ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика и механика № 5(37)

УДК 514.76 DOI 10.17223/19988621/37/4

А.Г. Седых

КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Рассматриваются контактные и контактные метрические структуры на трехмерных неунимодулярных группах Ли. Определены ассоциированные метрики и изучены свойства их кривизны. Рассмотрены частные случаи контактных форм и аффиноров. Исследовано свойство нормальности и K-контактности контактных метрических структур.

Ключевые слова: *группа Ли, контактная форма, контактная метрическая структура.*

Традиционно в геометрии большой интерес представляют римановы многообразия с некоторой дополнительно заданной структурой, согласованной с метрикой. Изучение контактных структур актуально, поскольку они возникают при изучении дифференциальных уравнений в частных производных и в задачах теоретической механики.

Определение 1 [1]. *Дифференцируемое* $(2n+1)$*-мерное многообразие* M *класса* C^∞ *называется контактным многообразием, если на нем задана дифференциальная 1-форма* η, *такая, что* $(\eta\wedge d\eta)^n \neq 0$ *всюду на* M^{2n+1}. *Форма* η *называется контактной.*

Контактная форма определяет на многообразии TM^{2n+1} распределение $E = \{v, \eta(v)=0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным распределением. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi,X) = 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Векторное поле ξ называется полем Риба или характеристическим векторным полем контактной структуры. Аффинором φ на M будем называть гладкое поле линейных операторов φ: $TM\to TM$. действующих на каждом касательном пространстве T_xM.

Определение 2 [1]. *Если* M^{2n+1} *контактное многообразие с контактной формой* η, *то контактной метрической структурой называется четверка* (η,ξ,φ,g), *где* ξ *– поле Риба,* g *– риманова метрика и* φ *– аффинор на* M^{2n+1}, *для которой имеют место следующие свойства*:

1) $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$,

2) $d\eta(X,Y) = g(X,\varphi Y)$,

3) $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из второго и третьего свойств сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором φ:

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Почти контактной метрической структурой на M^{2n+1} называется тройка (η,ξ,φ), для которой выполнены условия

$$\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi, \eta(\xi) = 1.$$

Пусть M^{2n+1} – почти контактное многообразие с почти контактной структурой (η,ξ,φ). Рассмотрим многообразие $M^{2n+1}\times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1}\times \mathbf{R}$ задается парой $(X, f\partial_t)$, где X – векторное поле, касательное к M^{2n+1}, t – координата второго сомножителя $\mathbf{R}$, ∂_t – векторное поле на $M^{2n+1}\times \mathbf{R}$ вида $\partial_t(F(x,t)) = \partial F/\partial t$ и f – функция класса C^∞ на M^{2n+1}. Определим почти комплексную структуру J на $M^{2n+1}\times \mathbf{R}$. с помощью оператора J, действующего по формуле

$$J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi,\ \eta(X)\ \partial_t).$$

Если J – интегрируемая почти комплексная структура, то почти контактная структура (η,ξ,φ) называется нормальной.

Определение 3 [1]. *Если контактная метрическая структура* (η,ξ,φ,g) *является нормальной, то она называется нормальной контактной метрической структурой, или структурой Сасаки.*

Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий g, т.е. ξ – векторное поле Киллинга относительно g, то такую контактную метрическую структуру называют К-контактной структурой.

Известно [1], что для нормальности и К-контактности контактной метрической структуры достаточно выполнение равенств $[\varphi,\varphi]+2d\eta\xi = 0$ и $(L_\xi\eta)(X) = 0$ (L – производная Ли) соответственно.

Пусть G – неунимодулярная трехмерная группа Ли, тогда [4] ее алгебра Ли имеет базис e_1,e_2,e_3, такой, что $[e_1,e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3$, $[e_1,e_3] = \gamma e_2+\delta e_3$, $[e_2,e_3] = 0$, причем матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

имеет след $\alpha + \delta = 2$.

Это позволяет выписать ненулевые структурные константы: $C_{12}^2=\alpha$, $C_{12}^3=\beta$, $C_{13}^2=\gamma$, $C_{13}^3=\delta$.

