоторой окрестности, что обеспечивает выход метода из этой окрестности с одновременным уменьшением минимизируемой функции [15]. Низкая точность одномерного поиска для субградиентных методов более предпочтительна, поскольку обеспечивает охват и последующий выход из более широкой окрестности.

В реализациях методов МСГа, МСГб, МСГв и МРСМ использовался одномерный поиск с кубической интерполяцией, точность поиска минимума которого настроена так, чтобы минимизировать количество вычислений функции и градиента, необходимых для реализации метода.

3. Результаты численных расчётов

Прежде чем обсуждать представляемые результаты расчетов, следует отметить, что полученные нами решения, как в двухмерном, так и в трехмерном случаях, сравнивались с решениями, полученными другими авторами (см. [1, 27 – 32] и цитируемую там литературу). Это сопоставление показало, что наши результаты качественно и количественно совпадают с известными расчетами.

Для проверки возможности численного решения стационарных задач для системы уравнений (1) – (3) методами оптимизации решались следующие типичные и хорошо известные краевые задачи (см. [1]).

В дальнейшем двумерный вектор скорости имеет вид $\overline{u}=(u,v)$, а трехмерный – $\overline{u}=(u,v,w)$.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. Задача Дирихле для одномерного уравнения Бюргерса:

$$u\frac{du}{dx}=\nu\frac{du}{dx^2}+l(x)\,,\ x\in(a,b)\,, \tag{13}$$

$$u(a)=\varphi_1,\quad u(b)=\varphi_2\ ,$$

где φ_1, φ_2 – заданные постоянные, $l(x)$ – известная функция.

Задача 2. Двумерное течение в прямоугольном канале (рис. 1).

Задача 3. Двумерное течение в канале с уступом (рис. 2).

Задача 4. Двумерное течение в квадратной каверне (рис. 6).

Задача 5. Трехмерное течение в единичной кубической каверне (рис. 10).

В области решения введём равномерную согласованную с границей сетку, на которой аппроксимируем задачи 1 – 5 со вторым порядком. Для решения полученных разностных задач, являющихся системами нелинейных уравнений (4), использовались следующие алгоритмы минимизации МСГа и МРСМ (см. п.2). Функция и градиент во всех методах вычислялись одновременно. Останов алгоритма осуществлялся при достижении требуемой точности ε по правилу $f^n=f(u^n)\le\varepsilon$.

При решении отмеченных стационарных задач для системы уравнений (1) – (3) оказалось, что методы сопряженных градиентов МСГа, МСГб и МСГв практически эквивалентны. Поэтому приводим результаты только для метода МСГа.

В таблицах указаны размерность *m*, параметры используемых сеток, точность ε, число итераций (It), количество вычислений функции и градиента (Nfg), необходимые для достижения заданной точности ε. Сравнение методов будем проводить на основе величины Nfg, так как одно вычисление Nfg превосходит по вычислительной ёмкости алгоритмические затраты метода на одну итерацию в итерационных методах решения СНАУ.

Далее на всех рисунках приведены полученные линии тока, а в таблицах значения количества итераций, вычислений правых частей и градиента.

В табл. 1 приведены результаты расчетов задачи Дирихле для разностной задачи

$$u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \nu \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$u_0 = A, \quad u_m = B, \quad h = \frac{(b-a)}{m},$$

аппроксимирующей (13).

Здесь правая часть и постоянные A, B заданы так, чтобы решение задачи (13) имело вид $\sin(\pi x)$

Таблица 1

Одномерные уравнения Бюргерса ν = 0.001

Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
$m = 500$, $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	40570 68000	59659 119421
$m = 1000$, $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	358411 592019	578891 1158354

На рис. 1 и в табл. 2 приведено решение **задачи 2**

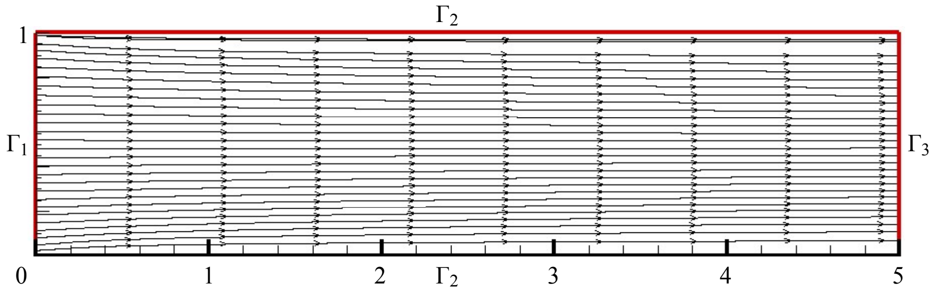

Рис. 1. Канал $\nu = 0.001$, $\vec{u}\big|_{\Gamma_2} = 0$, $u\big|_{\Gamma_1} = 1$, $v\big|_{\Gamma_1} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_3} = 0$, $v\big|_{\Gamma_3} = 0$;

