

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2015

№ 5(37)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (председатель редколлегии), С.П. Гулько (зам. председателя редколлегии), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), В.Ю. Хайруллина (отв. секретарь по разделу «Механика»), И.А. Александров, В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.10.2015.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9.35. Уч.-изд. л. 10.47. Тираж 300 экз. Заказ № 28.

Отпечатано на оборудовании

Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 1354.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С. Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики.....	5
Захаров Ю.Н., Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н. Применение методов оптимизации для решения систем нелинейных уравнений гидродинамики	20
Ковалевский А.П., Шаталин Е.В. Выбор регрессионной модели зависимости массы тела от роста с помощью эмпирического моста	35
Седых А.Г. Контактные метрические структуры на трехмерных неунимодулярных группах Ли.....	48

МЕХАНИКА

Бодров А.С., Олимпиева Н.В., Зелепугин А.С., Зелепугин С.А. Численное моделирование процессов динамического канально-углового прессования титановых образцов.....	56
Золотарев В.Ю., Котляров Е.Ю., Серов Г.П., Тулин Д.В., Устинов С.Н. Сравнительный анализ терморегулирующих жалюзи и радиаторов на базе регулируемых контурных тепловых труб	64
Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В., Андропова А.О. Исследование применимости модели дрейфа частиц для моделирования переноса дисперсной фазы в потоке	76
Пономарева М.А., Собко Е.А., Якутенок В.А. Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов	84
Чинчикеева Н.А., Шваб А.В. Моделирование нестационарного переноса тепла при движении высоконцентрированной гранулированной среды.....	97

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Жизнь и научно-педагогическая деятельность профессора Г.Г. Пестова.....	103
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	115

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S. Normal congruence of paraboloid. Demiquadrics	5
Zakharov Y.N., Krutikov V.N., Vershinin Y.N. Optimization methods for solving systems of hydrodynamics nonlinear equations.....	20
Kovalevskii A.P., Shatalin E.V. The choice of a regression model of the body weight on the height via an empirical bridge	35
Sedykh A.G. Contact metric structures on 3-dimentional non-unimodular Lie groups	48

MECHANICS

Bodrov A.S., Olimpieva N.V., Zelepugin A.S., Zelepugin S.A. Numerical simulation of dynamic channel-angular pressing of titanium specimens	56
Zolotarev V.Yu., Kotlyarov E.Yu., Serov G.P., Tulin D.V., Ustinov S.N. Comparative analysis of thermal louvers and radiators on base of regulated loop heat pipes	64
Matvienko O.V., Evtyushkin E. V., Andropova A.O. Studying the applicability of the algebraic slip model for prediction dispersed phase motion in the flow.....	76
Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method	84
Chinchikeeva N.A., Shvab A.V. Modeling of unsteady heat transfer at motion highly concentrated granular medium.....	97

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

In memory of Prof. G.G. Pestov: life and scientific-educational activity.....	103
---	-----

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	115
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22

DOI 10.17223/19988621/37/1

М.С. Бухтяк

НОРМАЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПАРАБОЛОИДА. ДЕМИКВАДРИКИ

Представляется важной задача о построении на параболоиде вращения семейства линий, обладающих некоторыми свойствами, делающих их удобными для раскроя сетеполотна при проектировании и изготовлении параболической антенны. А именно, требуется, чтобы линии данного семейства локально были близки к геодезическим линиям в достаточно разумном смысле, а также наличие алгоритма, относящего линии указанного семейства к натуральному параметру. В решении поставленной задачи сделан первый, но важный шаг: обнаружен класс поверхностей, пересечение которых с параболоидом порождает класс линий, перспективных для достижения поставленных целей. Указанные поверхности – демиквадрики, особым образом связанные с нормальной конгруэнцией параболоида.

Ключевые слова: *параболоид, антенна, геодезическая линия, нормальная конгруэнция, демиквадрика.*

1. Постановка проблемы

Задача проектирования и конструирования рефлекторных антенн (не обязательно, но с очень большой вероятностью) требует проведения по поверхности родительского параболоида линий, пригодных для раскроя. Первая по приоритету, как это принято считать, линия, принадлежащая семейству геодезических линий. Следует заметить, однако, что упомянутое семейство линий не лишено недостатков. Именно, геодезическая линия действительно и прямейшая и кратчайшая – но только в локальном смысле. Сказанное демонстрирует пример, приведенный ниже. На рис. 1. изображен кусок параболоида вращения с фокальным параметром, равным 0.25 и геодезическая линия на нем.

Представляется невероятным, чтобы для реального раскроя была применена такая линия. Правда, при больших значениях фокального параметра поведение геодезической линии в некотором смысле «лучше». Но есть и другое обстоятельство. Линии, применяемые для раскроя, особенно удобны, если они отнесены к натуральному параметру – длине дуги. Тогда не составляет

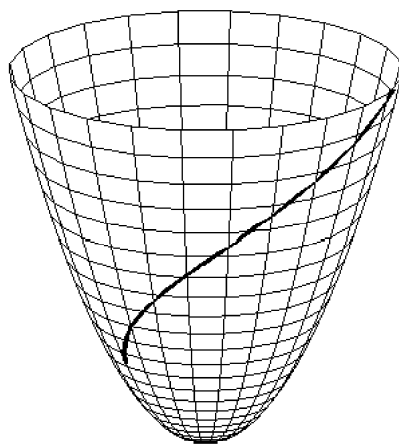


Рис. 1. Геодезическая линия на параболоиде

труда отмерять на таких линиях любые интересующие нас расстояния. Как раз для перехода к натуральному параметру геодезические линии параболоида слишком малоприспособлены. Это заставляет задуматься о поиске класса линий, наделенных следующими свойствами:

1. Локально они должны быть близки к геодезическим линиям в некотором разумном смысле.

2. Их можно относить к натуральному параметру без заметных вычислительных проблем.

3. Они должны однозначно определяться своими концевыми точками, указанными на параболоиде.

Разумеется, первые два условия довольно расплывчаты. Однако было бы странно, если бы удалось заранее уточнить их настолько, чтобы они привели к строгой постановке задачи и, лучше всего, – с единственным решением. Мы не располагаем возможностями для отыскания нужного класса линий, а можем лишь предложить некий класс и надеяться на приемлемость его качеств. Поэтому говорим не о задаче, а о проблеме – сколь бы скромной она ни выглядела.

2. Конгруэнция нормалей параболоида вращения

Необходимое соглашение о терминологии. Термин «линейчатая поверхность» сохранен за поверхностью, образующим элементом которой является точка, и через каждую точку такой поверхности проходит прямая (иногда не единственная), принадлежащая данной поверхности. Линейчатая поверхность – двумерное многообразие [1]. Термин «регулюс» [2, 3] обозначает одномерное многообразие, образующим элементом которого является прямая.

Характеристическое свойство геодезической линии: в каждой её точке главная нормаль [4] совпадает с нормалью поверхности в той же точке. Таким образом, регулюс главных нормалей геодезической линии принадлежит нормальной конгруэнции [5, 6] поверхности (в нашем случае – параболоида вращения). Указанная конгруэнция (обозначим её $\mathfrak{Z}$) принадлежит линейному комплексу [7], который называется специальным [6–9], либо вырожденным [10]. Все прямые специального линейного комплекса Ω пересекают одну прямую, называемую его осью. В нашем случае осью комплекса служит ось симметрии параболоида. Изначально прямая конгруэнции (либо комплекса) не имеет однозначно определенного направления, однако метод изучения, которым мы предполагаем пользоваться, требует связывать с прямой некоторое направление. Поэтому мы, как правило, говоря об 1-семействе прямых комплекса, конгруэнции или регулюса, будем именовать их лучами [3, с. 39, 78]. Впрочем, в некоторых ситуациях употребление термина «луч» приводит к нежелательным коллизиям. Так, если требуется, чтобы некоторая прямая n , несущая на себе два луча, отличалась от координатной оси Oz , то один из лучей (на прямой n) может отличаться от оси Oz , в то время как второй из этих лучей совпадает с указанной осью. В ситуациях, способных порождать такие коллизии, будем говорить о прямой, а не о луче.

Текущий луч l конгруэнции несет на себе две фокальные точки $\Phi_1(l)$ и $\Phi_2(l)$ [6]. Луч может быть гиперболическим (фокусы вещественные и различные), эллиптическим (фокусы комплексно-сопряженные), либо параболическим (фокус двойной). Двупараметрическое семейство фокусов $\Phi_1(l)$ образует одну из так называемых фокальных поверхностей, соответственно из фокусов $\Phi_2(l)$ составляется вторая фокальная поверхность.

Ввиду осевой симметрии параболоида, невырожденная фокальная поверхность есть поверхность вращения, для которой меридианом служит огибающая [4] семейства нормалей параболы (рис. 2).

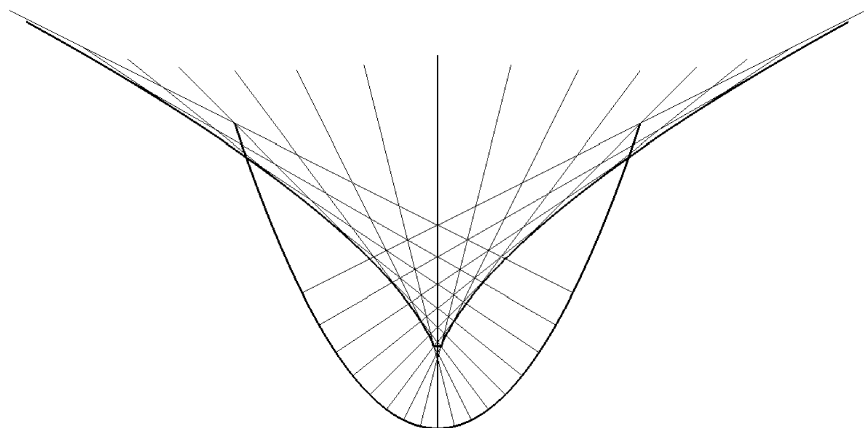


Рис. 2. Огибающая семейства нормалей параболы

Представление о фокальной поверхности нормальной конгруэнции параболоида дает рис. 3.

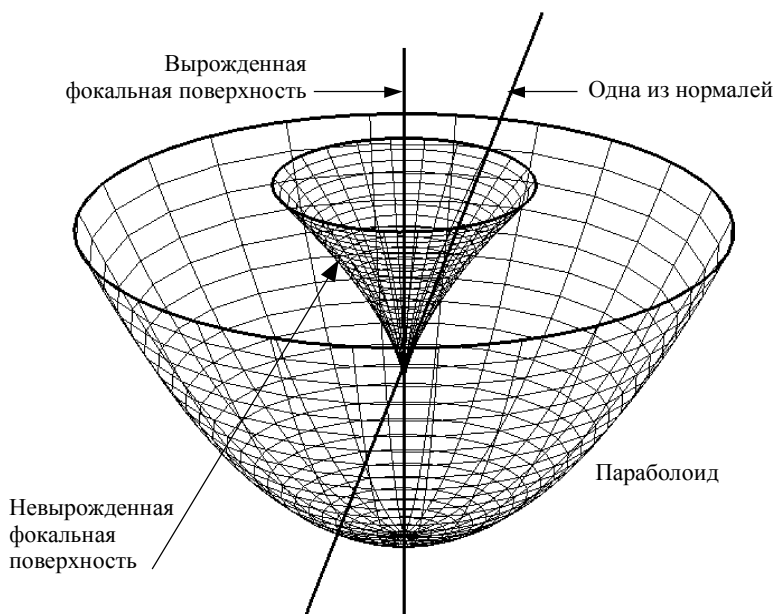


Рис. 3. Кусок параболоида вращения, две фокальные поверхности (одна вырождается в прямую) и одна из нормалей параболоида

Конгруэнция прямых есть двумерная поверхность в четырехмерном линейчатом пространстве [11; 12, с. 60].

В некоторой декартовой системе координат записано уравнение параболоида

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}, \quad (2.1)$$

где F – фокальный параметр.

Дальнейшие построения и анализ инвариантны относительно преобразований подобия. Совершая соответствующее преобразование с коэффициентом $4F$, то есть полагая

$$x = 4FX, y = 4FY, z = 4FZ, \quad (2.2)$$

приводим уравнение (1.1) к виду

$$f \equiv X^2 + Y^2 - Z = 0. \quad (2.3)$$

3. Область в специальном линейном комплексе

Рассматриваемое нами 2-семейство прямых, составляющих нормальную конгруэнцию параболоида вращения с осью Oz , есть подмногообразие специального линейного комплекса с осью Oz . Обозначим этот комплекс K . Для нас нет необходимости рассматривать все прямые данного комплекса. В самом деле, нас интересуют прямые этого комплекса, удовлетворяющие следующим условиям:

а) прямая не параллельна плоскости (xOy) ;

б) прямая не совпадает с осью Oz (точнее, конечно, было бы «прямая комплекса не совпадает с прямой – носителем оси Oz », но полагаем, что допускаемая вольность речи не приведет к недоразумениям).

Определение. Совокупность прямых комплекса K , удовлетворяющих условиям а) и б), назовем семейством допустимых прямых и обозначим $\tilde{K}$.

Рассмотрим конструкцию, которая позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между $\tilde{K}$ и некоторой областью трехмерного евклидова пространства E_3 , в котором задана неподвижная прямая l (ось специального линейного комплекса) и плоскость α , ортогональная этой прямой. Точку O пересечения прямой l и плоскости α принимаем за начало декартовой системы координат. На прямой l помещаем ось OZ , произвольно выбрав направление на ней. Оси OX и OY оказываются в плоскости α . Всякая прямая l , принадлежащая $\tilde{K}$, пересекает ось OZ в точке $(0, 0, z)$ и плоскость XOY в точке $(x, y, 0)$, причем, в силу свойств $\tilde{K}$, эти точки различны. Упорядоченную тройку чисел (x, y, z) будем называть декартовыми координатами прямой l в системе координат (O, X, Y, Z) . Тройку чисел (ρ, φ, z) (рис. 4) назовем цилиндрическими координатами той же прямой. Положение оси OZ однозначно определено. Если мы не меняем положение плоскости XOY , то, учитывая равноправие всех направлений в этой плоскости, можем считать, что какое-то из этих направлений жестко закреплено за осью OX , а репер (O, X, Y, Z) неподвижен. Тогда канонически отождествляем E_3 с $\mathbb{R}^3$.

Мы располагаем отображением

$$\tilde{K} \ni l \mapsto M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

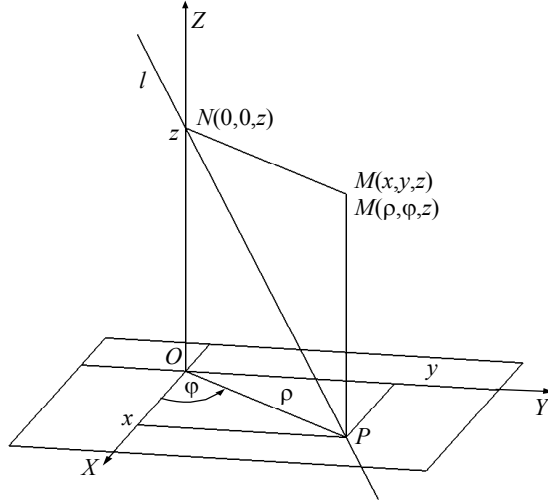


Рис. 4. Правило сопоставления тройки координат прямой линии, принадлежащей области специального линейного комплекса

Заметим, что тройка чисел (x, y, z) не произвольна. Исключаются точки, для которых выполнено условие

$$z(x^2 + y^2) = 0.$$

Множество точек в $\mathbb{R}^3$, не подпадающих под исключение, обозначим $\widetilde{\mathbb{R}^3}$. Тогда вместо (3.1) можем указать взаимно-однозначное соответствие

$$\widetilde{K} \ni l \leftrightarrow M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \subset \mathbb{R}^3; \quad (3.2)$$

$$\widetilde{\mathbb{R}^3} = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ \& } z(x^2 + y^2) \neq 0\}. \quad (3.3)$$

Определение. Если прямая l и точка $M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3}$ находятся в отношении, заданном рис. 4, то будем говорить, что точка M изображает прямую l .

Подчеркивая связь между $M(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3}$ и $l \in \widetilde{K}$, для точки $M(x, y, z)$ примем обозначение $\tilde{l}(x, y, z)$. Тогда (3.2) запишется в виде

$$\widetilde{K} \ni l \leftrightarrow \tilde{l}(x, y, z) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.4)$$

Стандартная метрика координатного пространства $\mathbb{R}^3$ индуцирует метрику в $\widetilde{\mathbb{R}^3}$, а значит, и метрику в $\widetilde{K}$. Именно, если $l_1 \leftrightarrow \tilde{l}_1(x_1, y_1, z_1)$, $l_2 \leftrightarrow \tilde{l}_2(x_2, y_2, z_2)$, а расстояние между l_1 и l_2 обозначим $d(l_1, l_2)$, то

$$d(l_1, l_2) \triangleq d(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.4)$$

Таким образом, $\widetilde{K}$ есть метрическое пространство [13, с. 40].

4. Конгруэнция нормалей параболоида вращения. Координатное представление

Конгруэнция нормалей параболоида есть 2-поверхность в области $\bar{K}$. Вывод уравнения (и параметрических уравнений этой поверхности) основан на следующих соображениях, поясняемых рис. 5. Уравнение параболоида (2.3) мы пишем, изменив обозначения координат, в виде

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2. \quad (4.1)$$

Неподвижный репер, на котором основаны построения пункта 3, мы строим, приняв за вершину репера вершину параболоида, ось Ox_3 совмещаем с осью параболоида. Соответственно плоскость Ox_1x_2 – касательная плоскость параболоида в его вершине.

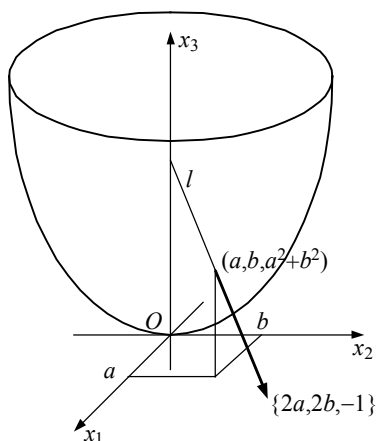


Рис. 5. Координаты нормали параболоида

Луч l нормальной конгруэнции пересекает параболоид в точке $(a, b, a^2 + b^2)$. Направляющим вектором для l служит вектор-градиент $\{2a, 2b, -1\}$. Параметрические уравнения данного луча имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = a + 2at, \\ x_2 = b + 2bt, \\ x_3 = a^2 + b^2 - t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Луч l пересекает плоскость Ox_1x_2 . Соответствующее значение t равно

$$t_0 = a^2 + b^2. \quad (4.3)$$

Точка P пересечения луча l с указанной плоскостью имеет, согласно (4.2) и (4.3), координаты

$$P(a + 2a(a^2 + b^2), b + 2b(a^2 + b^2), 0). \quad (4.4)$$

Точка пересечения того же луча с осью Oz есть точка

$$\left(0, 0, a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (4.5)$$

Согласно пункту 3, координатами луча l являются первые две координаты точки P и последняя координата точки (4.5). Таким образом,

$$l\left(a + 2a(a^2 + b^2), b + 2b(a^2 + b^2), a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (4.6)$$

Точка $\tilde{l}$, изображающая этот луч, имеет, согласно пункту 3, те же координаты. Совокупность указанных точек заполняет поверхность Σ . Параметрические уравнения этой поверхности в декартовых переменных a, b и при замене их на полярные координаты ρ, φ имеют вид

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 = a + 2a(a^2 + b^2), \\ x_2 = b + 2b(a^2 + b^2), \\ x_3 = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \Sigma: \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi (1 + 2\rho^2), \\ x_2 = \rho \sin \varphi (1 + 2\rho^2), \\ x_3 = \rho^2 + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Параболоид задаем вектор-функцией

$$P = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho^2\}. \quad (4.7)$$

Построенное здесь изображение прямых специального линейного комплекса позволяют на одном рисунке изобразить и параболоид, и конгруэнцию его нормалей. Следует только учитывать, что каждая из точек может выступать в разных качествах. В одном контексте точка и есть точка, в другом она изображает прямую, принадлежащую $\tilde{K}$. Соответствующее изображение представлено на рис. 6.