Пусть $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ – произвольная левоинвариантная 1-форма, где θ^1, θ^2, θ^3 – дуальный базис левоинвариантных 1-форм к базису e_1,e_2,e_3. Выпишем уравнения Маурера – Картана в выбранном базисе:

$$d\theta^1 = 0,\ \ d\theta^2 = -\alpha\theta^1\wedge\theta^2-\gamma\theta^1\wedge\theta^3,\ d\theta^3 = -\beta\theta^1\wedge\theta^2-\delta\theta^1\wedge\theta^3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\eta &= a_1 d\theta^1 + a_2 d\theta^2 + a_3 d\theta^3 = \\ &= a_2(-\alpha\theta^1\wedge\theta^2-\gamma\theta^1\wedge\theta^3) + a_3(-\beta\theta^1\wedge\theta^2-\delta\theta^1\wedge\theta^3) = \\ &= (-\alpha a_2-\beta a_3)\theta^1\wedge\theta^2 + (-\gamma a_2 - \delta a_3)\ \theta^1\wedge\theta^3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \eta\wedge d\eta &= (a_1\theta^1+a_2\theta^2+a_3\theta^3) \wedge ((-\alpha a_2-\beta a_3)\theta^1\wedge\theta^2+ (-\gamma a_2-\delta a_3)\ \theta^1\wedge\theta^3) = \\ &= ((\delta - \alpha)a_2a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2)\ \theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3. \end{aligned}$$

Вывод. На группе G левоинвариантная 1-форма $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ определяет контактную структуру при $(\delta - \alpha)a_2a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2 \neq 0$.

Перейдем к построению контактной метрической структуры, для этого выберем метрику на алгебре Ли, относительно которой выбранный выше базис e_1,e_2,e_3 является ортонормированным $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и найдем ее геометрические характеристики.

Тензор кривизны $R(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ в базисе e_1,e_2,e_3 обозначим $R(e_i,e_j)e_k = R_{ijk}^{\ \ \ s}e_s$, тогда тензор Риччи Ric, скалярная Sc и секционная кривизна K в направлении базисных площадок находятся по формулам:

$$Ric_{jk} = R_{ijk}^{l},\ Sc = g^{jk}Ric_{jk},\ K_{ij} = \frac{g_{ki}R_{ijj}^{k}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^{2}}.$$

Выпишем ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$Ric_{11} = -\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - \delta^2,$$

$$Ric_{22} = -\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha\delta,$$

$$Ric_{23} = -\alpha\gamma - \beta\delta - \frac{1}{2}\delta\gamma,$$

$$Ric_{32} = -\frac{3}{2}\alpha\gamma - \beta\delta - \frac{1}{2}\delta\gamma,$$

$$Ric_{33} = -\frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{1}{4}\beta\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 - \delta^2 - \delta\gamma.$$

Скалярная кривизна $Sc = -2a^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\delta^2 - 2\alpha\delta - \frac{3}{4}\gamma^2.$

Секционные кривизны в направлении базисных площадок

$$K_{12} = -a^2 - \frac{3}{4}\beta\gamma - \frac{3}{4}\beta^2,$$

$$K_{13} = -\frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \delta^2,$$

$$K_{23} = -a\delta + \frac{1}{4}\beta\gamma + \frac{1}{4}\beta^2.$$

Теперь найдем вид контактных метрических структур на группе G*,* но сначала проверим, является ли ранее выбранная метрика g_0 контактной метрической структурой.

Рассмотрим два частных случая:

1) $a_2 = 0$ $(\beta \neq 0)$,

2) $a_3 = 0$ $(\gamma \neq 0)$.

1) Пусть выбрана контактная структура первого вида $\eta = a_1\theta^1 + a_3\theta^3$. Найдем оператор φ из условия

$$d\eta(X,Y) = g_0(X,\varphi Y).$$

Получаем

$$d\eta = -\beta a_3\theta^1\wedge\theta^2 - \delta a_3\, \theta^1\wedge\theta^3,$$

тогда

$$d\eta(X,Y) = -\beta a_3 X^1 Y^2 + \beta a_3 X^2 Y^1 - \delta a_3\, X^1 Y^3 + \delta a_3\, X^3 Y^1,$$

$$g(X,\varphi Y) = X^1 \varphi_j^{\ 1} Y^j + X^2 \varphi_j^{\ 2} Y^j + X^3 \varphi_j^{\ 3} Y^j.$$

Приравнивая коэффициенты при X^i, получаем $\varphi_j^{\,1} Y^j = \beta a_3 Y^2 - \delta a_3 Y^3$, $\varphi_j^{\,2} Y^j = \beta a_3 Y^1$, $\varphi_j^{\,3} Y^j = \delta a_3 Y^1$ или

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\beta a_3 & -\delta a_3 \\ \beta a_3 & 0 & 0 \\ \delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия

$$g_0(\varphi X, \varphi Y) = g_0(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), (\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi).$$

$$\varphi\varphi^t = \begin{pmatrix} 0 & -\beta a_3 & -\delta a_3 \\ \beta a_3 & 0 & 0 \\ \delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta a_3 & \delta a_3 \\ -\beta a_3 & 0 & 0 \\ -\delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta^2+\delta^2)a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 a_3^2 & \beta\delta a_3^2 \\ 0 & \beta\delta a_3^2 & \delta^2 a_3^2 \end{pmatrix},$$

$$I - \eta \otimes \eta = \begin{pmatrix} 1-a_1^2 & 0 & -a_1 a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_1 a_3 & 0 & 1-a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Приравняем левую и правую части соотношения

$$\begin{pmatrix} (\beta^2+\delta^2)a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 a_3^2 & \beta\delta a_3^2 \\ 0 & \beta\delta a_3^2 & \delta^2 a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_1^2 & 0 & -a_1 a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_1 a_3 & 0 & 1-a_3^2 \end{pmatrix}$$