Nx=100, Ny=500, h=0.01

Таблица 2

Двумерный канал ν =0.001

Nx, Ny	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
$Nx = 30$ $Ny = 150$	$m = 13323$ $\varepsilon = 10^{-18}$	It Nfg	4692 8442	4582 9321
$Nx = 50$ $Ny = 250$	$m = 37203$ $\varepsilon = 10^{-12}$	It Nfg	9871 16668	7808 15885

В табл. 3 и на рис. 2 – 5 приведены результаты решения **задачи 3.**

В табл. 4 и рис. 6 – 9 приведены результаты решения **задачи 4.**

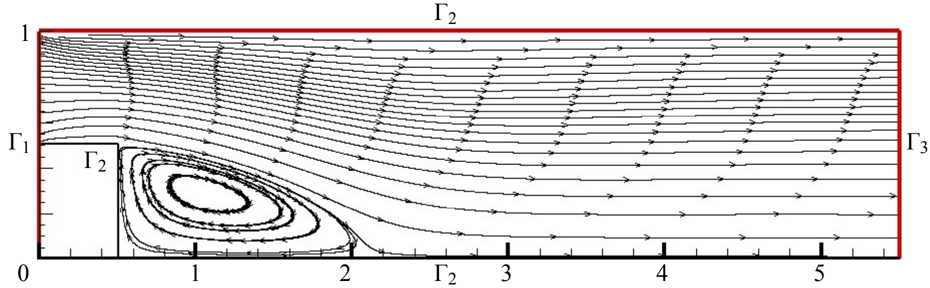

Рис. 2. Канал с уступом, ν = 0.008. $\vec{u}\big|_{\Gamma_2} = 0$, $u\big|_{\Gamma_1} = 1$, $v\big|_{\Gamma_1} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_3} = 0$, $v\big|_{\Gamma_3} = 0$; $h = 0.01$ ($Nx = 550$, $Ny = 100$)