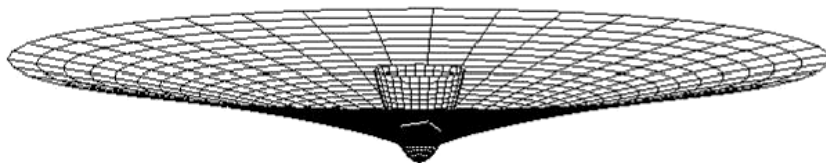


Рис. 6. Кусок параболоида вращения (часть рисунка в центре) и изображение его нормальной конгруэнции в пространстве $\mathbb{R}^3$

Отметим, что, исключая параметры из уравнений (4.7), получим уравнение поверхности, изображающей нормальную конгруэнцию параболоида в виде

$$\Sigma: x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_3^3 = 0. \quad (4.8)$$

Многочлен в левой части уравнения неприводим над полем вещественных чисел.

5. Операция соединения

Прямая $l_1(x_1, y_1, z_1)$ есть точка в метрическом пространстве $\tilde{K}$. Если $l_2(x_2, y_2, z_2)$ – вторая точка в $\tilde{K}$, то формально можно составить новую тройку чисел (x, y, z) по правилу

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y = (1-t)y_1 + ty_2, \quad z = (1-t)z_1 + tz_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.1)$$

Нет, однако, гарантии, что при всех допустимых значениях параметра t для тройки чисел (x, y, z) выполнено ограничение (3.3).

Определение. Две различные прямые $l_1(x_1, y_1, z_1)$, $l_2(x_2, y_2, z_2)$ из $\tilde{K}$ называются *соединимыми*, если при любом $t \in [0, 1]$ числа (5.1) удовлетворяют условиям (3.3).

Роль соединимых прямых в том, что для них формулы (5.1) суть параметрическое задание некоторого регулюса, содержащего эти прямые и принадлежащего $\tilde{K}$.

Предложение 4.1. Две скрещивающиеся нормали параболоида, из которых ни одна не совпадает с его осью, соединимы.

Доказательство. Пусть прямые l_1 и l_2 суть скрещивающиеся прямые трехмерного евклидова пространства. Репер выбран так, как это показано на рис. 4. Тогда прямая l_1 определена точкой P_1 и точкой N_1 , а прямая l_2 определена точкой P_2 и точкой N_2 , причем

$$P_1 \neq O, \quad P_2 \neq O, \quad P_1 \neq P_2, \quad N_1 \neq N_2. \quad (5.2)$$

Заметим, что поскольку рассматриваемые нами прямые – нормали параболоида, то точки N_1 и N_2 имеют аппликаты одного знака. Не нарушая общности, можем считать, что точка N_1 – внутренняя точка отрезка $[ON_2]$. Это позволяет направить вектор e_3 коллинеарно им обоим, причем совместить его с вектором $\overline{ON_1}$.

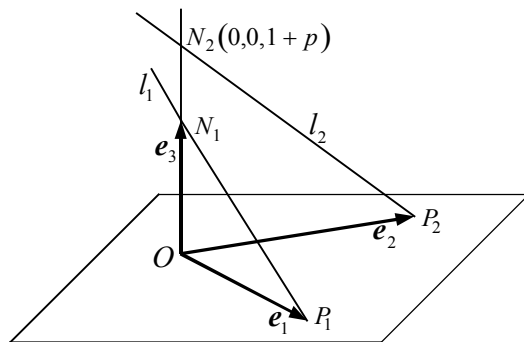


Рис. 7. Правило присвоения координат прямой, принадлежащей нормальной конгруэнции

Завершаем построение аффинного репера [2] $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ следующим образом:

$$e_1 = \overline{OP_1}, \quad e_2 = \overline{OP_2}, \quad e_3 = \overline{ON_1}. \quad (5.3)$$

В таком репере, очевидно, интересующие нас точки имеют координаты

$$P_1(1, 0, 0), \quad P_2(0, 1, 0), \quad N_1(0, 0, 1), \quad N_2(0, 0, 1 + p), \quad (5.4)$$

где $p \in \mathbb{R}$,

$$p > 0. \quad (5.5)$$

Теперь, в соответствии с (3.1) и (5.4), можем написать

$$\tilde{l}_1(1, 0, 1), \quad \tilde{l}_2(0, 1, 1 + p),$$

и соотношения (5.1) (в других обозначениях координат) принимают вид

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 1 + tp. \end{cases} \quad (5.6)$$

Поскольку имеет место (5.5), то из (5.6) заключаем

$$(0 \leq t \leq 1) \Rightarrow x_3(x_1^2 + x_2^2) > 0,$$

что и доказывает предложение.

Геометрический смысл предложения в том, что пара прямых, принадлежащих нормальной конгруэнции, позволяет построить однопараметрическое семейство прямых в области $\widetilde{K}$. При этом числа x_1, x_2, x_3 суть координаты переменной прямой указанного семейства (иначе говоря, переменной точки в $\widetilde{\mathbb{R}^3}$), а t – параметр семейства.

Определение. Построение по двум соединимым прямым l_1, l_2 1-семейства прямых по формулам (5.1) называем *соединением* прямых l_1, l_2 .

Предложение 4.2. Соединение прямых приводит к 1-семейству прямолинейных образующих гиперболического параболоида, причем соединяемые прямые принадлежат одной демиквадрике указанного гиперболического параболоида, а ось параболоида принадлежит второму семейству.

Доказательство. Обозначим текущую прямую l . Тогда

$$l(1-t, t, 1+tp). \quad (5.7)$$

На этой прямой отмечаем точку A в плоскости (O, e_1, e_2) репера и точку B на оси (O, e_3) . Тогда в $\mathbb{R}^3$ имеем

$$A = (1-t, t, 0), \quad B = (0, 0, 1+tp). \quad (5.7)$$

Для текущей точки прямой (AB) в пространстве $\mathbb{R}^3$ радиус-вектор

$$\bar{M}(x_1, x_2, x_3) = (1-v)\bar{A} + v\bar{B}, \quad (5.8)$$

что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + v(t-1) = 0, \\ x_2 - vt = 0, \\ x_3 + (v-1)(1+tp) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Исключив параметры t, v , приходим к уравнению квадрики (обе части уравнения умножены на 2 ради удобства).

$$\begin{aligned} f \equiv & 2x_3x_1 + 2x_3x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \\ & - 2x_2p + 2x_2px_1 + 2x_2^2p = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ради удобства же переходим к однородным координатам $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, как это сделано в [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & 2x_3x_1 + 2x_3x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \\ & - 2x_2x_4p + 2x_2px_1 + 2x_2^2p. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Матрица квадратичной формы (5.11) имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 2+p & 1 & -1 \\ 2+p & 2+2p & 1 & -1-p \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-p & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.12)$$

Квадрика невырожденная, поскольку

$$\det(W) = p^2 \neq 0. \quad (5.13)$$

Матрица квадратичной формы, содержащейся в (4.10), есть матрица

$$w = \begin{vmatrix} 2 & 2+p & 1 \\ 2+p & 2+2p & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Её главные угловые миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = -p^2 < 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Мы получили кусок гиперболического параболоида, для которого прямые l_1 и l_2 входят в одну из демиквадрик.

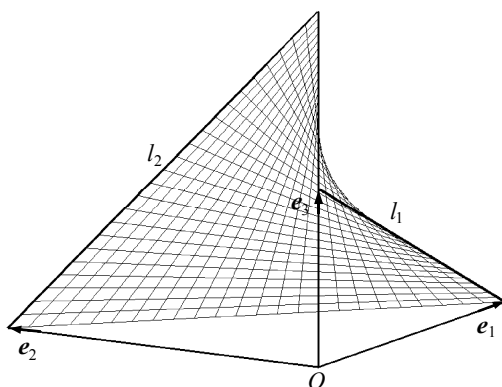


Рис. 8. Кусок гиперболического параболоида, полученного соединением прямых l_1 и l_2

Ясно, что ось аппликат входит в другую демиквадрику того же гиперболического параболоида.

Определение. Прямые l_1 и l_2 будем называть опорными прямыми гиперболического параболоида (5.10).

6. Отклонение демиквадрики от нормальной конгруэнции

Как уже было заявлено, наша цель – соединить точки параболоида линией L , локально близкой к геодезической линии. Мы не располагаем возможностью придать этой фразе уточняющий смысл, приводящий к корректной геометрической задаче. Самое большее, что нам доступно (сейчас, по крайней мере) – это предложить способ построения такой линии и получить разумную оценку качества избранного пути. Следует отметить, что построения в данном пункте носят «разведывательный» характер. Их цель – убедиться в оправданности нашего способа действий в принципе, чтобы иметь основу для более точной постановки задачи в следующей публикации, имея в виду практическое применение полученных результатов.

Пусть требуется соединить точки A_1 и A_2 параболоида вращения линией L . Нормали l_1 и l_2 в соответствующих точках используем в качестве опорных прямых гиперболического параболоида. В качестве линии L используем линию пересече-

чения соответствующего куска гиперболического параболоида с параболоидом вращения. Точки же $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ области $\widehat{\mathbb{R}^3}$ при этом соединяются некоторым отрезком прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Цель данного пункта – оценить меру отклонения точек указанного отрезка от поверхности Σ , изображающей нормальную конгруэнцию $\mathfrak{Z}$ параболоида.

Пусть по (4.6) точки $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ имеют координаты

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 & \left(a_1 + 2(a_1^2 + b_1^2)a_1, b_1 + 2(a_1^2 + b_1^2)b_1, \frac{1}{2} + a_1^2 + b_1^2 \right), \\ \tilde{l}_2 & \left(a_2 + 2(a_2^2 + b_2^2)a_2, b_2 + 2(a_2^2 + b_2^2)b_2, \frac{1}{2} + a_2^2 + b_2^2 \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Текущая точка отрезка $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$ имеет в $\mathbb{R}^3$ радиус-вектор

$$R = (1-t)\tilde{l}_1 + t\tilde{l}_2, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (6.2)$$

Как это часто делается, отождествляем в $\mathbb{R}^3$ точку и её радиус-вектор. Поверхность Σ , согласно (4.7), задаем радиус-вектором

$$W = \left\{ r \cos(T) (1 + 2r^2), r \sin(T) (1 + 2r^2), \frac{1}{2} + r^2 \right\}, \quad (0 < r \leq 1, 0 < T \leq 2\pi). \quad (6.3)$$

Квадрат расстояния от текущей точки отрезка $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$ до текущей точки поверхности Σ равен

$$f = \sum_{i=1}^3 (R_i - W_i)^2; \quad (6.4)$$

f есть функция семи аргументов и чрезвычайно сложна для анализа. Её можно табулировать, но и для таблицы число входов слишком велико. Их количество поддается уменьшению. На плоскости параметров (a, b) отметим точки $E_1(a_1, b_1), E_2(a_2, b_2)$. На той же плоскости введем полярную систему координат $(O, \vec{m})$ таким образом, что точка O совпадает с вершиной декартова репера, а полярная ось $\vec{m}$ делит пополам угол $E_1 O E_2$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= u_1 \cos v, \quad b_1 = u_1 \sin v, \quad a_2 = u_2 \cos v, \quad b_2 = -u_2 \sin v, \\ 0 &\leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq u_2 \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Число параметров уменьшено на 1 (вместо двух независимых полярных углов – один), и это не повлияло на общность построений. Следующий шаг уменьшения числа параметров, однако, вносит некоторое ограничение (на наш взгляд, не принципиальное). Именно, полагаем

$$u_2 = 1 - u_1. \quad (6.6)$$

Теперь (6.2) принимает вид

$$\begin{aligned} R &= \left\{ -\cos v (-u_1 - 2u_1^3 + 8tu_1 + 4tu_1^3 - 3t - 6tu_1^2), \right. \\ &\quad \left. -\sin v (-u_1 - 2u_1^3 + 3t - 6tu_1 + 6tu_1^2), \frac{1}{2} + u_1^2 + t - 2tu_1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

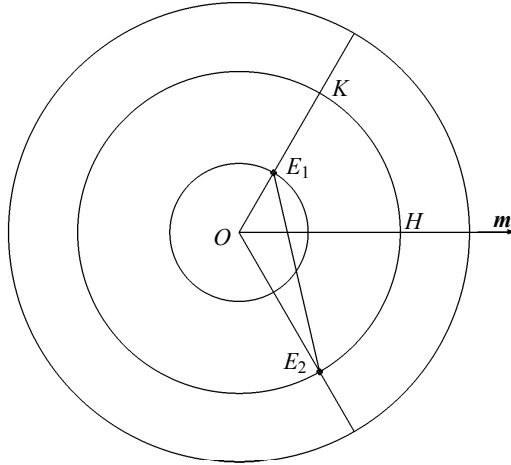


Рис. 9. Точки E_1 и E_2 на полярной плоскости.
 $\angle HOK = v$, $\angle HOE_2 = -v$, $|OE_1| = u_1$, $|OE_2| = 1 - u_1$

Зафиксируем параметры, от которых зависит положение точки R , то есть u_1, v, t . Тогда значение функции f определяется значениями параметров r и T . Стационарные значения этой функции достигаются при тех значениях указанных параметров, при которых выполнены равенства

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \frac{\partial f}{\partial T} = 0. \quad (6.8)$$

Априори нет гарантий, что стационарные значения и есть наименьшие. Однако истинные экстремумы во всяком случае не больше стационарных значений, так что верхние оценки наименьших значений функции f мы, во всяком случае, получим.

Уравнения (6.8) в развернутой записи чрезвычайно громоздки, и здесь не приведены. Поскольку мы организуем исследование по табличному образцу, то дело сведется к численному решению систем уравнений, пусть и очень сложных. Следует учесть, что Maple – не идеальная система компьютерной алгебры и вполне способна допускать сбои при решении уравнений с тригонометрическими функциями. Поэтому после вычисления производных, входящих в (6.8), заменяем тригонометрические функции параметра T :

$$\cos T = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad \sin T = \frac{2w}{1 + w^2}.$$

Результаты вычислений оформлены в виде серии таблиц. При этом параметр t принимает значения $\frac{i}{m}$, угол v принимает значения $\frac{j\pi}{4m}$, где $i = 0, \dots, m$; $j = 0, \dots, m$, и m – число градаций для соответствующего промежутка.

С целью избежать чрезмерного размера текста, принято $m = 4$. Кроме того, значения, по модулю не превосходящие 10^{-100} , автор отождествлял с нулем.

**Верхние оценки минимальных значений функции f
при различных значениях параметров u_1, t, v**

$u_1 = 0.1$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000033
0.500000	0.000000	0.000499
0.750000	0.000000	0.000362
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	0.000014
0.500000	0.196350	0.000443
0.750000	0.196350	0.000340
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	$0.334106 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.392699	0.000302
0.750000	0.392699	0.000279
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.000110
0.500000	0.589049	0.000139
0.750000	0.589049	0.000199
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.000449
0.500000	0.785398	0.000026
0.750000	0.785398	0.000122
1.000000	0.785398	0.000000

$u_1 = 0.2$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000039
0.500000	0.000000	0.000208
0.750000	0.000000	0.000145
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	$0.759231 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.196350	0.000139
0.750000	0.196350	0.000115
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.000025
0.500000	0.392699	0.000018
0.750000	0.392699	0.000048
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.000555
0.500000	0.589049	0.000057
0.750000	0.589049	$0.142069 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.001974
0.500000	0.785398	0.000485
0.750000	0.785398	0.000032
1.000000	0.785398	0.000000

Продолжение таблицы

$u_1 = 0.3$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	0.000016
0.500000	0.000000	0.000049
0.750000	0.000000	0.000033
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	$0.165869 \cdot 10^{-6}$
0.500000	0.196350	$0.930863 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.196350	0.000013
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.000177
0.500000	0.392699	0.000072
0.750000	0.392699	$0.738750 \cdot 10^{-5}$

$u_1 = 0.4$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
0.000000	0.000000	0.000000
0.250000	0.000000	$0.151372 \cdot 10^{-5}$
0.500000	0.000000	$0.335241 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.000000	$0.212844 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.196350	0.000000
0.250000	0.196350	0.000011
0.500000	0.196350	$0.981345 \cdot 10^{-5}$
0.750000	0.196350	$0.279079 \cdot 10^{-5}$
1.000000	0.196350	0.000000
0.000000	0.392699	0.000000
0.250000	0.392699	0.000027
0.500000	0.392699	0.000317
0.750000	0.392699	0.000116

Окончание таблицы

$u_1 = 0.3$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.001174
0.500000	0.589049	0.000715
0.750000	0.589049	0.000152
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.003879
0.500000	0.785398	0.002505
0.750000	0.785398	0.000579
1.000000	0.785398	0.000000

$u_1 = 0.4$		
Параметр t	Угол v	Верхняя оценка минимума отклонения
1.000000	0.392699	0.000000
0.000000	0.589049	0.000000
0.250000	0.589049	0.001466
0.500000	0.589049	0.001727
0.750000	0.589049	0.000624
1.000000	0.589049	0.000000
0.000000	0.785398	0.000000
0.250000	0.785398	0.004517
0.500000	0.785398	0.005343
0.750000	0.785398	0.001825
1.000000	0.785398	0.000000

7. Заключение

Заключение носит предварительный характер. Предстоит решить следующие задачи. Для линии пересечения демиквадрики с параболоидом построить 1-семейство главных нормалей и вычислить меру отклонения их от нормалей параболоида в соответствующих точках. Наконец, построить процедуру, позволяющую отнести указанную линию к натуральному параметру. Решение этих задач – в следующих публикациях.

8. Исправление

В статью [14] по недосмотру одного из авторов вкралось досадное недоразумение. На стр. 9 после рис. 4 уравнение линии должно иметь вид

$$Y = 0.00003281 + 0.022860 X + 0.00017870 X^2 - 0.0021397 X^3 + \\ + 0.00006064 X^4 + 0.0000041634 X^5.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956. 250 с.
2. *Щербаков Р.Н.* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960. 194 с.
3. *Щербаков Р.Н., Лучинин А.А.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Томск: ТГУ, 1974. 250 с.
4. *Рашиевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
5. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960. 559 с.
6. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 528 с.
7. *Кованцов Н.И.* Теория комплексов. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1963. 292 с.
8. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
9. *Фиников С.П.* Теория пар конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1956. 443 с.
10. *Зейлигер Д.Н.* Комплексная линейчатая геометрия. Л.-М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. 195 с.
11. *Фиников С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, ГТТЛ, 1937. 263 с.
12. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: МГУ, 1960. 307 с.
13. *Шварц Лоран.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972. 824 с.

14. Бухтыак М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 5–14.

Статья поступила 12.07.2015 г.

Bukhtyak M.S. NORMAL CONGRUENCE OF PARABOLOID. DEMIQUADRICS

DOI 10.17223/19988621/37/1

It is an important problem to build a family of lines on the paraboloid of rotation with certain properties convenient for metallic mesh tailoring upon designing and manufacturing a parabolic antenna. Namely, the lines of this family should be locally close to geodesic lines to a reasonable extent, and an algorithm relating the line of this family to the natural parameter is also necessary. The first and important step has been made in solving the problem: a class of surfaces whose intersection with the paraboloid generates a class of lines promising for the achievement of the declared goals is revealed. These surfaces are demiquadrics associated in a special way with the normal congruence of the paraboloid.