и составим систему уравнений, сравнивая компоненты матриц

$$(\beta^2+\delta^2)a_3^2 = 1-a_1^2, \beta^2 a_3^2 = 1, \delta^2 a_3^2 = 1-a_3^2,$$

$$-\beta\delta a_3^2 = 0, a_1 a_3 = 0,$$

решая которую, получаем ограничения на коэффициенты контактной структуры:

$$a_1 = 0, a_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\delta^2}}.$$

Выберем $\beta = \pm 1, \delta = 0$, тогда получим решение вида $a_1=0$ и $a_3=\pm 1$.

Вывод. Метрика g_0 определяет контактную метрическую структуру в том случае, когда контактная форма $\eta = \pm\theta^3$ и аффинор φ задается матрицей $\varphi = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Полученная структура не является ни нормальной, ни К-контактной.

2) Далее рассмотрим второй частный случай $a_3 = 0$ ($\gamma \neq 0$).

Тогда контактная структура принимает вид $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2$. Построим контактную метрическую структуру аналогично первому случаю.

Сначала найдем оператор φ из условия $d\eta(X,Y) = g_0(X,\varphi Y)$:

$$d\eta = -\beta a_2 \theta^1 \wedge \theta^2 - \delta a_2\, \theta^1 \wedge \theta^3.$$

Тогда

$$d\eta(X,Y) = -\beta a_2 X^1 Y^2 + \beta a_2 X^2 Y^1 - \delta a_2 X^1 Y^3 + \delta a_2 X^3 Y^1,$$

$$g(X,\varphi Y) = X^1 \varphi_j^{\,1} Y^j + X^2 \varphi_j^{\,2} Y^j + X^3 \varphi_j^{\,3} Y^j.$$

Приравнивая коэффициенты при X^i, получаем $\varphi_j^1 Y^j = \alpha a_2 Y^2 - \gamma a_2 Y^3$, $\varphi_j^2 Y^j = \alpha a_2 Y^1$, $\varphi_j^3 Y^j = \gamma a_2 Y^1$ или

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha a_2 & -\gamma a_2 \\ \alpha a_2 & 0 & 0 \\ \gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия

$$g_0(\varphi X, \varphi Y) = g_0(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), (\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi).$$

$$\varphi^t \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_2 & \gamma a_2 \\ -\alpha a_2 & 0 & 0 \\ -\gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha a_2 & -\gamma a_2 \\ \alpha a_2 & 0 & 0 \\ \gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha^2+\gamma^2)a_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 a_2^2 & \alpha\gamma a_2^2 \\ 0 & \alpha\gamma a_2^2 & \gamma^2 a_2^2 \end{pmatrix},$$

$$I - \eta \otimes \eta = \begin{pmatrix} 1-a_1^2 & -a_1 a_2 & 0 \\ -a_1 a_2 & 1-a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений, сравнивая соответствующие элементы матриц в условии $\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi$:

$$(\alpha^2+\gamma^2)a_2^2 = 1 - a_1^2, \alpha^2 a_2^2 = 1 - a_2^2, \gamma^2 a_2^2 = 1,$$

$$a_1 a_2 = 0, -\alpha\gamma a_2^2 = 0,$$

решая которую, получаем ограничения на коэффициенты контактной структуры:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}.$$

Выберем $\gamma = \pm 1, \alpha = 0$, тогда получим решение вида $a_1 = 0$ и $a_2 = \pm 1$.

Вывод. Метрика g_0 определяет контактную метрическую структуру в том случае, когда контактная форма $\eta = \pm\theta^2$ и аффинор φ задается матрицей

$$\varphi = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другие метрики, которые также определяют контактную метрическую структуру. Для удобства вычислений в качестве контактной формы и аффинора выберем $\eta = \theta^3, \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Любой другой аффинор ассоциированной структуры на контактном распределении имеет вид [6, 7]

$$\varphi|_E = \varphi_0|_E \, (1+P)(1-P)^{-1},$$

где E – контактное распределение, а P – оператор на E, обладающий свойствами:

1) P симметричен относительно метрики g_0,

2) P антикоммутирует с φ_0,

3) Оператор $1 - P^2$ положительно определен относительно метрики g_0 на E (1 – тождественный оператор).