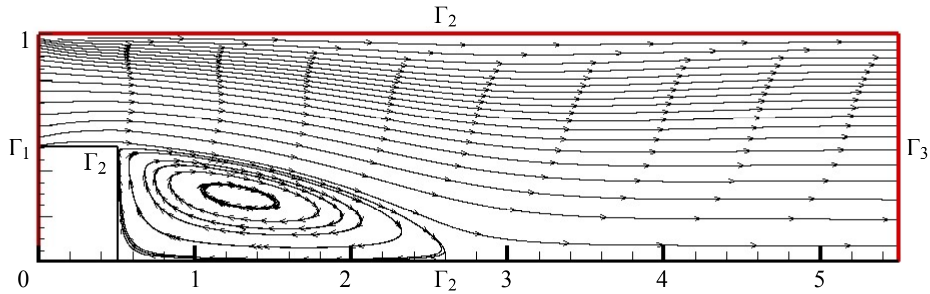

Рис. 3. Канал с уступом, ν = 0.005, $h = 0.01$

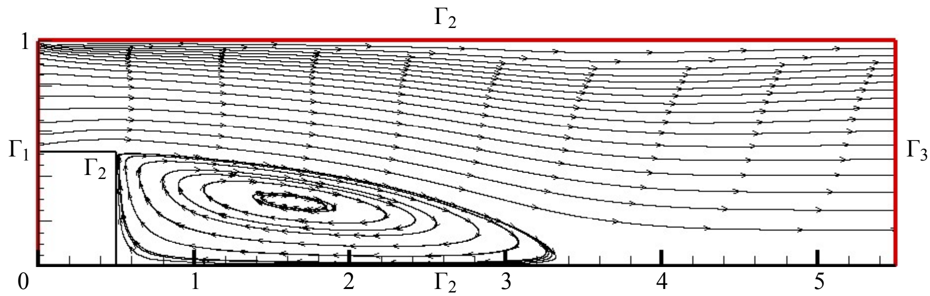

Рис. 4. Канал с уступом, ν = 0.003, $h = 0.01$

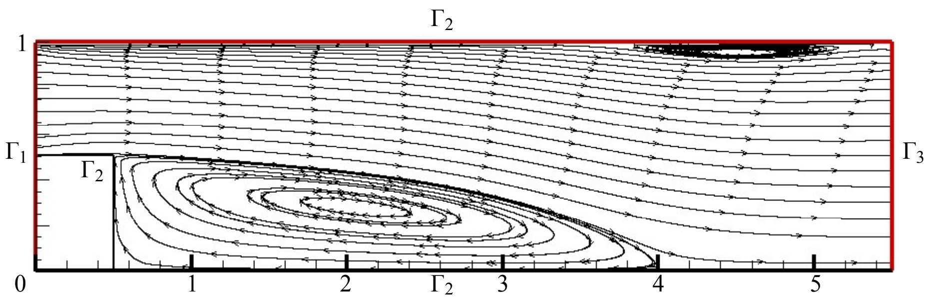

Рис. 5. Канал с уступом, ν = 0.002, $h = 0.01$

Таблица 3

Двумерный канал с уступом

ν	*Nx*, *Ny*	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
0.002	$Nx = 30$ $Ny = 165$	$m = 14012$ $\varepsilon = 2.6\cdot10^{-4}$	It Nfg	9000 15304	8400 16892
	$Nx = 50$ $Ny = 275$	$m = 39102$ $\varepsilon = 3.5\cdot10^{-4}$	It Nfg	10001 17690	9600 19354
0.002	$Nx = 100$ $Ny = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 3.080\cdot10^{-4}$	It Nfg	10800 19870	10400 21110
0.003	$Nx = 100$ $Ny = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 4.679\cdot10^{-4}$	It Nfg	7800 15495	7500 15300
0.005	$Nx = 100$ $Ny = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 6.6958\cdot10^{-4}$	It Nfg	8500 16437	8300 16855
0.008	$Nx = 100$ $Ny = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 7.4679\cdot10^{-4}$	It Nfg	9600 17709	9400 18957

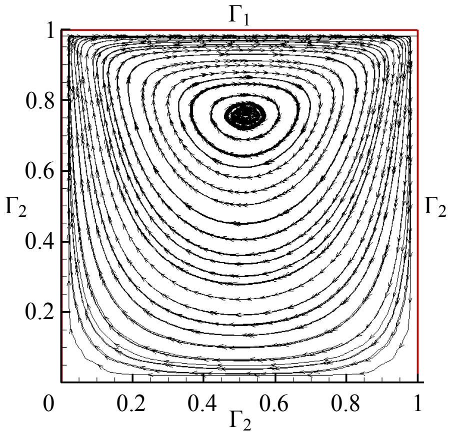

Рис. 6. Двумерная каверна ν = 0.1.
$\vec{u}\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \ u\big|_{\Gamma_1} = 1,\ \ v\big|_{\Gamma_1} = 0;\ \ Nx = Ny = 50,\ h = 0.02$