Keywords: paraboloid, antenna, geodesic line, normal congruence, demiquadrics.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

REFERENCES

1. de Ram Zh. *Differentsiruemye mnogoobraziya*. Moscow, IL Publ., 1956. 250 p. (in Russian)
2. Shcherbakov R.N. *Kurs affinnoy i proektivnoy differentsial'noy geometrii*. Tomsk, Izd-vo Tom. un-ta, 1960. 194 p. (in Russian)
3. Shcherbakov R.N., Luchinin A.A. *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii*. Tomsk, TGU Publ., 1974. 250 p. (in Russian)
4. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 428 p. (in Russian)
5. Favar Zh. *Kurs lokal'noy differentsial'noy geometrii*. Moscow, IL Publ., 1960. 559 p. (in Russian)
6. Finikov S.P. *Teoriya kongruentsiy*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 528 p. (in Russian)
7. Kovantsov N.I. *Teoriya kompleksov*. Kiev, Izd-vo Kiev. un-ta, 1963. 292 p. (in Russian)
8. Kleyn F. *Vyshshaya geometriya*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 400 p. (in Russian)
9. Finikov S.P. *Teoriya par kongruentsiy*. Moscow, GITTL Publ., 1956. 443 p. (in Russian)
10. Zeyliger D.N. *Kompleksnaya lineychataya geometriya*. Leningrad, Moscow, ONTI GTTI Publ., 1934. 195 p. (in Russian)
11. Finikov S.P. *Proektivno-differentsial'naya geometriya*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP, GTTL, 1937. 263 p. (in Russian)
12. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere*. Moscow, MGU Publ., 1960. 307 p. (in Russian)
13. Shvarts Loran. *Analiz*. Moscow, Mir Publ., 1972, vol. 2, 824 p. (in Russian)
14. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 5–14. (in Russian)

Ю.Н. Захаров, В.Н. Крутиков, Я.Н. Вершинин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ¹

Исследована возможность решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса многошаговыми итерационными методами минимизации, обладающими свойствами метода сопряженных градиентов. Использовались метод сопряженных градиентов и многошаговый релаксационный субградиентный метод.

Ключевые слова: *уравнение Навье – Стокса, метод оптимизации, многошаговый метод минимизации, субградиентный метод, метод сопряженных градиентов.*

Существуют два подхода численного решения стационарных задач для системы уравнений Навье – Стокса, описывающей движение вязкой однородной несжимаемой жидкости. Один, и он наиболее часто используемый, сводится к решению каким-либо приближенным методом нестационарной задачи для системы уравнений Навье – Стокса и получение в пределе установившегося решения. Другой, менее популярный метод, заключается в построении системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) с помощью какой-либо аппроксимации решаемой стационарной задачи, а затем полученная система решается итерационными методами. Обзор обоих подходов можно найти в [1]. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. Главными достоинствами второго подхода к решению стационарных задач являются: 1) при сходимости итерационного процесса автоматически выполняется условие несжимаемости ($\operatorname{div} u = 0$), 2) можно использовать сложно реализуемые обычным способом краевые условия (см. [2–4]); 3) такой способ решения стационарных задач не зависит от способа замены стационарной системы уравнений Навье – Стокса на СНАУ. Недостатки данного подхода связаны с тем фактом, что итерационные методы решения СНАУ для своей сходимости требуют ограничений на нелинейные операторы системы и начальное приближение, что существенно ограничивает возможность применения этого метода решения стационарных задач (см. [5–7]). В работах [1, 8–12] был рассмотрен итерационный метод неполной аппроксимации решения разностных задач аппроксимирующих различные стационарные задачи для системы уравнений Навье – Стокса, основанный на минимизации нормы невязки, который оказался достаточно эффективным при их решении.

Для минимизации нормы невязки можно использовать методы оптимизации (МО), которые применяются для поиска минимумов многомерных функций. В настоящей работе рассматривается возможность решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса итерационными методами минимизации [13–23], которые обладают свойствами метода сопряженных градиентов на квадратичных функциях [13].

¹ Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания № 1.630.2014/К.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в ограниченной области Ω следующую стационарную задачу:

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p = \nu \cdot \Delta \vec{u}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0; \quad (2)$$

$$l(\vec{u}) = 0, \quad (3)$$

где Γ граница Ω , $\vec{u}$ – двухмерный или трехмерный вектор скоростей, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, $l(\vec{u})$ – некоторые краевые условия. В дальнейшем считаем, что задача (1) – (3) поставлена корректно.

Для решения задачи (1) – (3) будем использовать метод сеток (хотя все дальнейшие выкладки и выводы справедливы и для других численных методов решения задачи (1) – (3)), который заключается в построении сетки в области Ω и замене слагаемых в (1) разностными соотношениями (см. [21–23]). В итоге получаем, с учетом краевых условий (3), систему нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), размерность которой пропорциональна числу точек в $\Omega \cup \Gamma$, в которых необходимо вычислять скорость и давление. Таким образом, не углубляясь в методы замены задачи (1) – (3) СНАУ, в итоге имеем систему вида (более подробно смотри [1])

$$A(u, u) = f, \quad (4)$$

где $u \in R^m$ $A(u, u) = A_1(u, u) + A_2 u$, $A_1(u, u)$ – билинейное отображение, A_2 – линейный оператор в векторном пространстве E_m компонент вектора скоростей и давления.

Один из подходов решения систем нелинейных уравнений (4), аппроксимирующих уравнения гидродинамики (1) – (3), состоит в сведении задачи решения системы уравнений

$$r_i(u) = (A(u, u) - f)_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad u \in R^m, \quad (5)$$

к задаче минимизации нормы невязки (см. [1])

$$\|r\|^2 = f(u) = \sum_{i=1}^m r_i^2(u), \quad u \in R^m. \quad (6)$$

Здесь m – размерность задачи.

Развитые в [1] итерационные методы решения системы (4) основываются на специально разработанных схемах построения сопряженных направлений для задачи минимизации (6) и дают надежду на возможность использования специализированных методов оптимизации. В работе исследуется возможность решения систем уравнений гидродинамики (1) методами минимизации, использующими значения функции $f(u)$ и градиента $\nabla f(u)$. В отличие от специализированных методов, где кроме функции и градиента используется дополнительная информация в виде матриц, при использовании МО сокращается время подготовки задачи для счета. При использовании МО несложно наложить на решение дополнительные ограничения, например в виде функционалов регуляризации, которые трансформируются в дополнительные изменения вида функции $f(u)$ (6). Другой важный фактор актуальности использования МО состоит в том, что их применение не наталкивается на ограничения характеристик функции, накладываемые итераци-

онным процессом, например, на ограничения свойств матриц линеаризации уравнений (5) или гессиана (6). С другой стороны, поскольку при нелинейности уравнений (5) для МО не существует доказательства их сходимости к требуемому решению и оценок их скорости сходимости, то эти вопросы следует изучать на основании вычислительного опыта.

С учетом эффективности существующих универсальных МО градиентного типа, ограничимся исследованием возможности использования применительно к задаче (6) релаксационных методов, которые при определенных условиях на квадратичных функциях обладают свойствами метода сопряженных градиентов (МСГ) [13, 14]. Свойства МСГ следующие: 1) на квадратичных функциях последовательные направления спуска в МСГ являются сопряженными векторами, что обеспечивает конечное окончание процесса за число итераций, не превосходящее размерность задачи m [16], при этом генерация последовательности не требует хранения всей системы сопряженных векторов; 2) на гладких функциях, в силу справедливости квадратичного представления функции в некоторой локальной окрестности точки, свойство конечной сходимости метода на квадратичных функциях существенно влияет на увеличение скорости сходимости метода минимизации.

Свойством генерации последовательности сопряженных направлений обладают следующие классы методов: 1) методы сопряженных градиентов [13, 14]; 2) квазиньютоновские методы [16, 17]; 3) многошаговые релаксационные субградиентные методы [24–29]; 4) релаксационные субградиентные методы с растяжением пространства [16–20]. Методы классов 1 и 2 основаны на квадратичной модели функции [13, 14], а алгоритмы классов 3 и 4 организованы по типу ε -субградиентных методов [15]. В методах классов 1 и 3 требуемая память для хранения промежуточной информации и вычислительные затраты на итерации пропорциональны размерности пространства m . В методах классов 2 и 4 аналогичные затраты пропорциональны m^2 , что ограничивает их применение в задачах высокой размерности.

На предварительном этапе отбора методов при малых размерностях численно исследовались алгоритмы классов 2 и 4: квазиньютоновский метод, основанный на формуле BFGS [14] и субградиентный метод с растяжением – сжатием пространства [18]. Перечисленные алгоритмы по затратам вычислений функции и градиента минимизируемой функции на порядок превосходят используемые методы классов 1 и 3. В силу их неприменимости в задачах высокой размерности для решения поставленных задач использовались только методы классов 1 и 3.

2. Используемые методы оптимизации

Для решения задачи минимизации (6) было выбрано два метода, описание которых приведено ниже.

1. Общая схема релаксационного процесса минимизации. Итерация рассматриваемых в работе релаксационных МО с точным одномерным спуском имеет вид

$$u^{n+1} = u^n - \alpha_n s^n, \quad \alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(u^n - \alpha s^n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где задается начальная точка u^0 , а s^n – градиентно-согласованное направление спуска, т.е. $(\nabla f(u^n), s^n) > 0$.

2. Метод сопряжённых градиентов. В методах сопряженных градиентов (МСГ) направление спуска вычисляется по правилу

$$s^0 = g^0, \quad s^n = g^n + \beta_n s^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где параметр $\beta_n = 0$ при n кратном m , а при n не кратном m вычисляется по одной из формул [10, 11]:

$$\text{а) } \beta_n = -\frac{(g^n, y^{n-1})}{(y^{n-1}, s^{n-1})}; \quad \text{б) } \beta_n = \frac{(g^n, y^{n-1})}{(g^{n-1}, g^{n-1})}; \quad \text{в) } \beta_n = \frac{(g^n, g^n)}{(g^{n-1}, g^{n-1})}. \quad (9)$$

Здесь принято обозначение $g^n = \nabla f(u^n)$, $y^{n-1} = \nabla f(u^n) - \nabla f(u^{n-1})$. Схемы МСГ в соответствии с (9) будем обозначать МСГа, МСГб и МСГв.

3. Многошаговый релаксационный субградиентный метод [21, 22]. Как отмечено в [14], зачастую метод сопряженных градиентов является единственным универсальным средством решения большеразмерных задач. К недостаткам метода следует отнести необходимость высокой точности одномерного спуска и быстрое накопление погрешностей в вычислении сопряженных направлений даже в случае квадратичных функций (см. [13, 14]). По этой причине в работе для решения гладких задач минимизации использован релаксационный субградиентный метод [21, 22], менее требовательный к точности одномерного спуска. Направление спуска этого алгоритма формируется по схеме [22]

$$s^0 = \frac{g^0}{(g^0, g^0)}, \quad s^n = s^{n-1} + \frac{1 - (s^{n-1}, g^n)}{(p^n, g^n)} p^n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (10)$$

$$p^n = \begin{cases} g^n, & \text{если } (g^n, g^{n-1}) \geq 0, \\ g^n - \frac{(g^n, g^{n-1})}{\|g^{n-1}\|^2} g^{n-1}, & \text{если } (g^n, g^{n-1}) < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $g^n = \nabla f(u^n)$.

Алгоритм (7), (10), (11) [22] (назовем его МРСМ) предложен в [22] для минимизации негладких функций и является упрощением алгоритма из [21]. На квадратичных функциях он генерирует последовательность приближений минимума, идентичную последовательности, генерируемой алгоритмами МСГ. Алгоритм МРСМ хорошо зарекомендовал себя при решении негладких задач высокой размерности. В работе [20] приводятся результаты решения этим методом регуляризованной задачи линейного программирования высокой размерности с двухсторонними ограничениями.

Отличия использованных алгоритмов существенно. В МРСМ используется менее точный одномерный поиск, нежели в МСГ. При обмене процедурами одномерной минимизации эффективность обоих методов резко снижается. Субградиентный метод МРСМ использует технику выбора направления спуска, согласованного с направлениями субградиента некоторой окрестности, что обеспечивает выход метода из этой окрестности с одновременным уменьшением минимизируемой функции [15]. Низкая точность одномерного поиска для субградиентных методов более предпочтительна, поскольку обеспечивает охват и последующий выход из более широкой окрестности.

В реализациях методов МСГ_а, МСГ_б, МСГ_в и МРСМ использовался одномерный поиск с кубической интерполяцией, точность поиска минимума которого настроена так, чтобы минимизировать количество вычислений функции и градиента, необходимых для реализации метода.

3. Результаты численных расчётов

Прежде чем обсуждать представляемые результаты расчетов, следует отметить, что полученные нами решения, как в двухмерном, так и в трехмерном случаях, сравнивались с решениями, полученными другими авторами (см. [1, 27 – 32] и цитируемую там литературу). Это сопоставление показало, что наши результаты качественно и количественно совпадают с известными расчетами.

Для проверки возможности численного решения стационарных задач для системы уравнений (1) – (3) методами оптимизации решались следующие типичные и хорошо известные краевые задачи (см. [1]).

В дальнейшем двумерный вектор скорости имеет вид $\vec{u} = (u, v)$, а трехмерный – $\vec{u} = (u, v, w)$.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. Задача Дирихле для одномерного уравнения Бюргерса:

$$u \frac{du}{dx} = \nu \frac{du}{dx^2} + l(x), \quad x \in (a, b), \quad (13)$$

$$u(a) = \varphi_1, \quad u(b) = \varphi_2,$$

где φ_1, φ_2 – заданные постоянные, $l(x)$ – известная функция.

Задача 2. Двумерное течение в прямоугольном канале (рис. 1).

Задача 3. Двумерное течение в канале с уступом (рис. 2).

Задача 4. Двумерное течение в квадратной каверне (рис. 6).

Задача 5. Трехмерное течение в единичной кубической каверне (рис. 10).

В области решения введём равномерную согласованную с границей сетку, на которой аппроксимируем задачи 1 – 5 со вторым порядком. Для решения полученных разностных задач, являющихся системами нелинейных уравнений (4), использовались следующие алгоритмы минимизации МСГ_а и МРСМ (см. п.2). Функция и градиент во всех методах вычислялись одновременно. Останов алгоритма осуществлялся при достижении требуемой точности ε по правилу $f^n = f(u^n) \leq \varepsilon$.

При решении отмеченных стационарных задач для системы уравнений (1) – (3) оказалось, что методы сопряженных градиентов МСГ_а, МСГ_б и МСГ_в практически эквивалентны. Поэтому приводим результаты только для метода МСГ_а.

В таблицах указаны размерность m , параметры используемых сеток, точность ε , число итераций (It), количество вычислений функции и градиента (Nfg), необходимые для достижения заданной точности ε . Сравнение методов будем проводить на основе величины Nfg, так как одно вычисление Nfg превосходит по вычислительной ёмкости алгоритмические затраты метода на одну итерацию в итерационных методах решения ЧНАУ.

Далее на всех рисунках приведены полученные линии тока, а в таблицах значения количества итераций, вычислений правых частей и градиента.

В табл. 1 приведены результаты расчетов задачи Дирихле для разностной задачи

$$u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \nu \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$u_0 = A, \quad u_m = B, \quad h = \frac{(b-a)}{m},$$

аппроксимирующей (13).

Здесь правая часть и постоянные A, B заданы так, чтобы решение задачи (13) имело вид $\sin(\pi x)$

Таблица 1

Одномерные уравнения Бюргера $\nu = 0.001$

Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	MPCM	МСТга
$m = 500,$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	40570 68000	59659 119421
$m = 1000,$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	358411 592019	578891 1158354

На рис. 1 и в табл. 2 приведено решение задачи 2

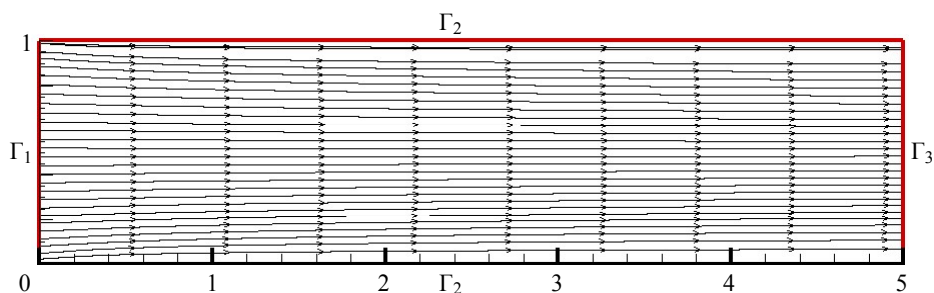


Рис. 1. Канал $\nu = 0.001$, $\vec{u}|_{\Gamma_2} = 0$, $u|_{\Gamma_1} = 1$, $v|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_3} = 0$, $v|_{\Gamma_3} = 0$;

$$Nx=100, Ny=500, h=0.01$$

Таблица 2

Двумерный канал $\nu = 0.001$

Nx, Ny	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	MPCM	МСТга
$Nx = 30$ $Ny = 150$	$m = 13323$ $\varepsilon = 10^{-18}$	It Nfg	4692 8442	4582 9321
$Nx = 50$ $Ny = 250$	$m = 37203$ $\varepsilon = 10^{-12}$	It Nfg	9871 16668	7808 15885

В табл. 3 и на рис. 2 – 5 приведены результаты решения задачи 3.

В табл. 4 и рис. 6 – 9 приведены результаты решения задачи 4.

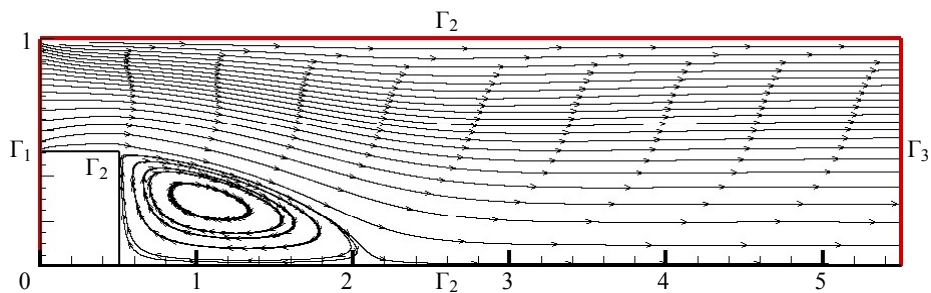


Рис. 2. Канал с уступом, $\nu = 0.008$. $\bar{u}|_{\Gamma_2} = 0$, $u|_{\Gamma_1} = 1$, $v|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_3} = 0$, $v|_{\Gamma_3} = 0$;

$h = 0.01$ ($Nx = 550$, $Ny = 100$)

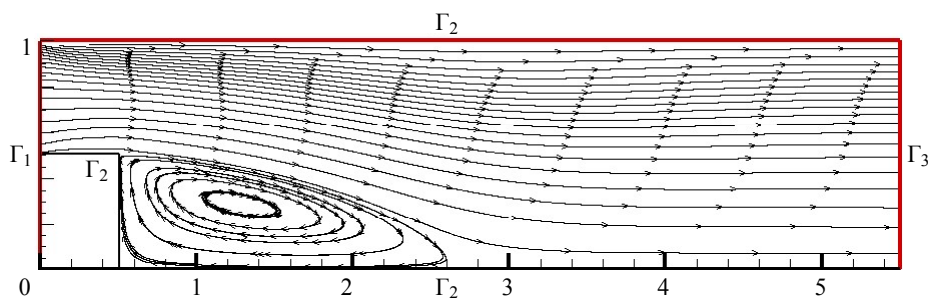


Рис. 3. Канал с уступом, $\nu = 0.005$, $h = 0.01$

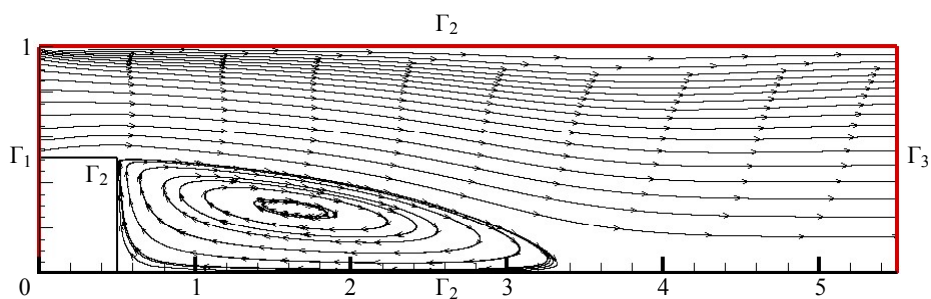


Рис. 4. Канал с уступом, $\nu = 0.003$, $h = 0.01$

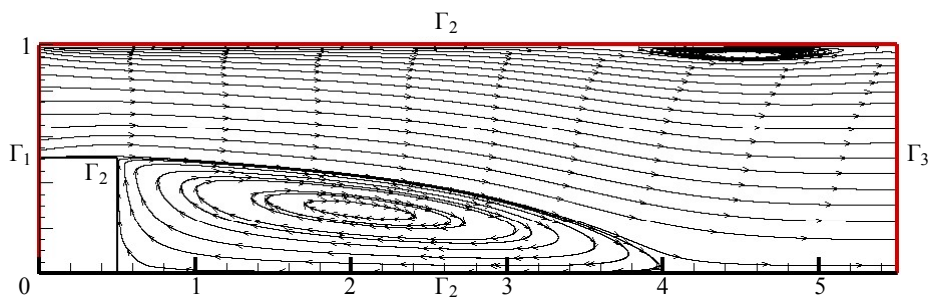


Рис. 5. Канал с уступом, $\nu = 0.002$, $h = 0.01$

Таблица 3

Двумерный канал с уступом

ν	N_x, N_y	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
0.002	$N_x = 30$ $N_y = 165$	$m = 14012$ $\varepsilon = 2.6 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	9000 15304	8400 16892
	$N_x = 50$ $N_y = 275$	$m = 39102$ $\varepsilon = 3.5 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	10001 17690	9600 19354
0.002	$N_x = 100$ $N_y = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 3.080 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	10800 19870	10400 21110
	$N_x = 100$ $N_y = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 4.679 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	7800 15495	7500 15300
0.005	$N_x = 100$ $N_y = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 6.6958 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	8500 16437	8300 16855
	$N_x = 100$ $N_y = 550$	$m = 156952$ $\varepsilon = 7.4679 \cdot 10^{-4}$	It Nfg	9600 17709	9400 18957

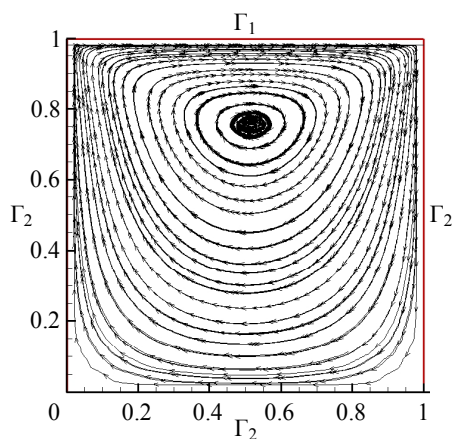


Рис. 6. Двумерная каверна $\nu = 0.1$.