Такой оператор можно задать [6] в виде $P = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$ или в полярных координатах

$$P = \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & -\cos\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда на контактном распределении E аффинор φ имеет вид

$$\varphi|_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\rho\cos\alpha_1 & \rho\sin\alpha_1 \\ \rho\sin\alpha_1 & 1-\rho\cos\alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\rho\cos\alpha_1 & -\rho\sin\alpha_1 \\ -\rho\sin\alpha_1 & 1+\rho\cos\alpha_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{-1+\rho^2} & \dfrac{-1+2\rho\cos\alpha_1-\rho^2}{1-\rho^2} \\ \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Продолжим его на все касательное многообразие группы G:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{-1+\rho^2} & \dfrac{-1+2\rho\cos\alpha_1-\rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что ассоциированная метрика контактной метрической структуры полностью определяется аффинором: $g(X, Y) = d\eta\,(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$;

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & \dfrac{1-2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Контактная метрическая структура на неунимодулярной группе Ли может быть задана четверкой (η,ξ,φ,g), где

$$\eta = \theta^3, \quad \xi = e_3,$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{-1+\rho^2} & \dfrac{-1+2\rho\cos\alpha_1-\rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g=\begin{pmatrix} \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & \dfrac{1-2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Простые вычисления (в системе Maple) показывают, что данная структура не является ни нормальной, ни K-контактной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D.E.* Contact manifold in Riemannian geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg – New York, Springer Verlag, 1976.
2. 2.*Дубровин Б.А.*, *Новиков С.П.*, *Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения: в 2 т. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
3. *Кобаяси Ш*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981.
4. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
5. *Седых А.Г.* Контактные структуры на трехмерных группах Ли. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.
6. *Смоленцев Н.К.* Простпанства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 31. С. 69–126.
7. *Смоленцев Н.К.* Ассоциированные почти комплексные структуры и (псевдо) римановы метрики на группах GL(2,**R**) и SL(2,**R**)×**R** // Вестник Кемеровского государственного университета. № 4(24). С. 155–162.

Статья поступила 20.04.2015 г.

Sedykh A.G. CONTACT METRIC STRUCTURES ON 3-DIMENTIONAL NON-UNIMODULAR LIE GROUPS

DOI 10.17223/19988621/37/4

Definition 1. *A differentiable* $(2n+1)$*-dimensional manifold M of the class* C^∞ *is called a contact manifold if there exists a differential 1-form* η *on* M^{2n+1}, *such that* $(\eta\wedge d\eta)^n \neq 0$. *The form* η *is called a contact form.*

Definition 2. *If* M^{2n+1} *is a contact manifold with a contact form* η, *then a contact metric structure is the quadruple* (η,ξ,φ,g), *where* ξ *is a Reeb's field*, *g is a Riemannian metric*, *and* φ *is an affinor on* M^{2n+1}, *for which the following properties are valid*:

1) $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$,

2) $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$,

3) $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

We consider a non-unimodular Lie group G; its Lie algebra has a basis e_1,e_2,e_3 such that $[e_1,e_2] = \alpha e_2+\beta e_3$, $[e_1,e_3] = \gamma e_2+\delta e_3$, $[e_2,e_3] = 0$, and matrix $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ has a trace $\alpha + \delta = 2$.

The left invariant 1-form $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ defines a contact structure on the group G if $(\delta - \alpha)a_2a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2 \neq 0$

As a contact form, we choose the simplest one, $\eta = \theta^3, \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, and consider other metrics that also define a contact metric form.

We obtain that a contact metric structure on a non-unimodular Lie group can be set by the quadruple (η,ξ,φ,g), where

$$\eta = \theta^3, \quad \xi = e_3, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{-1+\rho^2} & \dfrac{-1+2\rho\cos\alpha_1-\rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ \dfrac{1+2\rho\cos\alpha_1+\rho^2}{1-\rho^2} & \dfrac{2\rho\sin\alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Keywords: Lie group, contact form, contact metric structure.

SEDYKH Anna Gennadyevna (M.Sc., Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: Sedykh-anna@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. Contact manifold in Riemannian geometry. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin Heidelberg – New York, Springer Verlag, 1976.
2. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya*. Moskow, Editorial URSS Publ., 1998. (in Russian)
3. Kobayasi Sh, Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii*. Moskow, Nauka Publ., 1981. (in Russian)
4. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Math*., 1976, vol. 21, pp. 293–329.
5. Sedykh A.G. *Kontaktnye struktury na trekhmernykh gruppakh Li*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. (in Russian)
6. Smolentsev N.K. Prostpanstva rimanovykh metrik. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*, 2003, vol. 31, pp. 69–126. (in Russian)
7. Smolentsev N.K. Assotsiirovannye pochti kompleksnye struktury i (psevdo) rimanovy metriki na gruppakh GL(2,**R**) i SL(2,**R**)×**R**. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 4(24), pp. 155–162. (in Russian)