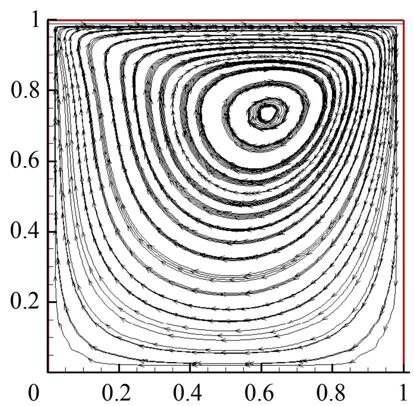

Рис. 7. Двумерная каверна ν = 0.01.
$Nx = Ny = 50,\ h = 0$

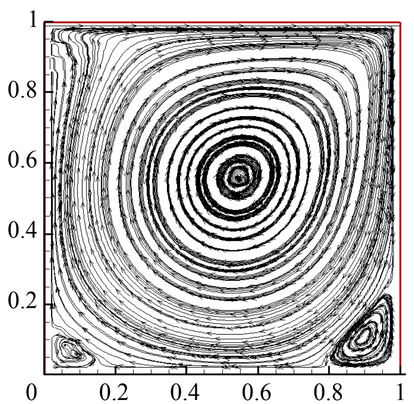

Рис. 8. Двумерная каверна, ν = 0.001.
$Nx = Ny = 50,\ h = 0.02$

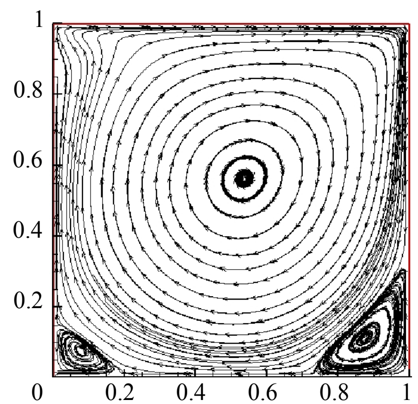

Рис. 9. Двумерная каверна, ν = 0.001.
$Nx = Ny = 100,\ h = 0.01$

Таблица 4

Двумерная каверна ν = 0.001

Nx, *Ny*	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
$Nx = Ny = 50$	$m = 7403$ $\varepsilon = 10^{-17}$	It Nfg	14275 23566	12252 24508
$Nx = Ny =$ 100	$m = 29803$ $\varepsilon = 10^{-19}$	It Nfg	35573 56372	35384 70780

В табл. 5 и на рис. 10 – 12 приведены результаты решения **задачи 5** с коэффициентом вязкости $\nu = 0.01$. На рис. 10 – 12 $Nx = Ny = Nz = 50$, $h = 0.02$.

Таблица 5

Трехмерная каверна, ν = 0.01

$Nx = Ny = Nz$	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
10	$m = 3518$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	455 805	413 834
20	$m = 29838$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	1500 2717	1350 2744
30	$m = 102958$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	3671 6726	3267 7351
40	$m = 246878$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	8887 16145	8658 17457
50	$m = 485598$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	19352 33920	19052 38307

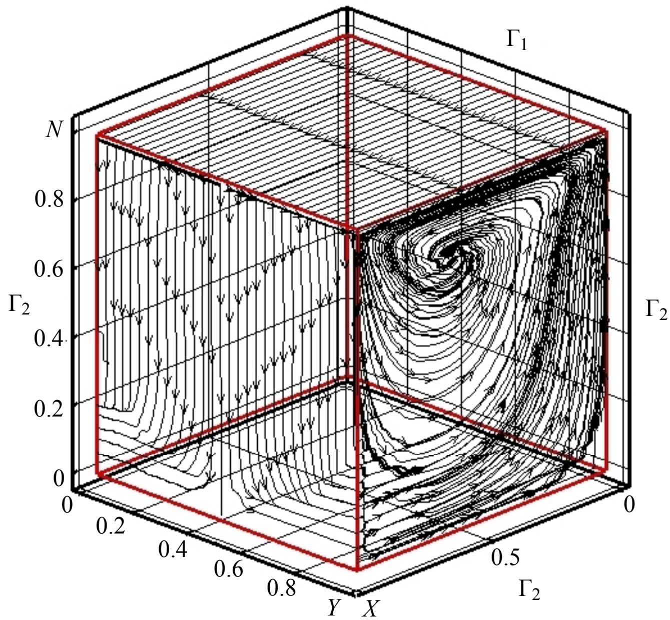

Рис. 10. Трёхмерная каверна. $\vec{u}\big|_{\Gamma_2} = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = 1,\ v\big|_{\Gamma_1} = w\big|_{\Gamma_1} = 0;$