$\vec{u}|_{\Gamma_2} = 0, u|_{\Gamma_1} = 1, v|_{\Gamma_1} = 0; N_x = N_y = 50, h = 0.02$

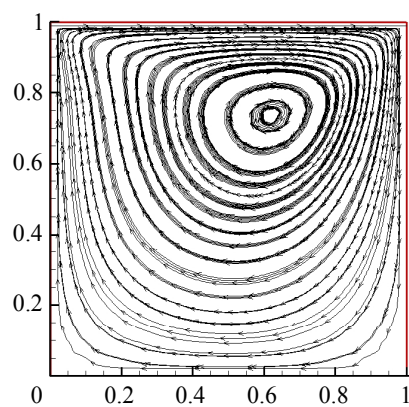


Рис. 7. Двумерная каверна $\nu = 0.01$.

$N_x = N_y = 50, h = 0$

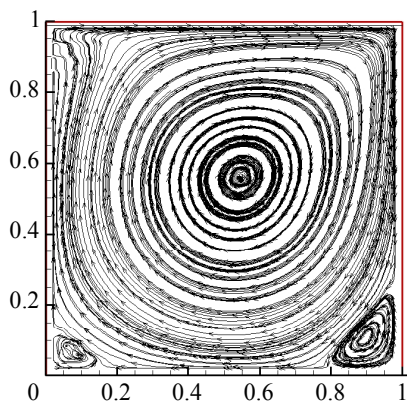


Рис. 8. Двумерная каверна, $\nu = 0.001$.

$N_x = N_y = 50, h = 0.02$

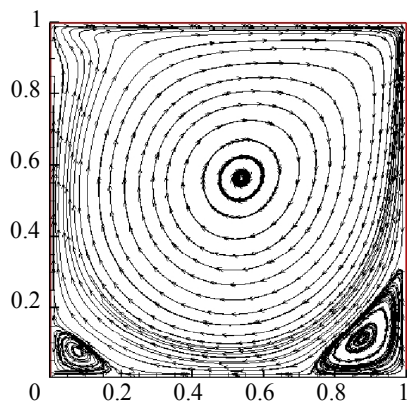


Рис. 9. Двумерная каверна, $\nu = 0.001$.

$N_x = N_y = 100, h = 0.01$

Таблица 4

Двумерная каверна $\nu = 0.001$

Nx, Ny	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
$Nx = Ny = 50$	$m = 7403$ $\varepsilon = 10^{-17}$	It Nfg	14275 23566	12252 24508
$Nx = Ny = 100$	$m = 29803$ $\varepsilon = 10^{-19}$	It Nfg	35573 56372	35384 70780

В табл. 5 и на рис. 10 – 12 приведены результаты решения задачи 5 с коэффициентом вязкости $\nu = 0.01$. На рис. 10 – 12 $Nx = Ny = Nz = 50, h = 0.02$.

Таблица 5

Трёхмерная каверна, $\nu = 0.01$

$Nx = Ny = Nz$	Размерность/точность	Итерации/обращения к правой части	МРСМ	МСГа
10	$m = 3518$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	455 805	413 834
20	$m = 29838$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	1500 2717	1350 2744
30	$m = 102958$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	3671 6726	3267 7351
40	$m = 246878$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	8887 16145	8658 17457
50	$m = 485598$ $\varepsilon = 10^{-15}$	It Nfg	19352 33920	19052 38307

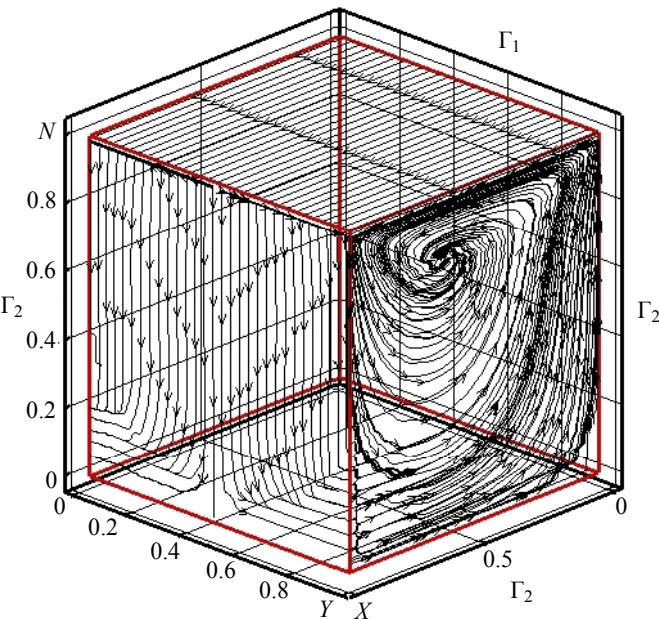


Рис. 10. Трёхмерная каверна. $\vec{u}|_{\Gamma_2} = 0, u|_{\Gamma_1} = 1, v|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1} = 0$;
Растекание по передней, правой и верхней стенкам

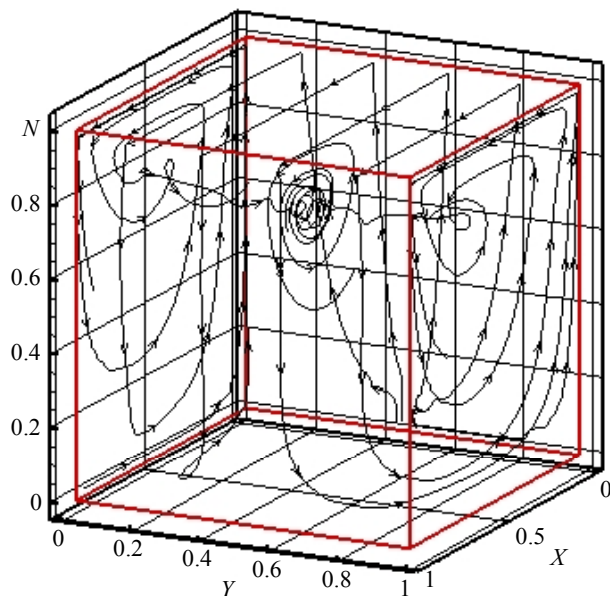


Рис. 11. Трёхмерная каверна. Течение внутри области

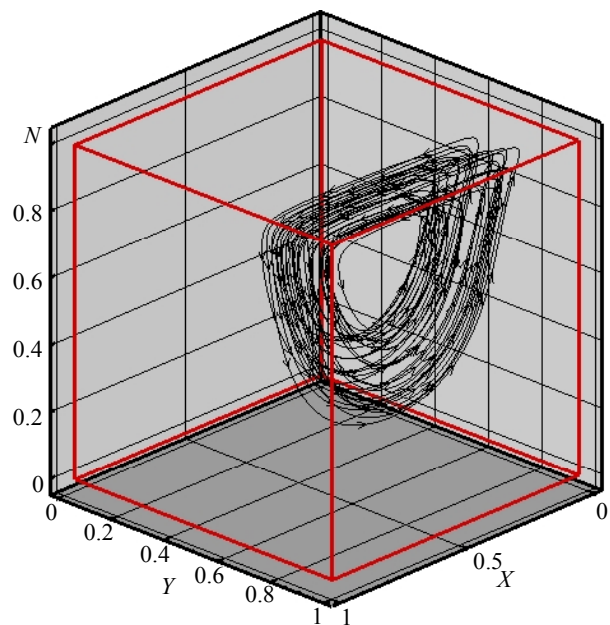


Рис. 12. Трёхмерная каверна. Треки частиц в зоне заблокированного течения

В результате проведенного вычислительного эксперимента выяснилось, что используемые методы оптимизации для решения разностных задач, аппроксимирующих системы уравнений Навье – Стокса, успешно справились с их решением

за разумное время. Отмеченные результаты позволяют расширить круг методов решения разностных задач, аппроксимирующих стационарную систему уравнений Навье – Стокса, что особенно важно в условиях минимизации сложных многоэкстремальных функций, где зачастую приходится использовать несколько методов оптимизации для того, чтобы обойти сложные области минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 239 с.
2. Захаров Ю.Н. Об одном методе решения уравнений с краевыми условиями на бесконечности // Вычислительные технологии. 1993. Т. 2. № 7. С. 56–68.
3. Захаров Ю.Н. Об одном методе решения стационарной задачи обтекания // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 3. С. 11–17.
4. Захаров Ю.Н., Гейдаров Н.А., Шокин Ю.И. Решение стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом давления, при наличии внутренних источников // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 5. С. 14–23.
5. Бабский В.Г., Скловский Ю.Б. Применение метода Ньютона – Канторовича к расчету течения вязкой жидкости между вращающимися эксцентричными цилиндрами // Тр. IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. С. 63–67.
6. Лапко С.А. Итерационные процессы реализации неявных разностных схем для уравнений вязкой несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1222–1224.
7. Beam Richard M., Bailey Harry E. Newton's methods for the Navier-Stokes equations // Comput. Mech. '88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, Ga, Apr. 10–14. Berlin, 1988. V. 2. P. 51.II.1–51.II.4.
8. Захаров Ю.Н., Толстых М.А. Многопараметрическая оптимизация итерационных схем решения уравнений с полиномиальной нелинейностью // Моделирование в механике. Новосибирск, 1990. Т. 4 (21). № 1. С. 109–114.
9. Balaganckii M.Yu., Zakharov Yu. N., Shokin Yu. I. Comparison of two-and three-dimensional steady flows of a homogeneous viscous incompressible fluid // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2009. V. 24. No. 1. P. 1–14.
10. Milosevic H., Gaydarov N.A., Zakharov Y.N. Model of incompressible viscous fluid flow driven by pressure difference in a given channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. V. 62. P. 242 – 246.
11. Geidarov N.A., Zakharov Y.N., Shokin Yi.I. Solution of the problem of viscous fluid flow with a given pressure differential // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. V. 26. No. 1. P. 39–48.
12. Захаров Ю.Н., Иванов К.С. Об использовании градиентных итерационных методов при решении начально-краевых задач для трёхмерной системы уравнений Навье – Стокса // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 2. С. 55–69.
13. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
14. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
15. Крутиков В.Н. Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение. Томск: Изд-во Том. гос. педагогич. ун-та, 2008. 264 с.
16. Крутиков В.Н., Петрова Т.В. Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента // Экономика и мат. методы. 2003. Т. 39. Вып. 1. С. 33–49.
17. Крутиков В.Н., Горская Т.А. Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики // Экономика и мат. методы. 2009. Т. 45. № 4. С. 37–80.
18. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 199 с.

19. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1972. 368 с.
20. Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н. Алгоритмы обучения на основе ортогонализации последовательных векторов // Вестник КемГУ. 2012. Вып. 2 (50). С. 37–42.
21. Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н. Многошаговый субградиентный метод для решения негладких задач минимизации высокой размерности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3. С. 5–19
22. Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н. Субградиентный метод минимизации с коррекцией векторов спуска на основе пар обучающих соотношений // Вестник КемГУ. 2014. Вып. 1(1). С. 46–54.
23. Вершинин Я.Н., Быков А.А., Крутиков В.Н., Мешечкин В.В. О решении субградиентными методами регуляризованной задачи линейного программирования в системе экологического мониторинга // Вестник КемГУ. 2014. Вып. 1 (57). Т. 1. С. 35–41.
24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 601 с.
25. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
26. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
27. Исаков А.Г. К численному решению задачи с движением вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне с $Re = 1000$ // Моделирование в механике. 1990. Т. 4(21), 2. С. 64–76.
28. Исаев С.А., Судаков А.Г., Лучко Н.Н., Сидорович Т.В., Харченко В.В. Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в кубической каверне с подвижной гранью // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 1. С. 49–53.
29. Guermond J.-L., Migeon C., Pineau G., Quartapelle L. Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at $Re = 1000$ // J. Fluid Mech. 2002. V. 450. P. 169–199.
30. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю. Численное исследование рециркуляционных течений в трехмерной каверне // Журнал прикладной механики и технической физики. 1990. № 1. С. 100–104.
31. Кудинов П.И. Численные исследования трехмерного течения в удлиненной каверне с подвижной крышкой // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан, 11–14 сентября 2003 года. Казахстан: ИВТ СО РАН, 2003.
32. Кудинов П.И. Численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Днепропетровского университета. Серия Механика. Вып. 4. 2001. Т. 1. С. 89–99.

Статья поступила 27.11.2014 г.

Zakharov Y.N., Krutikov V.N., Verшинin Y.N. OPTIMIZATION METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF HYDRODYNAMICS NONLINEAR EQUATIONS

DOI 10.17223/19988621/37/2

There are two approaches to numerical solving steady state problems for the system of Navier-Stokes equations describing the motion of a viscous homogeneous incompressible fluid. One of them, that is most commonly used, is reduced to the solution of the non-stationary problem for the Navier-Stokes equations by an approximate method and obtaining steady solutions in the limit. Another, less popular, method is to construct a system of nonlinear algebraic equations (SNAE) using any approximation of the stationary problem solved; then, the resulting system is solved by iterative methods.

Each approach has its advantages and disadvantages. The main advantages of the second approach to the solution of stationary problems are: (1) in the process of convergence of the iterative process, the condition of noncompressibility is satisfied automatically; (2) one can use boundary

conditions that are hard to implement in the usual way; (3) the method for solving stationary problems does not depend on the method of replacing the system of equations by a SNAE. Disadvantages of this approach are related to the fact that the iterative solutions of the SNAE for its convergence require restrictions on the nonlinear system operators and the initial approximation, which significantly limits the possibility of using this method for solving stationary problems.

The partial approximation method for solving difference problems approximating various stationary problems for the Navier-Stokes equations, based on the minimization of the residual norm minimization by specialized methods, was used earlier and proved to be effective. The possibility of solving difference problems approximating the stationary Navier-Stokes equations, multi-step iterative minimization possessing the properties of the CG method is investigated in this paper using the method of conjugate gradients and multi-step relaxation subgradient method (MSRSM).

The abovementioned optimization techniques have significant differences in the implementation and requirements to the accuracy of the one-dimensional descent. The conjugate gradient methods require a high precision search. The feature of relaxation subgradient methods, in particular, the MRSRM, is the search of the direction of descent for the current gradient-coordinated minimum in a neighborhood the size of which is determined by the step of minimization. This last remark explains the effectiveness of methods of this class in the rough one-dimensional search.

Both the methods have successfully coped with the posed tasks within a reasonable time and high accuracy, which is confirmed by comparing the obtained results with known ones. These results allow us to expand the range of difference methods for solving problems approximating the stationary Navier–Stokes equations, which is particularly important under conditions of minimization of multiextremal functions, where it is often necessary to use several optimization methods.

Keywords: Navier-Stokes equations, optimization method, multistep method of minimization, subgradient method, conjugate gradient method.

Zakharov Yuriy Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: zakarovyn@rambler.ru

Krutikov Vladimir Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Prof.,
Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: krutikovvn@gmail.com

Vershinin Yaroslav Nikilaevich (M. Sc, Kemerovo State University,
Kemerovo, Russian Federation)
E-mail: Azimus88@gmail.com

REFERENCES

1. Zakharov Yu.N. *Gradientnye iteratsionnye metody resheniya zadach gidrodinamiki*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2004. 239 p. (in Russian)
2. Zakharov Yu.N. Ob odnom metode resheniya uravneniy s kraevymi usloviyami na beskonechnosti. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 1993, vol. 2, no. 7, pp. 56–68. (in Russian)
3. Zakharov Yu.N. Ob odnom metode resheniya statsionarnoy zadachi obtekaniya. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 11–17. (in Russian)
4. Zakharov Yu.N., Geydarov N.A., Shokin Yu.I. Reshenie statsionarnoy zadachi o techenii vyazkoy zhidkosti v kanale, vyzvannom zadannym perepadom davleniya, pri nalichii vnutrennikh istochnikov. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 14–23. (in Russian)
5. Babskiy V.G., Sklovskiy Yu.B. Primenenie metoda N'yutona – Kantorovicha k raschetu techeniya vyazkoy zhidkosti mezhdv vrashchayushchimisya eksstentrichnymi tsilindrami. *Tr. IV Vsesoyuznogo seminar po chislennym metodam mekhaniki vyazkoy zhidkosti*. Novosibirsk, VTs SO AN SSSR Publ., 1973, pp. 63–67. (in Russian)
6. Lapko S.A. Iteratsionnye protsessy realizatsii neyavnykh raznostnykh skhem dlya uravneniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti. *Differentsial'nye uravneniya*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1222–1224. (in Russian)

7. Beam Richard M., Bailey Harry E. Newton's methods for the Navier-Stokes equations. *Comput. Mech.* '88: *Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, Ga, Apr. 10–14*. Berlin, 1988, vol. 2, pp. 51.II.1–51.II.4.
8. Zakharov Yu.N., Tolstykh M.A. Mnogoparametricheskaya optimizatsiya iteratsionnykh skhem resheniya uravneniy s polinomial'noy nelineynost'yu. *Modelirovanie v mekhanike*. Novosibirsk, 1990, vol. 4 (21), no. 1 S. 109–114. (in Russian)
9. Balaganskii M.Yu., Zakharov Yu. N., Shokin Yu. I. Comparison of two- and three-dimensional steady flows of a homogeneous viscous incompressible fluid. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2009, vol. 24. No. 1, pp. 1–14.
10. Milosevic H., Gaydarov N.A., Zakharov Y.N. Model of incompressible viscous fluid flow driven by pressure difference in a given channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, vol. 62, pp. 242–246.
11. Geidarov N.A., Zakharov Y.N., Shokin Yi.I. Solution of the problem of viscous fluid flow with a given pressure differential. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 2011, vol. 26. No. 1, pp. 39–48.
12. Zakharov Yu.N., Ivanov K.S. Ob ispol'zovanii gradientnykh iteratsionnykh metodov pri reshenii nachal'no-kraevykh zadach dlya trekhmernoy sistemy uravneniy Nav'e – Stoksa. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 55–69. (in Russian)
13. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (in Russian)
14. Gill F., Murray U., Rayt M. *Prakticheskaya optimizatsiya*. Moscow, Mir Publ., 1985. 509 p. (in Russian)
15. Krutikov V.N. *Obuchayushchiesya metody bezuslovnoy optimizatsii i ikh primeneniye*. Tomsk, Izd-vo Tom. gos. pedagogich. un-ta, 2008. 264 p. (in Russian)
16. Krutikov V.N., Petrova T.V. Relaksatsionnyy metod minimizatsii s rastyazheniem prostranstva v napravlenii subgradienta. *Ekonomika i mat. metody*, 2003, vol. 39. no. 1, pp. 33–49. (in Russian)
17. Krutikov V.N., Gorskaya T.A. Semeystvo relaksatsionnykh subgradientnykh metodov s dvukhrangovoy korrertsiey matritsy metriki. *Ekonomika i mat. metody*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 37–80. (in Russian)
18. Shor N.Z. *Metody minimizatsii nedifferentsiruemykh funktsiy i ikh prilozheniya*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1979. 199 p. (in Russian)
19. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemyaya optimizatsiya*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 368 p. (in Russian)
20. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Algoritmy obucheniya na osnove ortogonalizatsii posledovatel'nykh vektorov. *Vestnik KemGU*, 2012, no. 2 (50), pp. 37–42. (in Russian)
21. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Mnogoshagovyy subgradientnyy metod dlya resheniya negladkikh zadach minimizatsii vysokoy razmernosti. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 3, pp. 5–19. (in Russian)
22. Krutikov V.N., Vershinin Ya.N. Subgradientnyy metod minimizatsii s korrertsiey vektorov spushka na osnove par obuchayushchikh sootnosheniy. *Vestnik KemGU*, 2014, no. 1(1), pp. 46–54. (in Russian)
23. Vershinin Ya.N., Bykov A.A., Krutikov V.N., Meshechkin V.V. O reshenii subgradientnymi metodami regularizovannoy zadachi lineynogo programmirovaniya v sisteme ekologicheskogo monitoringa. *Vestnik KemGU*, 2014, no. 1 (57), vol. 1, pp. 35–41. (in Russian)
24. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 601 p. (in Russian)
25. Yanenko N.N. *Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967. 197 p. (in Russian)
26. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 152 p. (in Russian)
27. Isakov A.G. K chislennomu resheniyu zadachi s dvizheniem vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti v kubicheskoy kaverne s $Re = 1000$. *Modelirovanie v mekhanike*, 1990, vol. 4(21), 2, pp. 64–76. (in Russian)

28. Isaev S.A., Sudakov A.G., Luchko N.N., Sidorovich T.V., Kharchenko V.V. Chislennoe modelirovanie laminarnogo tsirkulyatsionnogo techeniya v kubicheskoy kaverne s podvizhnoy gran'yu. *IFZh*, 2002, vol. 75, no. 1, pp. 49–53. (in Russian)
29. Guermond J.-L., Migeon C., Pineau G., Quartapelle L. Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at $Re = 1000$. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 450, pp. 169–199.
30. Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu. Chislennoe issledovanie retsirkulyatsionnykh techeniy v trekhmernoy kaverne. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki*, 1990, no. 1, pp. 100–104. (in Russian)
31. Kudinov P.I. Chislennyye issledovaniya trekhmernogo techeniya v udlinennoy kaverne s podvizhnoy kryshkoy. *Vychislitel'nye i informatsionnye tekhnologii v nauke, tekhnike i obrazovanii. Ust'-Kamenogorsk, Kazakhstan, 11–14 sentyabrya 2003 goda*. Kazakhstan, IVT SO RAN Publ., 2003. (in Russian)
32. Kudinov P.I. Chislennoe modelirovanie prostranstvennykh techeniy vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti. *Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta. Seriya Mekhanika*, 2001, no. 4, vol. 1, pp. 89–99. (in Russian)

А.П. Ковалевский¹, Е.В. Шаталин²**ВЫБОР РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТИ МАССЫ ТЕЛА ОТ РОСТА С ПОМОЩЬЮ ЭМПИРИЧЕСКОГО МОСТА**

Рассмотрен ряд регрессионных моделей зависимости массы тела от роста. Проведено сравнение моделей между собой с помощью конструкции эмпирического моста. В качестве исходных использованы данные Волжского государственного медицинского университета о росте и массе тела студенток первого курса.

Ключевые слова: линейная регрессия, эмпирический мост, зависимость массы тела от роста.

1. Введение и предварительные сведения

Для исследования зависимости массы тела человека W_i от роста H_i в [1] предложена модель пропорциональности массы тела квадрату роста. Отметим, что пропорциональность предполагается для лиц одной возрастной группы и одного пола. В [2] на основании масштабных исследований показано, что эта зависимость является наилучшей в классе степенных зависимостей. Эту пропорциональность можно проинтерпретировать в виде двух различных регрессионных моделей: $\ln W_i = \ln(\alpha H_i^2) + \varepsilon_i$ и $W_i = a + bH_i^2 + \varepsilon_i$. Отметим, что рост и массу тела индивидуума можно считать случайными величинами и предполагать независимость роста H_i и корректирующего фактора ε_i .

Первая из этих моделей после замены переменных $Y_i = \ln(W_i / H_i^2)$, $\theta = \ln \alpha$ приводит к модели выборки $Y_i = \theta + \varepsilon_i$, а вторая является моделью двухпараметрической линейной регрессии. Для того чтобы проверить соответствие каждой модели реальным данным, предлагается упорядочить наблюдения по неубыванию H_i .

Если модель неправильно описывает данные, то значения Y_i будут систематически уклоняться от регрессионной кривой, и это отклонение можно выявить суммированием регрессионных остатков (разностей между наблюдаемыми и прогнозируемыми значениями). Для изучения значимости этих отклонений необходимо знать предельное распределение процесса центрированных и самонормированных частичных сумм регрессионных остатков. Этот процесс называется эмпирическим мостом [3]. Нормировка, как и вообще в разных версиях центральной предельной теоремы, необходима для сходимости процесса сумм остатков к предельному. Эмпирический мост – это процесс самонормированных сумм: вместо неизвестной дисперсии регрессионных ошибок используется выборочная дисперсия регрессионных остатков. Отметим, что в случае равенства суммы регрессионных остатков нулю п.н. (как в изучаемых ниже моделях) центрирования не требуется. Однако общее определение оставлено в статье для использования в других моделях.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00661)

² Работа выполнена при финансовой поддержке правительства Новосибирской области (стипендия правительства НСО)

Если для описания данных предложено несколько моделей, то вычисление достигнутых уровней значимости позволяет выбрать модель, наилучшим образом описывающую данные. Подход к анализу соответствия данных вероятностным моделям, основанный на функционалах от эмпирического моста, разрабатывался в [3–5] и применялся к анализу текстов в [3], тестированию моделей цен на недвижимость и автомобили в [6, 7], поиску неоднородностей строительных конструкций в [8].

Предлагаемый авторами подход (в отличие от использования коэффициента детерминации) позволяет сравнивать модели с разным числом параметров. В работе [5] рассмотрен пример, для которого выбором констант коэффициент детерминации может быть сделан сколь угодно близким к 1, а реально достигаемый уровень значимости (для критерия, использующего конструкцию эмпирического моста) с ростом объема выборки стремится к нулю п.н. Этот пример показывает, что модель линейной регрессии может объяснять сколь угодно большую долю выборочной дисперсии, но не удовлетворять строгим требованиям на суммы остатков регрессии, предъявляемых критерием эмпирического моста, и количество параметров, а также характер зависимости от них влияют только на распределение предельного процесса, на основании которого вычисляется реально достигаемый уровень значимости. Таким образом, F-тест может принимать неправильную модель, а критерий эмпирического моста отвергать ее.

Эмпирический мост для модели выборки слабо сходится к стандартному броуновскому мосту, а сходимость эмпирического моста в модели двухпараметрической линейной регрессии требует доказательства. При этом предельный гауссовский процесс отличается от стандартного броуновского моста.

Рассмотрим две вероятностные модели (одно- и двухпараметрическую):

$$Y_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \geq 1,$$

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \geq 1,$$

где $\theta, a, b \in R$ – неизвестные параметры регрессии, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ (регрессионные ошибки) – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной ненулевой дисперсией σ^2 . Также предполагается, что $X_i = \xi_{i,n}$, $i = 1, \dots, n$, – порядковые статистики, где случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, одинаково распределены с функцией распределения F и не зависят от случайных величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Неизвестные параметры регрессии обычно оценивают по методу наименьших квадратов, получая оценки $\hat{\theta}, \hat{a}, \hat{b}$. На основании регрессионной модели строятся прогнозные значения $\hat{Y}_i = \hat{\theta}$, $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$. Остатками линейной регрессии называют случайные величины $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Приведем определение эмпирического моста. Эмпирический мост – это кусочно-но-линейная случайная ломаная $Z_n^0 = \{Z_n^0(t), 0 \leq t \leq 1\}$ с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{\hat{\Delta}_k - \frac{k}{n} \hat{\Delta}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 n}} \right),$$

где $\hat{\Delta}_k = \hat{\varepsilon}_1 + \dots + \hat{\varepsilon}_k$, $k = 1, \dots, n$, $\hat{\Delta}_0 = 0$, $\hat{\sigma}^2 = \overline{\hat{\varepsilon}^2} - (\bar{\hat{\varepsilon}})^2$.

При условии сходимости $\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$ слабые пределы в пространстве непрерывных на $[0,1]$ функций $C(0,1)$ эмпирического моста и случайной ломаной, построенной по точкам

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{\widehat{\Delta}_k - \frac{k}{n} \widehat{\Delta}_n}{\sigma \sqrt{n}} \right),$$

совпадают.

Отметим, что указанная ломаная получается непрерывным в равномерной метрике на $[0,1]$ преобразованием $x^0(t) = x(t) - tx(1)$, отображающим x в x^0 , случайной ломаной Z_n , построенной по точкам

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{\widehat{\Delta}_k}{\sigma \sqrt{n}} \right).$$

Пусть $GL_F(t) = \int_0^t F^{-1}(s) ds$ – теоретическая обобщенная кривая Лоренца (см.

в [9]), $F^{-1}(s) = \sup \{x : F(x) < s\}$ – квантильное преобразование (обобщенная обратная функция) функции распределения $F(x)$, $GL_F^0(t) = GL_F(t) - tGL_F(1)$.

Через $\Rightarrow$ будем обозначать слабую сходимость (сходимость по распределению) в соответствующем пространстве. Так, в теоремах ниже через $\Rightarrow$ обозначена слабая сходимость в пространстве $C(0,1)$, снабженном равномерной метрикой (см. [10, с. 82]).

Из функциональной предельной теоремы (принципа инвариантности) следует (см. [3]) теорема 1.

Теорема 1. Если $Y_i = \theta + \varepsilon_i$, то $Z_n^0 \Rightarrow W^0$, где W^0 – стандартный броуновский мост с ковариационной функцией

$$K(t, s) = \min \{t, s\} - ts, \quad t, s \in [0, 1].$$

Следствие 1. Если $Y_i = \theta + \varepsilon_i$, то

$$\int_0^1 (Z_n^0(t))^2 dt \Rightarrow \eta,$$

где η имеет распределение ω^2 , которое представлено в табл. 6.4а на с. 348 в [11] и в табл. 1 на с. 63–64 в [12].

В приложении приведено доказательство следующей теоремы, которая распространяет на двухпараметрическую (парную) линейную регрессию результат работы [5]. Эта теорема также может быть получена применением другой техники доказательства из теоремы 1.2 и следствия 1.3 работы [13]. Для неслучайного регрессора подобные теоремы получены в работах [14, 15].

Теорема 2. Если $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, $0 < \text{Var} \xi_1 < \infty$, то $Z_n \Rightarrow Z_F, Z_n^0 \Rightarrow Z_F^0$, где Z_F – центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$K_F(t, s) = \min \{t, s\} - ts - \frac{GL_F^0(t)GL_F^0(s)}{\text{Var} \xi_1}, \quad t, s \in [0, 1].$$

Следствие 2. Если $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, X_i – порядковые статистики, построенные по выборке из нормального распределения, то

$$\int_0^1 (Z_n^0(t))^2 dt \Rightarrow \hat{\eta} = \int_0^1 Z_\Phi^2(t) dt,$$

где $\hat{\eta}$ имеет распределение $\hat{\omega}^2$, которое представлено в табл. 3 на с. 65 в [12], Z_Φ – центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$\hat{K}(t, s) = \min\{t, s\} - ts - \varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s)),$$

где φ , Φ^{-1} – плотность и квантильная функция стандартного нормального распределения соответственно.

В [12] получены следующие выражения:

$$F_{\hat{\eta}}(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k-1}} \int \frac{e^{-x\lambda/2}}{(-D(\lambda))^{1/2}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

(с. 56), где λ_k – собственные числа ядра $\hat{K}$, $\lambda_1 \dots \lambda_{10}$ приведены на с. 37 в [12], для остальных λ_k справедлива эквивалентность $\lambda_k \sim ((2k-1)\pi)^2$, $k > 10$;

$$D(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} A(\sqrt{\lambda}) \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2};$$

$$A(\mu) = \left(1 + \frac{\mu^2 \sqrt{3}}{2\pi}\right) \cos \frac{\mu}{2} + 4\mu^3 I_1(\mu);$$

$$I_1(\mu) = \int_0^{1/2} \kappa_1(x) \sin \mu x dx \int_x^{1/2} \kappa_1(x) \cos \mu(1/2 - t) dt;$$

$$\kappa_1(x) = \varphi(\Phi^{-1}(x)).$$

(с. 34–37 в [12]). С помощью данных формул можно вычислить $F_{\hat{\eta}}(x)$, результат приведен в [12, табл. 3].

2. Основные результаты работы

Основной задачей настоящей статьи является применение вышеизложенных теорем для анализа различных регрессионных моделей зависимости массы тела от роста индивидуума.

В качестве исходных данных были взяты сведения о росте (в см) и массе тела (в кг) студентов первого курса Волжского государственного медицинского университета (двумерная выборка объема 750) <http://www.volgmed.ru/ru/>

Предполагается, что есть некоторый статистический ансамбль наблюдений, иными словами, двумерное распределение индивидуумов по росту и весу. Из этого двумерного распределения осуществляется выборка объема n . Эта двумерная выборка упорядочивается по первой компоненте (росту), в результате чего получается последовательность пар (H_i, W_i) , где H_i – порядковые статистики, а W_i – индуцированные порядковые статистики (конкомитанты) [16].

Мы рассмотрим следующие модели:

$$W_i = \theta + H_i + \varepsilon_i; \quad (1)$$

$$\ln W_i = a + \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (2)$$

$$\ln W_i = a + 1.5 \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (3)$$

$$\ln W_i = a + 2 \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (4)$$

$$\ln W_i = a + 2.5 \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (5)$$

$$\ln W_i = a + 3 \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (6)$$

$$\ln W_i = a + b \ln H_i + \varepsilon_i; \quad (7)$$

$$W_i = a + bH_i + \varepsilon_i; \quad (8)$$

$$W_i = a + bH_i^{1.5} + \varepsilon_i; \quad (9)$$

$$W_i = a + bH_i^2 + \varepsilon_i; \quad (10)$$

$$W_i = a + bH_i^{2.5} + \varepsilon_i; \quad (11)$$

$$W_i = a + bH_i^3 + \varepsilon_i. \quad (12)$$

Модели (1) – (6) являются однопараметрическими, а модели (7) – (12) двухпараметрическими.

С помощью статистического пакета R на основании критерия Шапиро – Уилка была проверена гипотеза нормальности регрессоров, входящих в модели (1) – (12). Реально достигнутые уровни значимости для H_i , $\ln H_i$, $H_i^{1.5}$, H_i^2 , $H_i^{2.5}$, H_i^3 составили соответственно 0.2124; 0.07253; 0.1705; 0.08175; 0.02305; 0.04053. Так как используемые нами методы основаны на нормальности регрессора, модели (11), (12) далее мы рассматривать не будем.

Статистический критерий показывает, что нормальное приближение хорошо работает и для распределения роста H_i , и для распределения его логарифма и степеней 1.5 и 2. Это происходит из-за того, что нормальность сохраняется при линейном преобразовании, а рассматриваемые преобразования ведут себя подобно линейным относительно рассматриваемых случайных величин в том смысле, что среднеквадратическое отклонение преобразованной случайной величины значительно меньше ее математического ожидания, и поэтому близость к нормальному закону сохраняется. Для степеней 2.5 и 3 это не так, и эти модели не проходят тест на нормальность.

С помощью пакета MatLab для каждой из моделей были оценены входящие в них параметры и вычислены значения эмпирического моста в узловых точках. Для сравнения моделей вычисляются выборочные дисперсии остатков, затем статистику

$$\omega_n^2 = \int_0^1 (Z_n^0(t))^2 dt \text{ по формуле}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \left(Z_n^0 \left(\frac{i}{n} \right) - Z_n^0 \left(\frac{i-1}{n} \right) \right)^2 + Z_n^0 \left(\frac{i}{n} \right) Z_n^0 \left(\frac{i-1}{n} \right) \right),$$

которая напрямую следует из определения эмпирического моста, и реально достигаемые уровни значимости (по табл. 1 из [12] для однопараметрических моделей, по табл. 3 из [12] – для двухпараметрических). Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики моделей

Модель	$\widehat{\sigma^2}$	ω_n^2	РДУЗ
1	66.82	7.96	$< 10^{-5}$
2	0.0176	3.316	$< 10^{-5}$
3	0.0171	0.4503	0.053
4	0.0174	0.5928	0.024
5	0.0185	3.591	$< 10^{-5}$
6	0.0203	8.643	$< 10^{-5}$
7	0.0171	0.2697	0.0052
8	57.22	0.2273	0.013
9	57.17	0.2172	0.016
10	57.14	0.2101	0.018

Табл. 1 позволяет сравнить модели между собой. В частности, можно сделать вывод о том, что наилучшей из рассматриваемых является модель 3. Отдельно отметим интересный эффект. Модель 3 лучше с точки зрения критерия согласия ω^2 нежели модель 7, в которой параметр модели b точно оценен. Получается, что в данном случае лучше угадать параметр модели, чем его оценивать. Конечно, данный эффект связан с тем, что для одно- и двухпараметрических моделей предельные распределения статистик критерия ω^2 существенно различаются: оценивание второго параметра теоретически (при выполнении предположений соответствующей модели) должно привести к значительно меньшим отклонениям от горизонтальной оси, чего на практике не происходит.

Как показывает табл. 1, ни одна из рассмотренных моделей не демонстрирует высоких реально достигаемых уровней значимости, то есть хорошего соответствия с исследуемыми данными. Поэтому на следующем этапе исследования анализируются выбросы исходных данных относительно предлагаемых моделей и их влияние на изучаемые характеристики. Для исследования выбросов изобразим исходные данные графически (рис. 1).