Растекание по передней, правой и верхней стенкам

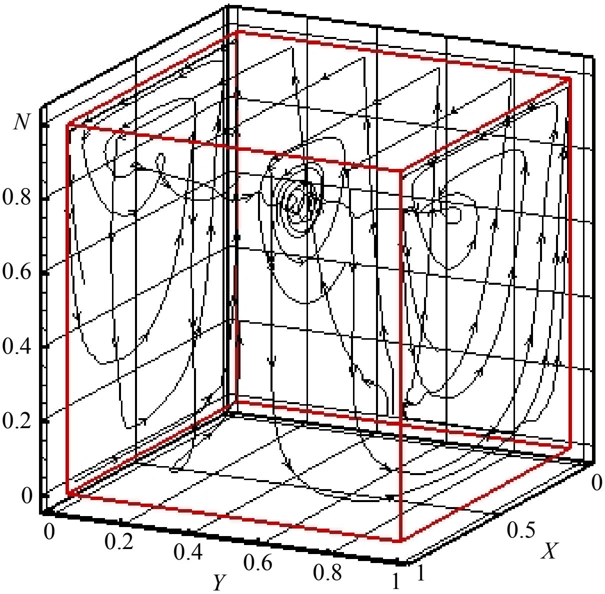

Рис. 11. Трёхмерная каверна. Течение внутри области

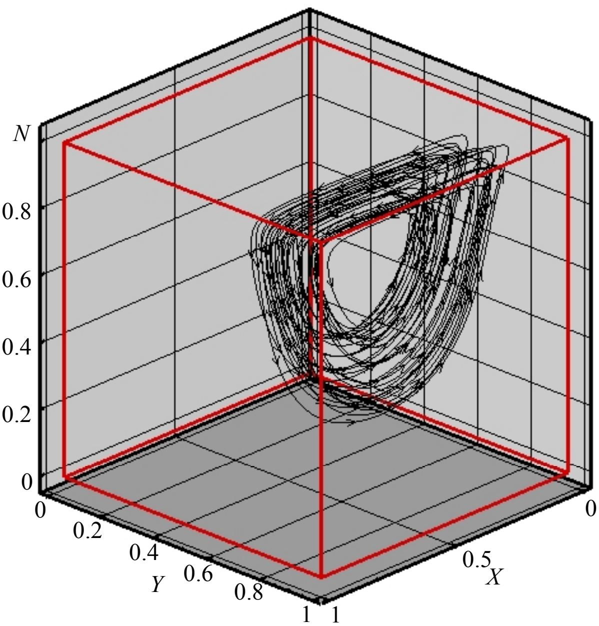

Рис. 12. Трёхмерная каверна. Треки частиц
в зоне заблокированного течения

В результате проведенного вычислительного эксперимента выяснилось, что используемые методы оптимизации для решения разностных задач, аппроксимирующих системы уравнений Навье – Стокса, успешно справились с их решением за разумное время. Отмеченные результаты позволяют расширить круг методов решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса, что особенно важно в условиях минимизации сложных многоэкстремальных функций, где зачастую приходится использовать несколько методов оптимизации для того, чтобы обойти сложные области минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров Ю.Н.* Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 239 с.
2. *Захаров Ю.Н.* Об одном методе решения уравнений с краевыми условиями на бесконечности // Вычислительные технологии. 1993. Т. 2. № 7. С. 56–68.
3. *Захаров Ю.Н.* Об одном методе решения стационарной задачи обтекания // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 3. С. 11–17.
4. *Захаров Ю.Н.*, *Гейдаров Н.А.*, *Шокин Ю.И.* Решение стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом давления, при наличии внутренних источников // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 5. С. 14–23.
5. *Бабский В.Г.*, *Скловский Ю.Б.* Применение метода Ньютона – Канторовича к расчету течения вязкой жидкости между вращающимися эксцентричными цилиндрами // Тр. IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. С. 63–67.
6. *Лапко С.А.* Итерационные процессы реализации неявных разностных схем для уравнений ввязкой несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1222–1224.
7. *Beam Richard M.*, *Bailey Harry E.* Newton's methods for the Navier-Stokes equations // Comput. Mech.'88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, Ga, Apr. 10–14. Berlin, 1988. V. 2. P. 51.II.1–51.II.4.
8. *Захаров Ю.Н.*, *Толстых М.А.* Многопараметрическая оптимизация итерационных схем решения уравнений с полиномиальной нелинейностью // Моделирование в механике. Новосибирск, 1990. Т. 4 (21). № 1 С. 109–114.
9. *Balaganckii M.Yu.*, *Zakharov Yu. N.*, *Shokin Yu. I.* Comparison of two-and three-dimensional steady flows of a homogeneous viscous incompressible fluid // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2009. V. 24. No. 1. P. 1–14.
10. *Milosevic H.*, *Gaydarov N.A.*, *Zakharov Y.N.* Model of incompressible viscous fluid flow driven by pressure difference in a given channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. V. 62. P. 242 – 246.
11. *Geidarov N.A.*, *Zakharov Y.N.*, *Shokin Yi.I.* Solution of the problem of viscous fluid flow with a given pressure differential // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. V. 26. No. 1. P. 39–48.
12. *Захаров Ю.Н.*, *Иванов К.С.* Об использовании градиентных итерационных методов при решении начально-краевых задач для трёхмерной системы уравнений Навье – Стокса // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 2. С. 55–69.
13. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
14. *Гилл Ф.*, *Мюррей У.*, *Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
15. *Крутиков В.Н.* Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение. Томск: Изд-во Том. гос. педагогич. ун-та, 2008. 264 с.
16. *Крутиков В.Н.*, *Петрова Т.В.* Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента // Экономика и мат. методы. 2003. Т. 39. Вып. 1. С. 33–49.
17. *Крутиков В.Н.*, *Горская Т.А.* Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики // Экономика и мат. методы. 2009. Т. 45. № 4. С. 37–80.
18. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 199 с.