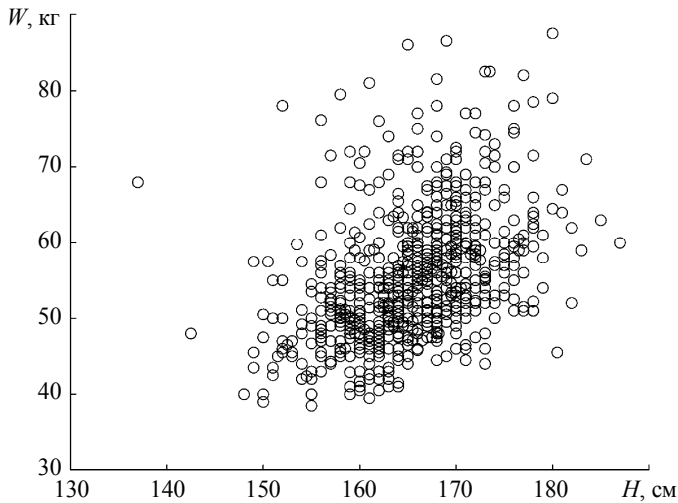


Рис. 1. Зависимость массы тела (в кг) от роста (в см)

На графике видны выбросы (аномально большие отклонения от любой из предлагаемых регрессионных зависимостей), которые могут привести к искажению результатов. Для устранения данного недостатка мы многократно провели процедуру очистки выборки с помощью правила «трех сигм». Каждый раз, когда несколько значений удалялось, оценки параметров и дисперсии остатков пересчитывались, снова проверялась нормальность выборки и процедура повторялась до тех пор, пока на очередном шаге ни одно значение не было удалено. В результате для каждой модели была получена новая двумерная выборка, для которой повторно были проведены все вычисления.

Результаты вычислений приведены в табл. 2 (модель 10 исключена, так как на очередном шаге выборка не прошла проверку на нормальность).

Таблица 2

Характеристики моделей после удаления выбросов

Модель	Итераций	К-во удаленных	$\hat{\sigma}^2$	ω_n^2	РДУЗ
1	4	14	53.07	6.87	$< 10^{-5}$
2	2	9	0.0158	4.35	$< 10^{-5}$
3	2	8	0.0158	0.8133	0.0068
4	4	10	0.0149	0.2718	0.165
5	2	9	0.0164	2.84	$< 10^{-5}$
6	2	8	0.0177	7.64	$< 10^{-5}$
7	3	9	0.0151	0.1741	0.0412
8	1	11	47.14	0.1605	0.0563
9	4	20	42.27	0.1674	0.047

Наилучший результат показала модель 4, эмпирический мост регрессионных остатков для нее приведен на рис. 2.

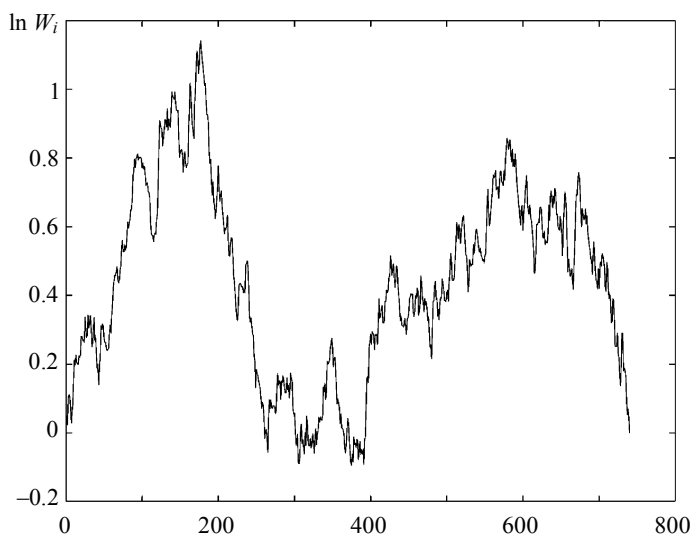


Рис. 2. Эмпирический мост для $\ln W_i = a + 2 \ln H_i + \varepsilon_i$
(после окончательной очистки выборки)

Эту модель (модель 4) и следует использовать для анализа отклонений массы тела от нормы. Оценка параметра a равна $\hat{a} = -6,2171\dots$. Таким образом, проведенное нами исследование позволяет определять значимость отклонений массы тела от нормы на основании логнормального закона с параметрами $\mu = -6.2171 + 2 \ln H$, $\sigma^2 = 0.0149$, где H – рост студентки первого курса в см.

В частности, исключенные 10 наблюдений являются примерами таких отклонений, значимых на критическом уровне 0.0027 (согласно правилу «трех сигм»).

Приложение. Доказательство теоремы 2

Для простоты восприятия разобьем доказательство на пять последовательных шагов. На первом шаге доказательства покажем, что сумму $\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^0 X_i^0}{\sqrt{n}}$ можно заменить суммой $\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^0 EX_i^0}{\sqrt{n}}$ (величины ε_i^0 и X_i^0 будут введены ниже). На втором шаге докажем слабую сходимость нормированного вектора с координатами $(\hat{\Delta}_{k_1}, \dots, \hat{\Delta}_{k_m})$ к нормированному вектору с координатами $(\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_m})$, где Δ_{k_i} будут определены позднее. Третий шаг состоит в доказательстве слабой сходимости соответствующих конечномерных распределений. На четвертом шаге будет показана относительная компактность семейства вероятностных распределений, порожденного семейством $\{Z_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$. Последний, пятый шаг, состоит из доказательства сходимости по вероятности выборочной дисперсии $\hat{\sigma}^2$ к истинной дисперсии σ^2 .

Шаг 1. Обозначим $X_i^0 = X_i - \bar{X}$, $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$. Тогда

$$\hat{\Delta}_k = \sum_{i=1}^k \left(\varepsilon_i^0 - \frac{\overline{X^0 \varepsilon^0}}{(X^0)^2} X_i^0 \right). \quad (13)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 X_i^0 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 EX_i^0 \right) \xrightarrow{P} 0. \quad (14)$$

Так как $E\varepsilon_1 = 0$, случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ независимы между собой и не зависят от $\{\xi_{i:n}\}$, имеем

$$P \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 (X_i^0 - EX_i^0) \right| \geq \delta \right\} \leq \frac{\text{Var} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 (X_i^0 - EX_i^0)}{n\delta^2} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i^0}{n\delta^2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2 |\text{cov}(X_i, \bar{X})| &\leq \sum_{i=1}^n 2 \sqrt{\text{Var} X_i \text{Var} \bar{X}} \leq \sum_{i=1}^n 2 \left(\frac{1 + \text{Var} X_i}{2} \right) \sqrt{\frac{\text{Var} X_i}{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\sqrt{\text{Var} X_i} (1 + \text{Var} X_i)) \leq n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \text{Var} X_i}{2} + n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var} X_i \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 в [17], $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому и $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i^0 \rightarrow 0$, и тем самым (14) доказано.

Шаг 2. Пусть $[t]$ обозначает целую часть числа t . Для каждого m и каждого $0 \leq s_1 < \dots < s_m \leq 1$, $k_i = [ns_i]$, покажем слабую сходимость при $n \rightarrow \infty$ вектора $\bar{\eta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\hat{\Delta}_{k_1}, \dots, \hat{\Delta}_{k_m})$ к вектору $\bar{Z}_F = (Z_F(s_1), \dots, Z_F(s_m))$.

Из (13), (14) и сходимостей $\overline{(X^0)^2} \rightarrow \text{Var } \xi_1$ п.н., $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_j} X_i^0 \rightarrow GL_F^0(s_j)$ п.н. (см. [18]), вектор $\bar{\eta}$ может быть заменен вектором $\bar{\zeta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_m})$, где

$$\Delta_{k_j} = \sum_{i=1}^{k_j} \varepsilon_i^0 - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 EX_i^0 = \sum_{i=1}^{k_j} \varepsilon_i^0 - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i EX_i^0.$$

Шаг 3. Покажем слабую сходимость $\bar{\zeta} \Rightarrow \bar{Z}_F$, используя метод характеристических функций. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^m t_j \left(\sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i EX_i^0 \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^m t_j \left(I\{i \leq k_j\} - \frac{k_j}{n} - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right).$$

Из предложения 4 в [5], используя неравенство Гельдера, имеем $EX_i^0 = o(\sqrt{n})$ равномерно по всем $1 \leq i \leq n$.

Определим $\beta_i = \sum_{j=1}^m t_j \left(I\{i \leq k_j\} - \frac{k_j}{n} - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right)$. Тогда характеристическая функция $\varphi_{\bar{\zeta}}(\vec{t})$ может быть представлена как

$$\varphi_{\bar{\zeta}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^n E \exp \left(\frac{i}{\sigma\sqrt{n}} \varepsilon_i \beta_i \right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2n} (1 + o(1)) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2n} (1 + o(1)) \right) \right),$$

где $o(1)$ равномерно по $1 \leq i \leq n$.

Действительно,

$$\sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2n} (1 + o(1)) \right) = -(1 + o(1)) \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{2n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{n} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m t_j \left(I\{i \leq k_j\} - \frac{k_j}{n} - \frac{GL_F^0(s_j)}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right) \right)^2 = \\ &= \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} t_{j_1} t_{j_2} \left(I\{i \leq k_{j_1}\} - \frac{k_{j_1}}{n} - \frac{GL_F^0(s_{j_1})}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right) \times \\ &\quad \left(I\{i \leq k_{j_2}\} - \frac{k_{j_2}}{n} - \frac{GL_F^0(s_{j_2})}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(I\{i \leq k_{j_2}\} - \frac{k_{j_2}}{n} - \frac{GL_F^0(s_{j_2})}{\text{Var } \xi_1} EX_i^0 \right) \\ & \rightarrow \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m t_{j_1} t_{j_2} \left(\min(s_{j_1}, s_{j_2}) - s_{j_1} s_{j_2} - \frac{GL_F^0(s_{j_1}) GL_F^0(s_{j_2})}{\text{Var } \xi_1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{n} \rightarrow \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m t_{j_1} t_{j_2} K_F(s_{j_1}, s_{j_2}) := C_F$$

и

$$\sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2n} (1 + o(1)) \right) \rightarrow -\frac{C_F}{2}.$$

В итоге получили, что $\varphi_{\tilde{\zeta}}(\vec{t}) \rightarrow \exp(-C_F/2)$. Таким образом, сходимость конечномерных распределений полностью доказана.

Шаг 4. Покажем, что семейство распределений, порожденное $\{Z_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$, относительно компактно.

Обозначим $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_{i:n}$, $k = 1, \dots, n$, $S_0 = 0$.

В соответствии с теоремой Прохорова (см. гл. 16 в [10]) достаточно показать, что семейство распределений случайных процессов последовательности

$\left\{ \frac{\hat{\Delta}_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right\}$ плотно. Обозначим $k = [nt]$.

Пусть
$$\hat{\Delta}_k^0 = \sum_{i=1}^k \left(\varepsilon_i - \frac{\overline{X^0 \varepsilon^0}}{(X^0)^2} X_i \right).$$

Тогда
$$\hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_k^0 - \frac{k}{n} \hat{\Delta}_n^0.$$

Плотность семейства $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i}{\sigma \sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right\}$ была показана в [10] при доказатель-

стве принципа инвариантности Донскера – Прохорова.

Поэтому докажем только плотность семейства

$$\left\{ \frac{\overline{X^0 \varepsilon^0} \sqrt{n}}{\sigma (X^0)^2} \frac{S_k}{n}, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

В силу теоремы 8.3 в [10] достаточно доказать, что для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ найдутся $0 < \delta < 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\frac{1}{\delta} P \left\{ \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left| \frac{\overline{X^0 \varepsilon^0} \sqrt{n}}{\sigma (X^0)^2} \frac{S_{[ns]} - S_{[nt]}}{n} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \alpha,$$

для любых $n > n_0$, $0 \leq t \leq 1$.

Заметим, что

$$\frac{\overline{X^0 \varepsilon^0} \sqrt{n}}{\sigma(X^0)^2} \Rightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{\text{Var } \xi_1}}$$

и (см. [18])

$$\sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left| \frac{S_{[ns]} - S_{[nt]}}{n} \right| \rightarrow \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |GL_F(s) - GL_F(t)| \text{ п.н.}$$

Здесь ζ случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, $GL_F(x)$ обобщенная кривая Лоренца, которая определена выше.

Обозначим

$$A(t, \delta) = \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |GL_F(s) - GL_F(t)|.$$

Покажем, что для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ найдется $0 < \delta < 1$ такое, что

$$P \left\{ \frac{|\zeta|}{\sqrt{\text{Var } \xi_1}} A(t, \delta) \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{\alpha \delta}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Левая часть последнего неравенства не превосходит $2 \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$, где $x = \frac{\varepsilon \sqrt{\text{Var } \xi_1}}{A(t, \delta)}$, в силу леммы 2 (см. [19, с. 175]). С помощью неравенства Коши – Буняковского имеем

$$A(t, \delta) = \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left| \int_t^s F^{-1}(x) dx \right| \leq \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \int_t^s |F^{-1}(x)| dx \leq \sqrt{\delta E \xi_1^2}.$$

Очевидно, что требуемое δ всегда найдется.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\widehat{\sigma^2} \xrightarrow{p} \sigma^2$. В самом деле,

$$\widehat{\varepsilon^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon} - \frac{\overline{X^0 \varepsilon^0}}{(X^0)^2} (X_i - \bar{X}) \right)^2 = (\bar{\varepsilon^0})^2 - \frac{(\overline{X^0 \varepsilon^0})^2}{(X^0)^2} \xrightarrow{p} \sigma^2.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Quetelet A.* Recherches sur le poids de l'homme aux different âges // Nouveaux Memoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. 1832. V. 7. P. 1–83.
2. *Keys A., Fidanza F., Karvonen M. J., Kimura N., Taylor H. L.* Indices of relative weight and obesity // Journal of Chronic Diseases. 1972. V. 25. No. 6–7. P. 329–343.
3. *Гусарова Г. В., Ковалевский А. П., Макаренко А. Г.* Критерии наличия разладки // Сиб. журн. индустр. матем. 2005. Т. 8. № 4. С. 18–33.
4. *Ковалевский А.П.* Статистические критерии обнаружения разладки регрессии с циклическим трендом // Научный вестник НГТУ. 2013. № 3 (52). С. 55–62.
5. *Ковалевский А.П., Шаталин Е.В.* Асимптотика сумм остатков однопараметрической линейной регрессии, построенной по порядковым статистикам // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59. № 3. С. 452–467.

6. Аркашов Н.С., Ковалевский А.П. Вероятностная модель цен на квартиры // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. № 2. С. 11–20.
7. Kovalevskii A. A regression model for prices of second-hand cars // Applied methods of statistical analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control. Novosibirsk, 2013. P. 124–128.
8. Ковалевский А.П., Шахраманьян А.М. Анализ дефектов строительных конструкций методом эмпирического моста // Научный вестник НГТУ. 2014. Т. 56. № 3. с. 171–180.
9. Gastwirth J.L. A general definition of the Lorenz curve // Econometrica. 1971. V. 39. P. 1037–1039.
10. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
11. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
12. Мартынов Г.В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.
13. Stute W. Nonparametric model checks for regression // Ann. Statist. 1997. V. 25. P. 613–641.
14. MacNeill I.B. Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals // Ann. Prob. 1978. V. 6. No. 4. P. 695–698.
15. Bischoff W. A functional central limit theorem for regression models // Ann. Stat. 1998. V. 26. P. 1398–1410.
16. Davydov Y., Zitakis R. Convex rearrangements of random elements // Fields Institute Communications. 2004. V.44. P. 141–171.
17. Hoeffding W. On the distribution of the expected values of the order statistics // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24. No. 1. P. 93–100.
18. Goldie C.M. Convergence theorems for empirical Lorenz curves and their inverses // Advances in Applied Probability. 1977. V. 9. P. 765–791.
19. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 15.04.2015 г.

Kovalevskii A.P., Shatalin E.V. THE CHOICE OF A REGRESSION MODEL OF THE BODY WEIGHT ON THE HEIGHT VIA AN EMPIRICAL BRIDGE

DOI 10.17223/19988621/37/3

An empirical bridge can be used for analysis of correspondance between regression models and observed data. If a model does not describe data correctly, then its response values deviate systematically from the regression curve, and this deviation can be revealed by summing the regression residuals. One needs to know the limiting distribution of the process for centered and normalized partial sums of regression residuals to study significance of these deviations. This process is the empirical bridge. We obtain a limiting process for a simple linear regression model. The main goal of this article is to apply the empirical bridge for the analysis of regression models describing the dependence of an individual's body weight on his height. We considered a number of regression models of this dependence and compared models based on their empirical bridges. We used data on the height and weight of female students of the first course of Volga State Medical University. The study revealed the best model $\ln W_i = a + 2 \ln H_i + \varepsilon_i$. This model should be used for analysis of deviations from the normal body weight.

Keywords: linear regression, empirical bridge, dependence of weight on height.

KOVALEVSKII Artem Pavlovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation)
E-mail: pandorra@ngs.ru

SHATALIN Evgeny Viktorovich (Sobolev Institute of Mathematics,
Novosibirsk, Russian Federation)
E-mail: sh_e_v_89@list.ru

REFERENCES

1. Quetelet A. Recherches sur le poids de l'homme aux different ges. *Nouveaux Memoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 1832, vol. 7, pp. 1–83.
2. Keys A., Fidanza F., Karvonen M. J., Kimura N., Taylor H. L. Indices of relative weight and obesity. *Journal of Chronic Diseases*, 1972, vol. 25. No. 6–7, pp. 329–343.
3. Gusarova G.V., Kovalevskiy A.P., Makarenko A.G. Kriterii nalichiya razladki. *Sib. zhurn. industr. matem.*, 2005, vol. 8, no. 4, pp. 18–33. (in Russian)
4. Kovalevskiy A.P. Statisticheskie kriterii obnaruzheniya razladki regressii s tsiklicheskim trendom. *Nauchnyy vestnik NGTU*, 2013, no. 3 (52), pp. 55–62. (in Russian)
5. Kovalevskiy A.P., Shatalin E.V. Asimptotika summ ostatkov odnoparametricheskoy lineynoy regressii, postroennoy po poryadkovym statistikam. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya*, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 452–467. (in Russian)
6. Arkashov N.S., Kovalevskiy A.P. Veroyatnostnaya model' tsen na kvartiry. *Sib. zhurn. industr. matem.*, 2012, vol. 15, no. 2. C. 11–20. (in Russian)
7. Kovalevskii A. A regression model for prices of second-hand cars. *Applied methods of statistical analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control*. Novosibirsk, 2013, pp. 124–128.
8. Kovalevskiy A.P., Shakhraman'yan A.M. Analiz defektov stroitel'nykh konstruksiy metodom empiricheskogo mosta. *Nauchnyy vestnik NGTU*, 2014, vol. 56, no. 3. pp. 171–180. (in Russian)
9. Gastwirth J.L. A general definition of the Lorenz curve. *Econometrica*, 1971, vol. 39, pp. 1037–1039. (in Russian)
10. Billingsli P. *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*. Moscow, Nauka Publ., 1977.
11. Bol'shev L.N., Smirnov N.V. *Tablitsy matematicheskoy statistiki*. Moscow, Nauka Publ., 1983.
12. Martynov G.V. *Kriterii omega-kvadrat*. Moscow, Nauka Publ., 1978.
13. Stute W. Nonparametric model checks for regression. *Ann. Statist.*, 1997, vol. 25, pp. 613–641.
14. MacNeill I.B. Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals. *Ann. Prob.*, 1978, vol. 6. No. 4, pp. 695–698.
15. Bischoff W. A functional central limit theorem for regression models. *Ann. Stat.*, 1998, vol. 26, pp. 1398–1410.
16. Davydov Y., Zitikis R. Convex rearrangements of random elements. *Fields Institute Communications*, 2004, vol. 44, pp. 141–171.
17. Hoeffding W. On the distribution of the expected values of the order statistics. *Ann. Math. Statist.*, 1953, vol. 24. No. 1, pp. 93–100.
18. Goldie C.M. Convergence theorems for empirical Lorenz curves and their inverses. *Advances in Applied Probability*, 1977, vol. 9, pp. 765–791.
19. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya*. Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 1. (in Russian)

А.Г. Седых

КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Рассматриваются контактные и контактные метрические структуры на трехмерных неунимодулярных группах Ли. Определены ассоциированные метрики и изучены свойства их кривизны. Рассмотрены частные случаи контактных форм и аффинов. Исследовано свойство нормальности и К-контактности контактных метрических структур.

Ключевые слова: группа Ли, контактная форма, контактная метрическая структура.

Традиционно в геометрии большой интерес представляют римановы многообразия с некоторой дополнительно заданной структурой, согласованной с метрикой. Изучение контактных структур актуально, поскольку они возникают при изучении дифференциальных уравнений в частных производных и в задачах теоретической механики.

Определение 1 [1]. Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным многообразием, если на нем задана дифференциальная 1-форма η , такая, что $(\eta \wedge d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Форма η называется контактной.

Контактная форма определяет на многообразии TM^{2n+1} распределение $E = \{\nu, \eta(\nu)=0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным распределением. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ , которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Векторное поле ξ называется полем Рибо или характеристическим векторным полем контактной структуры. Аффином ϕ на M будем называть гладкое поле линейных операторов $\phi: TM \rightarrow TM$, действующих на каждом касательном пространстве $T_x M$.

Определение 2 [1]. Если M^{2n+1} контактное многообразие с контактной формой η , то контактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, ϕ, g) , где ξ – поле Рибо, g – риманова метрика и ϕ – аффином на M^{2n+1} , для которой имеют место следующие свойства:

- 1) $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
- 2) $d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$,
- 3) $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из второго и третьего свойств сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффином ϕ :

$$g(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Почти контактной метрической структурой на M^{2n+1} называется тройка (η, ξ, ϕ) , для которой выполнены условия

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \eta(\xi) = 1.$$

Пусть M^{2n+1} – почти контактное многообразие с почти контактной структурой (η, ξ, φ) . Рассмотрим многообразие $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ задается парой $(X, f\partial_t)$, где X – векторное поле, касательное к M^{2n+1} , t – координата второго сомножителя $\mathbf{R}$, ∂_t – векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ вида $\partial_t(F(x, t)) = \partial F / \partial t$ и f – функция класса C^∞ на M^{2n+1} . Определим почти комплексную структуру J на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ с помощью оператора J , действующего по формуле

$$J(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\partial_t).$$

Если J – интегрируемая почти комплексная структура, то почти контактная структура (η, ξ, φ) называется нормальной.

Определение 3 [1]. Если контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является нормальной, то она называется нормальной контактной метрической структурой, или структурой Сасаки.

Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий g , т.е. ξ – векторное поле Киллинга относительно g , то такую контактную метрическую структуру называют К-контактной структурой.

Известно [1], что для нормальности и К-контактности контактной метрической структуры достаточно выполнение равенств $[\varphi, \varphi] + 2d\eta\xi = 0$ и $(L_\xi\eta)(X) = 0$ (L – производная Ли) соответственно.

Пусть G – неунимодулярная трехмерная группа Ли, тогда [4] ее алгебра Ли имеет базис e_1, e_2, e_3 , такой, что $[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3$, $[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, причем матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

имеет след $\alpha + \delta = 2$.

Это позволяет выписать ненулевые структурные константы: $C_{12}^2 = \alpha$, $C_{12}^3 = \beta$, $C_{13}^2 = \gamma$, $C_{13}^3 = \delta$.

Пусть $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ – произвольная левоинвариантная 1-форма, где $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ – дуальный базис левоинвариантных 1-форм к базису e_1, e_2, e_3 . Выпишем уравнения Маурера – Картана в выбранном базисе:

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = -\alpha\theta^1 \wedge \theta^2 - \gamma\theta^1 \wedge \theta^3, \quad d\theta^3 = -\beta\theta^1 \wedge \theta^2 - \delta\theta^1 \wedge \theta^3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\eta &= a_1 d\theta^1 + a_2 d\theta^2 + a_3 d\theta^3 = \\ &= a_2(-\alpha\theta^1 \wedge \theta^2 - \gamma\theta^1 \wedge \theta^3) + a_3(-\beta\theta^1 \wedge \theta^2 - \delta\theta^1 \wedge \theta^3) = \\ &= (-\alpha a_2 - \beta a_3)\theta^1 \wedge \theta^2 + (-\gamma a_2 - \delta a_3)\theta^1 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \eta \wedge d\eta &= (a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3) \wedge ((-\alpha a_2 - \beta a_3)\theta^1 \wedge \theta^2 + (-\gamma a_2 - \delta a_3)\theta^1 \wedge \theta^3) = \\ &= ((\delta - \alpha)a_2 a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2)\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned}$$

Вывод. На группе G левоинвариантная 1-форма $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ определяет контактную структуру при $(\delta - \alpha)a_2 a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2 \neq 0$.

Перейдем к построению контактной метрической структуры, для этого выберем метрику на алгебре Ли, относительно которой выбранный выше базис e_1, e_2, e_3

является ортонормированным $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и найдем ее геометрические характеристики.

Тензор кривизны $R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ в базисе e_1, e_2, e_3 обозначим $R(e_i, e_j) e_k = R_{ijk}^s e_s$, тогда тензор Риччи Ric , скалярная Sc и секционная кривизна K в направлении базисных площадок находятся по формулам:

$$Ric_{jk} = R_{ijk}^i, \quad Sc = g^{jk} Ric_{jk}, \quad K_{ij} = \frac{g_{ki} R_{ij}^k}{g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2}.$$

Выпишем ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$Ric_{11} = -\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - \delta^2,$$

$$Ric_{22} = -\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha\delta,$$

$$Ric_{23} = -\alpha\gamma - \beta\delta - \frac{1}{2}\delta\gamma,$$

$$Ric_{32} = -\frac{3}{2}\alpha\gamma - \beta\delta - \frac{1}{2}\delta\gamma,$$

$$Ric_{33} = -\frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{1}{4}\beta\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 - \delta^2 - \delta\gamma.$$

$$\text{Скалярная кривизна } Sc = -2\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\delta^2 - 2\alpha\delta - \frac{3}{4}\gamma^2.$$

Секционные кривизны в направлении базисных площадок

$$K_{12} = -\alpha^2 - \frac{3}{4}\beta\gamma - \frac{3}{4}\beta^2,$$

$$K_{13} = -\frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma - \delta^2,$$

$$K_{23} = -\alpha\delta + \frac{1}{4}\beta\gamma + \frac{1}{4}\beta^2.$$

Теперь найдем вид контактных метрических структур на группе G , но сначала проверим, является ли ранее выбранная метрика g_0 контактной метрической структурой.

Рассмотрим два частных случая:

1) $a_2 = 0$ ($\beta \neq 0$),

2) $a_3 = 0$ ($\gamma \neq 0$).

1) Пусть выбрана контактная структура первого вида $\eta = a_1\theta^1 + a_3\theta^3$. Найдем оператор ϕ из условия

$$d\eta(X,Y) = g_0(X, \phi Y).$$

Получаем

$$d\eta = -\beta a_3 \theta^1 \wedge \theta^2 - \delta a_3 \theta^1 \wedge \theta^3,$$

тогда

$$d\eta(X,Y) = -\beta a_3 X^1 Y^2 + \beta a_3 X^2 Y^1 - \delta a_3 X^1 Y^3 + \delta a_3 X^3 Y^1,$$

$$g(X, \phi Y) = X^1 \phi_j^1 Y^j + X^2 \phi_j^2 Y^j + X^3 \phi_j^3 Y^j.$$

Приравнявая коэффициенты при X^i , получаем $\varphi_j^1 Y^j = \beta a_3 Y^2 - \delta a_3 Y^3$, $\varphi_j^2 Y^j = \beta a_3 Y^1$, $\varphi_j^3 Y^j = \delta a_3 Y^1$ или

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\beta a_3 & -\delta a_3 \\ \beta a_3 & 0 & 0 \\ \delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия

$$g_0(\varphi X, \varphi Y) = g_0(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), (\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi).$$

$$\varphi\varphi^t = \begin{pmatrix} 0 & -\beta a_3 & -\delta a_3 \\ \beta a_3 & 0 & 0 \\ \delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta a_3 & \delta a_3 \\ -\beta a_3 & 0 & 0 \\ -\delta a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta^2 + \delta^2)a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 a_3^2 & \beta\delta a_3^2 \\ 0 & \beta\delta a_3^2 & \delta^2 a_3^2 \end{pmatrix},$$

$$I - \eta \otimes \eta = \begin{pmatrix} 1 - a_1^2 & 0 & -a_1 a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_1 a_3 & 0 & 1 - a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Приравняем левую и правую части соотношения

$$\begin{pmatrix} (\beta^2 + \delta^2)a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 a_3^2 & \beta\delta a_3^2 \\ 0 & \beta\delta a_3^2 & \delta^2 a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_1^2 & 0 & -a_1 a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_1 a_3 & 0 & 1 - a_3^2 \end{pmatrix}$$

и составим систему уравнений, сравнивая компоненты матриц

$$(\beta^2 + \delta^2)a_3^2 = 1 - a_1^2, \beta^2 a_3^2 = 1, \delta^2 a_3^2 = 1 - a_3^2,$$

$$-\beta\delta a_3^2 = 0, a_1 a_3 = 0,$$

решая которую, получаем ограничения на коэффициенты контактной структуры:

$$a_1 = 0, a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}.$$

Выберем $\beta = \pm 1, \delta = 0$, тогда получим решение вида $a_1 = 0$ и $a_3 = \pm 1$.

Вывод. Метрика g_0 определяет контактную метрическую структуру в том случае, когда контактная форма $\eta = \pm\theta^3$ и аффинор φ задается матрицей

$$\varphi = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная структура не является ни нормальной, ни К-контактной.

2) Далее рассмотрим второй частный случай $a_3 = 0$ ($\gamma \neq 0$).

Тогда контактная структура принимает вид $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2$. Построим контактную метрическую структуру аналогично первому случаю.

Сначала найдем оператор φ из условия $d\eta(X, Y) = g_0(X, \varphi Y)$:

$$d\eta = -\beta a_2 \theta^1 \wedge \theta^2 - \delta a_2 \theta^1 \wedge \theta^3.$$

Тогда

$$d\eta(X, Y) = -\beta a_2 X^1 Y^2 + \beta a_2 X^2 Y^1 - \delta a_2 X^1 Y^3 + \delta a_2 X^3 Y^1,$$

$$g(X, \varphi Y) = X^1 \varphi_j^1 Y^j + X^2 \varphi_j^2 Y^j + X^3 \varphi_j^3 Y^j.$$

Приравнявая коэффициенты при X^i , получаем $\varphi_j^1 Y^j = \alpha a_2 Y^2 - \gamma a_2 Y^3$, $\varphi_j^2 Y^j = \alpha a_2 Y^1$, $\varphi_j^3 Y^j = \gamma a_2 Y^1$ или

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha a_2 & -\gamma a_2 \\ \alpha a_2 & 0 & 0 \\ \gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия

$$g_0(\varphi X, \varphi Y) = g_0(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), (\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi).$$

$$\begin{aligned} \varphi^t \varphi &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_2 & \gamma a_2 \\ -\alpha a_2 & 0 & 0 \\ -\gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha a_2 & -\gamma a_2 \\ \alpha a_2 & 0 & 0 \\ \gamma a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \gamma^2)a_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 a_2^2 & \alpha\gamma a_2^2 \\ 0 & \alpha\gamma a_2^2 & \gamma^2 a_2^2 \end{pmatrix}, \\ I - \eta \otimes \eta &= \begin{pmatrix} 1 - a_1^2 & -a_1 a_2 & 0 \\ -a_1 a_2 & 1 - a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Составим систему уравнений, сравнивая соответствующие элементы матриц в условии $\varphi\varphi^t = -I + \eta \otimes \xi$:

$$(\alpha^2 + \gamma^2)a_2^2 = 1 - a_1^2, \alpha^2 a_2^2 = 1 - a_2^2, \gamma^2 a_2^2 = 1,$$

$$a_1 a_2 = 0, -\alpha\gamma a_2^2 = 0,$$

решая которую, получаем ограничения на коэффициенты контактной структуры:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Выберем $\gamma = \pm 1$, $\alpha = 0$, тогда получим решение вида $a_1 = 0$ и $a_2 = \pm 1$.

Вывод. Метрика g_0 определяет контактную метрическую структуру в том случае, когда контактная форма $\eta = \pm\theta^2$ и аффиноф φ задается матрицей

$$\varphi = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другие метрики, которые также определяют контактную метрическую структуру. Для удобства вычислений в качестве контактной формы и аффинофа выберем $\eta = \theta^3$, $\varphi_0 =$

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой другой аффиноф ассоциированной структуры на контактном распределении имеет вид [6, 7]

$$\varphi|_E = \varphi_0|_E (1 + P)(1 - P)^{-1},$$

где E – контактное распределение, а P – оператор на E , обладающий свойствами:

- 1) P симметричен относительно метрики g_0 ,
- 2) P антикоммутирует с φ_0 ,
- 3) Оператор $1 - P^2$ положительно определен относительно метрики g_0 на E (1 – тождественный оператор).

Такой оператор можно задать [6] в виде $P = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$ или в полярных координатах

$$P = \rho \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда на контактном распределении E аффином φ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi|_E &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \rho \cos \alpha_1 & \rho \sin \alpha_1 \\ \rho \sin \alpha_1 & 1 - \rho \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \rho \cos \alpha_1 & -\rho \sin \alpha_1 \\ -\rho \sin \alpha_1 & 1 + \rho \cos \alpha_1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\rho \sin \alpha_1}{-1 + \rho^2} & \frac{-1 + 2\rho \cos \alpha_1 - \rho^2}{1 - \rho^2} \\ \frac{1 + 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Продолжим его на все касательное многообразие группы G :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{2\rho \sin \alpha_1}{-1 + \rho^2} & \frac{-1 + 2\rho \cos \alpha_1 - \rho^2}{1 - \rho^2} & 0 \\ \frac{1 + 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что ассоциированная метрика контактной метрической структуры полностью определяется аффином: $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$;

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} & 0 \\ \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} & \frac{1 - 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Контактная метрическая структура на неунимодулярной группе Ли может быть задана четверкой (η, ξ, φ, g) , где

$$\eta = \theta^3, \quad \xi = e_3,$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{2\rho \sin \alpha_1}{-1 + \rho^2} & \frac{-1 + 2\rho \cos \alpha_1 - \rho^2}{1 - \rho^2} & 0 \\ \frac{1 + 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1+2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1-\rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1-\rho^2} & 0 \\ \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1-\rho^2} & \frac{1-2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Простые вычисления (в системе Maple) показывают, что данная структура не является ни нормальной, ни К-контактной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. Contact manifold in Riemannian geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg – New York, Springer Verlag, 1976.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения: в 2 т. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
3. Кобаяси Ш, Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981.
4. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
5. Седых А.Г. Контактные структуры на трехмерных группах Ли. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.
6. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 31. С. 69–126.
7. Смоленцев Н.К. Ассоциированные почти комплексные структуры и (псевдо) римановы метрики на группах $GL(2, \mathbf{R})$ и $SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ // Вестник Кемеровского государственного университета. № 4(24). С. 155–162.

Статья поступила 20.04.2015 г.

Sedykh A.G. CONTACT METRIC STRUCTURES ON 3-DIMENSIONAL NON-UNIMODULAR LIE GROUPS

DOI 10.17223/19988621/37/4

Definition 1. A differentiable $(2n+1)$ -dimensional manifold M of the class C^∞ is called a contact manifold if there exists a differential 1-form η on M^{2n+1} , such that $(\eta \wedge d\eta)^n \neq 0$. The form η is called a contact form.

Definition 2. If M^{2n+1} is a contact manifold with a contact form η , then a contact metric structure is the quadruple (η, ξ, φ, g) , where ξ is a Reeb's field, g is a Riemannian metric, and φ is an affinor on M^{2n+1} , for which the following properties are valid:

- 1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
- 2) $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$,
- 3) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

We consider a non-unimodular Lie group G ; its Lie algebra has a basis e_1, e_2, e_3 such that $[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3$, $[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, and matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ has a trace $\alpha + \delta = 2$.

The left invariant 1-form $\eta = a_1\theta^1 + a_2\theta^2 + a_3\theta^3$ defines a contact structure on the group G if $(\delta - \alpha)a_2a_3 - \beta a_3^2 + \gamma a_2^2 \neq 0$

As a contact form, we choose the simplest one, $\eta = \theta^3$, $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, and consider other

metrics that also define a contact metric form.

We obtain that a contact metric structure on a non-unimodular Lie group can be set by the quadruple (η, ξ, φ, g) , where

$$\eta = \theta^3, \quad \xi = e_3, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \frac{2\rho \sin \alpha_1}{-1 + \rho^2} & \frac{-1 + 2\rho \cos \alpha_1 - \rho^2}{1 - \rho^2} & 0 \\ \frac{1 + 2\rho \cos \alpha_1 + \rho^2}{1 - \rho^2} & \frac{2\rho \sin \alpha_1}{1 - \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Keywords: Lie group, contact form, contact metric structure.

SEDYKH Anna Gennadyevna (M.Sc., Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: Sedykh-anna@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. Contact manifold in Riemannian geometry. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin Heidelberg – New York, Springer Verlag, 1976.
2. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya*. Moscow, Editorial URSS Publ., 1998. (in Russian)
3. Kobayasi Sh, Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii*. Moscow, Nauka Publ., 1981. (in Russian)
4. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Math.*, 1976, vol. 21, pp. 293–329.
5. Sedykh A.G. *Kontaknyye struktury na trekhmernykh gruppakh Li*. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. (in Russian)
6. Smolentsev N.K. Prostpanstva rimanovykh metrik. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*, 2003, vol. 31, pp. 69–126. (in Russian)
7. Smolentsev N.K. Assotsiirovannye pochti kompleksnye struktury i (psevdo) rimanovy metriki na gruppakh $GL(2, \mathbf{R})$ i $SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 4(24), pp. 155–162. (in Russian)

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/37/5

А.С. Бодров, Н.В. Олимпиева, А.С. Зелепугин, С.А. Зелепугин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛЬНО-УГЛОВОГО ПРЕССОВАНИЯ ТИТАНОВЫХ ОБРАЗЦОВ¹

Численно в трехмерной постановке исследован процесс интенсивного пластического деформирования образцов из титана при динамическом канально-угловом прессовании для динамической схемы нагружения. Расчеты проведены методом конечных элементов в рамках модели повреждаемой упругопластической среды. Определены рациональные значения начальной скорости образца и действующего на образец давления.

Ключевые слова: динамическое канально-угловое прессование, интенсивное пластическое деформирование, численное моделирование.

Получение объемных наноструктурных и ультрамелкозернистых материалов является одним из активно развиваемых направлений в современном материаловедении [1, 2]. Объемные ультрамелкозернистые (УМЗ) металлы и сплавы, полученные с помощью методов интенсивной пластической деформации (ИПД), обладают улучшенными, по сравнению с крупнозернистыми аналогами, свойствами – повышенной прочностью, высокой усталостной прочностью, ударной вязкостью, коррозионной и радиационной стойкостью и др. Исследования свойств таких материалов имеют важное как фундаментальное, так и практическое значение.

Динамическое канально-угловое прессование (ДКУП) – один из методов получения УМЗ-материалов с помощью ИПД [3–5]. Данный метод является развитием метода равноканального углового прессования (РКУП) [1], позволяющим повысить скорость пластического деформирования образца. Метод ДКУП позволяет использовать образцы значительно больших размеров при меньшем количестве проходов, чем в РКУП. В процессе ИПД при измельчении структуры повышаются прочностные свойства материала, при этом при ДКУП сохраняются высокие пластические характеристики, что в РКУП недостижимо.

Экспериментальные исследования показывают, что необходимы широкомасштабные численные исследования процессов ДКУП для выявления особенностей интенсивного пластического деформирования и установления эффективных параметров данных процессов. До настоящего времени известно лишь несколько работ, посвященных численному моделированию процессов ДКУП. В [6–8] в двумерной плоскодеформационной постановке исследованы особенности ИПД образцов из титана, алюминия и меди для четырех схем нагружения: инерционной, когда задается начальная скорость образца и он проходит пересечение каналов по инерции; динамической, когда дополнительно на тыльный торец образца

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-08-31208 и 13-08-98104.