19. *Демьянов В.Ф.*, *Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1972. 368 с.
20. *Крутиков В.Н.*, *Вершинин Я.Н.* Алгоритмы обучения на основе ортогонализации последовательных векторов // Вестник КемГУ. 2012. Вып. 2 (50). С. 37–42.
21. *Крутиков В.Н.*, *Вершинин Я.Н.* Многошаговый субградиентный метод для решения негладких задач минимизации высокой размерности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3. С. 5–19
22. *Крутиков В.Н.*, *Вершинин Я.Н.* Субградиентный метод минимизации с коррекцией векторов спуска на основе пар обучающих соотношений // Вестник КемГУ. 2014. Вып. 1(1). С. 46–54.
23. *Вершинин Я.Н., Быков А.А., Крутиков В.Н., Мешечкин В.В.* О решении субградиентными методами регуляризованной задачи линейного программирования в системе экологического мониторинга // Вестник КемГУ. 2014. Вып. 1 (57). Т. 1. С. 35–41.
24. *Самарский А.А.*, *Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 601 с.
25. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
26. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
27. *Исаков А.Г.* К численному решению задачи с движением вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне с Re = 1000 // Моделирование в механике. 1990. Т. 4(21), 2. С. 64–76.
28. *Исаев С.А.*, *Судаков А.Г.*, *Лучко Н.Н.*, *Сидорович Т.В.*, *Харченко В.В.* Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в кубической каверне с подвижной гранью // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 1. С. 49–53.
29. *Guermond J.-L.*, *Migeon C.*, *Pineau G.*, *Quartapelle L.* Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at Re = 1000 // J. Fluid Mech. 2002. V. 450. P. 169–199.
30. *Белолипецкий В.М.*, *Костюк В.Ю.* Численное исследование рециркуляционных течений в трехмерной каверне // Журнал прикладной механики и технической физики. 1990. № 1. С. 100–104.
31. *Кудинов П.И.* Численные исследования трехмерного течения в удлиненной каверне с подвижной крышкой // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан, 11–14 сентября 2003 года. Казахстан: ИВТ СО РАН, 2003.
32. *Кудинов П.И.* Численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Днепропетровского университета. Серия Механика. Вып. 4. 2001. Т. 1. С. 89–99.

Статья поступила 27.11.2014 г.

Zakharov Y.N., *Krutikov V.N.*, *Vershinin Y.N.* OPTIMIZATION METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF HYDRODYNAMICS NONLINEAR EQUATIONS

DOI 10.17223/19988621/37/2

There are two approaches to numerical solving steady state problems for the system of Navier-Stokes equations describing the motion of a viscous homogeneous incompressible fluid. One of them, that is most commonly used, is reduced to the solution of the non-stationary problem for the Navier-Stokes equations by an approximate method and obtaining steady solutions in the limit. Another, less popular, method is to construct a system of nonlinear algebraic equations (SNAE) using any approximation of the stationary problem solved; then, the resulting system is solved by iterative methods.

Each approach has its advantages and disadvantages. The main advantages of the second approach to the solution of stationary problems are: (1) in the process of convergence of the iterative process, the condition of noncompressibility is satisfied automatically; (2) one can use boundary conditions that are hard to implement in the usual way; (3) the method for solving stationary problems does not depend on the method of replacing the system of equations by a SNAE. Disadvantages of this approach are related to the fact that the iterative solutions of the SNAE for its convergence require restrictions on the nonlinear system operators and the initial approximation, which significantly limits the possibility of using this method for solving stationary problems.

The partial approximation method for solving difference problems approximating various stationary problems for the Navier-Stokes equations, based on the minimization of the residual norm minimization by specialized methods, was used earlier and proved to be effective. The possibility of solving difference problems approximating the stationary Navier-Stokes equations, multi-step iterative minimization possessing the properties of the CG method is investigated in this paper using the method of conjugate gradients and multi-step relaxation subgradient method (MSRSM).

The abovementioned optimization techniques have significant differences in the implementation and requirements to the accuracy of the one-dimensional descent. The conjugate gradient methods require a high precision search. The feature of relaxation subgradient methods, in particular, the MRSM, is the search of the direction of descent for the current gradient-coordinated minimum in a neighborhood the size of which is determined by the step of minimization. This last remark explains the effectiveness of methods of this class in the rough one-dimensional search.

Both the methods have successfully coped with the posed tasks within a reasonable time and high accuracy, which is confirmed by comparing the obtained results with known ones. These results allow us to expand the range of difference methods for solving problems approximating the stationary Navier–Stokes equations, which is particularly important under conditions of minimization of multiextremal functions, where it is often necessary to use several optimization methods.

Keywords: Navier-Stokes equations, optimization method, multistep method of minimization, subgradient method, conjugate gradient method.

Zakharov Yuriy Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: zaxarovyn@rambler.ru

Krutikov Vladimir Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Prof., Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: krutikovvn@gmail.com

Vershinin Yaroslav Nikilaevich (M. Sc, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: Azimus88@gmail.com

REFERENCES

1. Zakharov Yu.N. *Gradientnye iteratsionnye metody resheniya zadach gidrodinamiki*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2004. 239 p. (in Russian)
2. Zakharov Yu.N. Ob odnom metode resheniya uravneniy s kraevymi usloviyami na beskonechnosti. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 1993, vol. 2, no. 7, pp. 56–68. (in Russian)
3. Zakharov Yu.N. Ob odnom metode resheniya statsionarnoy zadachi obtekaniya. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 11–17. (in Russian)
4. Zakharov Yu.N., Geydarov N.A., Shokin Yu.I. Reshenie statsionarnoy zadachi o techenii vyazkoy zhidkosti v kanale, vyzvannom zadannym perepadom davleniya, pri nalichii vnutrennikh istochnikov. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 14–23. (in Russian)
5. Babskiy V.G., Sklovskiy Yu.B. Primenenie metoda N'yutona – Kantorovicha k raschetu techeniya vyazkoy zhidkosti mezhdu vrashchayushchimisya ekstsentrichnymi tsilindrami. *Tr. IV Vsesoyuznogo seminara po chislennym metodam mekhaniki vyazkoy zhidkosti*. Novosibirsk, VTs SO AN SSSR Publ., 1973, pp. 63–67. (in Russian)
6. Lapko S.A. Iteratsionnye protsessy realizatsii neyavnykh raznostnykh skhem dlya uravneniy vvyazkoy neszhimaemoy zhidkosti. *Differentsial'nye uravneniya*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1222–1224. (in Russian)

7. Beam Richard M., Bailey Harry E. Newton's methods for the Navier-Stokes equations. *Comput. Mech.'88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, Ga, Apr. 10–14*. Berlin, 1988, vol. 2, pp. 51.II.1–51.II.4.
8. Zakharov Yu.N., Tolstykh M.A. Mnogoparametricheskaya optimizatsiya iteratsionnykh skhem resheniya uravneniy s polinomial'noy nelineynost'yu. *Modelirovanie v mekhanike*. Novosibirsk, 1990, vol. 4 (21), no. 1 S. 109–114. (in Russian)
9. Balaganckii M.Yu., Zakharov Yu. N., Shokin Yu. I. Comparison of two-and three-dimensional steady flows of a homogeneous viscous incompressible fluid. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2009, vol. 24. No. 1, pp. 1–14.
10. Milosevic H., Gaydarov N.A., Zakharov Y.N. Model of incompressible viscous fluid flow driven by pressure difference in a given channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, vol. 62, pp. 242 – 246.
11. Geidarov N.A., Zakharov Y.N., Shokin Yi.I. Solution of the problem of viscous fluid flow with a given pressure differential. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2011, vol. 26. No. 1, pp. 39–48.
12. Zakharov Yu.N., Ivanov K.S. Ob ispol'zovanii gradientnykh iteratsionnykh metodov pri reshenii nachal'no-kraevykh zadach dlya trekhmernoy sistemy uravneniy Nav'e – Stoksa. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 55–69. (in Russian)
13. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu*. Moskow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (in Russian)
14. Gill F., Myurrey U., Rayt M. *Prakticheskaya optimizatsiya*. Moskow, Mir Publ., 1985. 509 p. (in Russian)
15. Krutikov V.N. *Obuchayushchiesya metody bezuslovnoy optimizatsii i ikh primenenie*. Tomsk, Izd-vo Tom. gos. pedagogich. un-ta, 2008. 264 p. (in Russian)
16. Krutikov V.N., Petrova T.V. Relaksatsionnyy metod minimizatsii s rastyazheniem prostranstva v napravlenii subgradienta. *Ekonomika i mat. metody*, 2003, vol. 39. no. 1, pp. 33–49. (in Russian)
17. Krutikov V.N., Gorskaya T.A. Semeystvo relaksatsionnykh subgradientnykh metodov s dvukhrangovoy korrektsiey matrits metriki. *Ekonomika i mat. metody*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 37–80. (in Russian)
18. Shor N.Z. *Metody minimizatsii nedifferentsiruemykh funktsiy i ikh prilozheniya*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1979. 199 p. (in Russian)
19. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*. Moskow, Nauka Publ., 1972. 368 p. (in Russian)
20. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Algoritmy obucheniya na osnove ortogonalizatsii posledovatel'nykh vektorov. *Vestnik KemGU*, 2012, no. 2 (50), pp. 37–42. (in Russian)
21. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Mnogoshagovyy subgradientnyy metod dlya resheniya negladkikh zadach minimizatsii vysokoy razmernosti. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 3, pp. 5–19. (in Russian)
22. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Cubgradientnyy metod minimizatsii s korrektsiey vektorov spuska na osnove par obuchayushchikh sootnosheniy. *Vestnik KemGU*, 2014, no. 1(1), pp. 46–54. (in Russian)
23. Vershinin Ya.N., Bykov A.A., Krutikov V.N., Meshechkin V.V. O reshenii subgradientnymi metodami regulyarizovannoy zadachi lineynogo programmirovaniya v sisteme ekologicheskogo monitoringa. *Vestnik KemGU*, 2014, no. 1 (57), vol. 1, pp. 35–41. (in Russian)
24. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy*. Moskow, Nauka Publ., 1978. 601 p. (in Russian)
25. Yanenko N.N. *Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967. 197 p. (in Russian)
26. Patankar S. *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moskow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p. (in Russian)
27. Isakov A.G. K chislennomu resheniyu zadachi s dvizheniem vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti v kubicheskoy kaverne s Re = 1000. *Modelirovanie v mekhanike*, 1990, vol. 4(21), 2, pp. 64–76. (in Russian)

28. Isaev S.A., Sudakov A.G., Luchko N.N., Sidorovich T.V., Kharchenko V.V. Chislennoe modelirovanie laminarnogo tsirkulyatsionnogo techeniya v kubicheskoy kaverne s podvizhnoy gran'yu. *IFZh*, 2002, vol. 75, no. 1, pp. 49–53. (in Russian)
29. Guermond J.-L., Migeon C., Pineau G., Quartapelle L. Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at Re = 1000. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 450, pp. 169–199.
30. Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu. Chislennoe issledovanie retsirkulyatsionnykh techeniy v trekhmernoy kaverne. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki*, 1990, no. 1, pp. 100–104. (in Russian)
31. Kudinov P.I. Chislennye issledovaniya trekhmernogo techeniya v udlinennoy kaverne s podvizhnoy kryshkoy. *Vychislitel'nye i informatsionnye tekhnologii v nauke, tekhnike i obrazovanii. Ust'-Kamenogorsk, Kazakhstan, 11–14 sentyabrya 2003 goda*. Kazakhstan, IVT SO RAN Publ., 2003. (in Russian)
32. Kudinov P.I. Chislennoe modelirovanie prostranstvennykh techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti. *Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta. Seriya Mekhanika*, 2001, no. 4, vol. 1, pp. 89–99. (in Russian)