действует давление, моделирующее давление пороховых газов; динамической с пуансоном, когда давление на тыльный торец образца передается через пуансон; двухпоршневой, когда помимо толкающего пуансона (в вертикальном канале) действует поршень в горизонтальном канале, обеспечивая противодействие. В [9] представлена трехмерная схема расчета и приведены первые численные результаты в сравнении с двумерными.

Целью данной работы было определение рациональных параметров процесса (начальной скорости и давления) с точки зрения обеспечения прохождения образцом пересечения каналов при сохранении формы, близкой к первоначальной, и низком уровне поврежденности. Численное моделирование процесса ДКУП проводится в трехмерной постановке. Процесс интенсивного пластического деформирования объемных титановых образцов при динамическом канально-угловом прессовании исследован для динамической схемы нагружения. Расчеты проведены методом конечных элементов в рамках модели повреждаемой упругопластической среды [10, 11].

Постановка задачи

В численных расчетах используется модель повреждаемой упругопластической среды, которая позволяет описывать зарождение и эволюцию микроповреждений. В элементарном объеме среды W конденсированная фаза занимает объем W_c и характеризуется плотностью ρ_c , микрополости (пустоты) занимают объем W_f , в которых плотность материала полагается равной нулю. Средняя плотность повреждаемой среды связана с введенными параметрами соотношением $\rho = \rho_c(W_c/W)$. Степень поврежденности среды характеризуется удельным объемом микроповреждений $V_f = W_f/(W \cdot \rho)$.

Система уравнений, описывающая нестационарное адиабатическое движение сжимаемой среды состоит из уравнений неразрывности, движения, энергии [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho d\mathbf{v}_i/dt = \sigma_{ij,j}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

где ρ – плотность, t – время, $\mathbf{v}$ – вектор скорости с компонентами v_i , $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, E – удельная внутренняя энергия, ε_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, $P = P_c(\rho/\rho_c)$ – среднее давление, δ_{ij} – символ Кронекера, S_{ij} – компоненты девиатора напряжений, P_c – давление в сплошной компоненте вещества.

Давление в неповрежденном веществе является функцией удельного объема, удельной внутренней энергии и во всем диапазоне условий нагружения определяется с помощью уравнения состояния типа Ми – Грюнайзена

$$P_c = \rho_0 a^2 \mu + \rho_0 a^2 [1 - \gamma_0/2 + 2(b-1)] \mu^2 + \\ + \rho_0 a^2 [2(1 - \gamma_0/2)(b-1) + 3(b-1)^2] \mu^3 + \gamma_0 \rho_0 E,$$

где $\mu = V_0/(V - V_f) - 1$, γ_0 – коэффициент Грюнайзена, V_0 и V – начальный и текущий удельные объемы, a и b – константы адиабаты Гюгоньо, описываемой линейным соотношением

$$u_s = a + bu_p,$$

где u_s – скорость распространения фронта ударной волны, u_p – массовая скорость вещества за фронтом ударной волны.

Определяющие соотношения связывают компоненты девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций и используют производную Яуманна. Для описания пластического течения используется условие Мизеса. Учтены зависимости модуля сдвига и динамического предела текучести от температуры и уровня поврежденности материала [12–15].

Для численного моделирования разрушения материала при растяжении в условиях динамического нагружения применялась кинетическая модель разрушения активного типа. Модель определяет скорость изменения удельного объема микроповреждений, которые непрерывно изменяют свойства материала, вызывая релаксацию напряжений [12]:

$$\frac{dV_f}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } |P_c| \leq P^* \text{ или } (P_c > P^* \text{ и } V_f = 0), \\ -\text{sign}(P_c) K_f (|P_c| - P^*) (V_2 + V_f), & \text{если } P_c < -P^* \text{ или } (P_c > P^* \text{ и } V_f > 0), \end{cases}$$

где $P^* = P_k V_1 / (V_f + V_1)$; V_1, V_2, P_k, K_f – экспериментально определяемые константы материала ($P^* > 0$).

Для решения задачи используется модифицированный метод конечных элементов без глобальной матрицы жесткости, предназначенный для решения задач динамического нагружения [10, 11].

Процесс ДКУП моделируется на примере титановых образцов сечением 16×16 мм, длиной 65 мм. Угол пересечения каналов составляет 90° с наклонной площадкой под углом 45° в области внешнего угла. На тыльной поверхности образца задается постоянная нагрузка P , моделирующая давление пороховых газов (динамическая схема нагружения). На границах каналов ставится условие жесткой стенки. Наклонная площадка представляет собой большую грань прямой призмы, основаниями которой являются равнобедренные прямоугольные треугольники, прямой угол и катеты которых совпадают с внешним углом и соответствующими ребрами пересекающихся каналов. В расчетах размер и положение наклонной площадки соответствует величине катетов $h = 4$ и 8 мм. Варьируется величина нагрузки P и начальное положение лицевой поверхности образца H в вертикальном канале.

Результаты расчетов

Результаты численного моделирования показывают, что на процесс деформирования образца при прохождении пересечения каналов существенное влияние оказывает наклонная площадка. Поле векторов скоростей на рис. 1, а демонстрирует наличие двух плоскостей изменения направления движения материала в данной области. Эти плоскости направлены от концов наклонной площадки к внутреннему углу пересечения стенок каналов. Такая динамика движения приводит к образованию двух плоскостей пластического деформирования, представленных на рис. 1, б. При этом в каждой из этих плоскостей пластическое деформирование материала образца происходит достаточно равномерно. При уменьшении размеров площадки плоскости пластического деформирования сближаются, формируя при $h = 4$ мм одну общую плоскость.

Анализ распределений удельной энергии сдвиговых деформаций показывает практически полную идентичность полей пластического деформирования в поперечном направлении, что свидетельствует о предпочтительности использования при ДКУП образцов квадратного сечения по сравнению с цилиндрическими. Вместе с тем, вдоль образца имеет место неравномерность деформирования, что особенно

заметно в передней части образца и может приводить к необходимости повторного прохождения образца по каналам. Следует отметить, что максимальные значения удельной энергии сдвиговых деформаций достигаются в приповерхностных слоях образца вследствие его взаимодействия со стенками каналов. В этих областях возможно плавление материала образца, что наблюдается и в эксперименте [3].

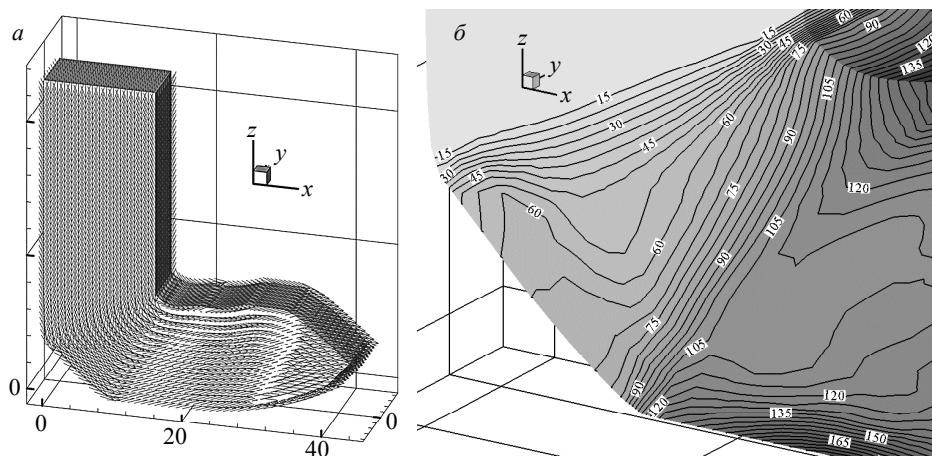


Рис. 1. Векторы скоростей (*а*) и распределение удельной энергии сдвиговых деформаций (*б*) (начальный уровень 15 кДж/кг, интервал между уровнями 5 кДж/кг) в образце в области пересечения каналов в момент времени 200 мкс при давлении 0.55 ГПа, $H = 10.6$ мм (соответствующее значение скорости образца в момент начала взаимодействия с наклонной площадкой равно 100 м/с), $h = 8$ мм. Размеры даны в мм

Результаты расчетов показывают, что при движении в вертикальном канале под действием давления в зависимости от пройденного расстояния и величины P образец разгоняется до различных скоростей, что существенно влияет на процесс ДКУП.

При постоянном значении P с увеличением параметра H возрастает расстояние, которое в равноускоренном режиме проходит образец до начала деформирования, при этом увеличивается скорость прохождения образца через пересекающиеся каналы. В результате повышается скорость деформирования материала, происходит рост температуры в образце, особенно в области его контакта со стенками каналов. Образец с увеличением скорости сильнее растягивается в направлении продольной оси, а в верхней части образца наблюдается увеличение области, содержащей микроповреждения. На рис. 2 приведены графики изменения во времени средней скорости образца при постоянном значении P равном 0.55 ГПа, $h = 4$ мм, для выбранных значений H .

Линейная часть графиков соответствует равноускоренному движению образца по вертикальному каналу, причем ускорение определяется величиной P и в данном случае равно $1.874 \cdot 10^6$ м/с². В первом случае ($H = 4$ мм) образец начинает взаимодействие с наклонной площадкой при нулевой начальной скорости, в отличие от остальных вариантов. Тем не менее средняя скорость образца успевает возрасти почти до 100 м/с за счет действия давления на тыльный торец образца. Во всех четырех вариантах образец успешно проходит пересечение каналов, окончание процесса ДКУП происходит в момент обрыва графиков.

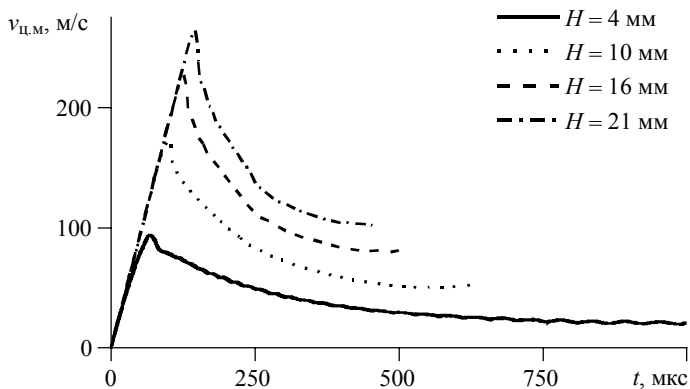


Рис. 2. Изменение средней скорости образца при $P = 0.55$ ГПа для фиксированных значений H

Анализ результатов численных расчетов позволяет определить область значений параметров P и H , для которых обеспечивается успешное прохождение титанового образца по каналам. На рис. 3 представлена диаграмма области рациональных значений параметров P и H для успешного прохождения титанового образца через пересечение каналов. Область $P-H$ разбита на три зоны: в зоне I образец застревает, зона II соответствует успешному прохождению образца по каналам, зона III – неустойчивому прохождению и разрушению образца. Минимальное значение H ограничено высотой наклонной площадки (штриховая горизонтальная линия на рис. 3) и в данном случае равно 4 мм. Зона устойчивого прохождения титанового образца по каналам в исследованном диапазоне давлений, зона II, достаточно узкая и имеет ряд существенных ограничений. Было установлено значение минимальной величины нагрузки, обеспечивающей успешное прохождение образца через пересекающиеся каналы при $H = 4$ мм, равное 0.53 ГПа. Так как в данном случае $H = h$, то образец начинает прохождение области пересечения каналов с нулевой начальной скоростью. При постоянном значении P с увеличением параметра H возрастает расстояние, которое в равноускоренном режиме

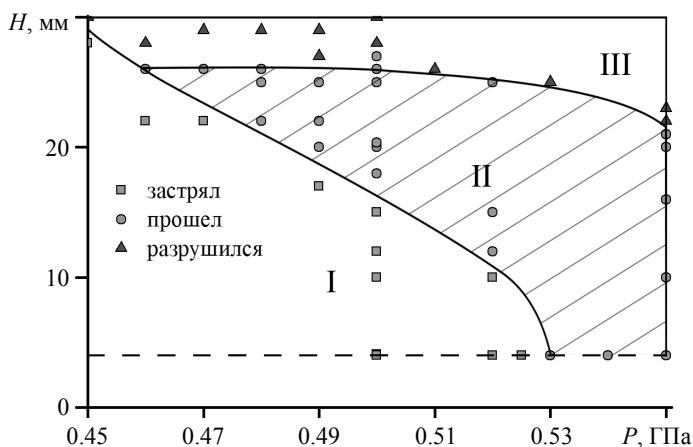


Рис. 3. Диаграмма процесса ДКУП титанового образца

проходит образец до начала деформирования, при этом увеличивается начальная скорость образца и скорость прохождения образцом области пересечения каналов. За счет роста начальной скорости возможно успешное прохождение образца при значениях $P < 0.53$ ГПа, в результате чего граница между зонами I и II имеет наклон в сторону меньших значений P при росте H . В этом случае недостаточная нагрузка в ходе процесса компенсируется предварительным разгоном образца в вертикальном канале и образец не застревает на начальном этапе деформирования. С увеличением H для фиксированных значений P была определена верхняя граница зоны II, выше которой успешное прохождение образца через пересекающиеся каналы невозможно без накопления критического уровня повреждений либо макроразрушения образца (зона III). Также существует граница между зонами I и III в левой верхней части диаграммы, характеризующаяся переходом от застревания образца в каналах матрицы к застреванию с частичным разрушением. Диаграмма позволяет определить минимальные значения H и P при размере наклонной площадки $h = 4$ мм, составляющие $4 \text{ мм} \leq H < 27 \text{ мм}$, $P > 0.46$ ГПа, вне которых образец гарантированно или застревает в каналах, или разрушается. Результаты трехмерного моделирования позволяют сделать вывод о рациональных значениях параметров нагружения титанового образца с точки зрения обеспечения прохождения образцом пересечения каналов при сохранении формы, близкой к первоначальной, и низком уровне поврежденности: $v_0 = 100$ м/с, $P = 0.55$ ГПа.

Заключение

Проведено численное исследование процессов деформирования титановых образцов при динамическом канально-угловом прессовании в трехмерной постановке. Построена диаграмма процесса ДКУП титанового образца в координатах $H - P$ (начальное положение образца в вертикальном канале – давление, действующее на тыльный торец образца). Обнаружено, что увеличение скорости прохождения образца через каналы (скорости деформирования образца) с увеличением начального пробега образца в вертикальном канале приводит к удлинению образца в направлении продольной оси, росту температуры в образце и росту микроповреждений. Результаты трехмерного моделирования позволяют сделать вывод о рациональных значениях параметров нагружения титанового образца: $v_0 = 100$ м/с, $P = 0.55$ ГПа. Данные значения отличаются от полученных в двумерном расчете [6, 7]: $v_0 = 200\text{--}250$ м/с, $P = 0.28\text{--}0.32$ ГПа, хотя и не противоречат друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation // Progress in Materials Science. 2000. V. 45. Issue 2. P. 103–189.
2. Valiev R. Nanostructuring of metals by severe plastic deformation for advanced properties // Nature Materials. 2004. V. 3. Issue 8. P. 511–516.
3. Шорохов Е.В., Жгилев И.Н., Хомская И.В. и др. Высокоскоростное деформирование металлических материалов методом канально-углового прессования для получения ультрамелкозернистой структуры // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 2. С. 36–40.
4. Зельдович В.И., Шорохов Е.В., Фролова Н.Ю. и др. Структура титана после динамического канально-углового прессования при повышенной температуре // ФММ. 2009. Т. 108. № 4. С. 365–370.
5. Зельдович В.И., Шорохов Е.В., Добаткин С.В. и др. Структура и механические свойства титана, подвергнутого высокоскоростному канально-угловому прессованию и деформации прокаткой // ФММ. 2011. Т. 111. № 4. С. 439–447.

6. Шипачев А.Н., Ильина Е.В., Зелепугин С.А. Деформирование титановых образцов при динамическом канально-угловом прессовании // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 4. С. 20–24.
7. Суглобова И.К., Ильина Е.В., Шипачев А.Н., Зелепугин С.А. Выбор параметров нагружения титановых образцов при динамическом канально-угловом прессовании // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2(14). С. 111–116.
8. Шипачев А.Н., Зелепугин А.С., Ильина Е.В., Зелепугин С.А. Моделирование динамического канально-углового прессования титановых образцов по двухпоршневой схеме нагружения // Деформация и разрушение материалов. 2012. № 10. С. 7–11.
9. Зелепугин С.А., Зелепугин А.С., Бодров А.С., Олимпиева Н.В. Трехмерное моделирование процессов пластического деформирования металлических образцов при динамическом канально-угловом прессовании // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 7/3. С.50–52.
10. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Смолин А.Ю. Исследование влияния дискретизации при расчете методом конечных элементов трехмерных задач высокоскоростного удара // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 6. С. 742–750.
11. Johnson G.R. Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations // International Journal of Impact Engineering. 2011. V. 38. Issue 6. P. 456–472.
12. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортков В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996.
13. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Сидоров В.Н. Численное исследование трехмерной задачи высокоскоростного взаимодействия цилиндров с недеформируемой преградой с учетом разрушения и температурных эффектов // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 3. С. 35–40.
14. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф. Исследование пробивания преград при несимметричном высокоскоростном ударе с учетом разрушения и тепловых эффектов // Изв. АН. МТТ. 1994. № 5. С. 121–130.
15. Зелепугин С.А., Зелепугин А.С. Моделирование разрушения преград при высокоскоростном ударе группы тел // Химическая физика. 2008. Т. 27. № 3. С. 71–76.

Статья поступила 07.09.2015 г.

Bodrov A. S., Oлимпиева N. V., Zelepugin A. S., Zelepugin S. A. NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC CHANNEL-ANGULAR PRESSING OF TITANIUM SPECIMENS

DOI 10.17223/19988621/37/5

At present, volume nanostructural and ultrafine-grained materials are considered as promising constructional and functional materials of new generation. Investigation of ultrafine-grained metals received by severe plastic deformation methods showed that they are characterized by a number of unique properties as compared to coarse-grained analogues: raised several times strength combined with good plasticity, low- and high-temperature superplasticity, cyclic and radiating resistance. Recently, a new method of severe plastic deformation was proposed – dynamic channel-angular pressing (DCAP), in which pressing of a specimen through channels is carried out by pulse loading at the expense of energy of compressed gases. In this work, deformation of a titanium specimen during DCAP was numerically investigated in a 3D statement for the dynamic scheme of loading. Computations have been carried out by the finite element method within the framework of the elastic-plastic medium model with allowance for fracture. The effective values of initial velocity and loading pressure are determined for a titanium specimen.

Keywords: dynamic channel-angular pressing, severe plastic deformation, numerical simulation.

BODROV Aleksandr Stanislavovich (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: alex.bodrov@mail.ru

OLIMPIEVA Nadezhda Vladimirovna (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

E-mail: nadin_04@mail.ru

ZELEPUGIN Alexey Sergeyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia; Tomsk Scientific Centre, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russia)
E-mail: alekszel84@mail.ru

ZELEPUGIN Sergey Alekseyevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia; Tomsk Scientific Centre, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russia)
E-mail: szel@yandex.ru

REFERENCES

1. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. *Progress in Materials Science*, 2000, vol. 45, issue 2, pp. 103–189.
2. Valiev R. Nanostructuring of metals by severe plastic deformation for advanced properties. *Nature Materials*, 2004, vol. 3, issue 8, pp. 511–516.
3. Shorokhov E.V., Zhgilev I.N., Khomskaya I.V. i dr. Vysokoskorostnoe deformirovanie metallicheskih materialov metodom kanal'no-uglovogo pressovaniya dlya polucheniya ul'tramelkozernistoy struktury. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2009, no. 2, pp. 36–40. (in Russian)
4. Zeldovich V.I., Shorokhov E.V., Frolova N.Y. et al. Structure of titanium after dynamic channel angular pressing at elevated temperatures. *The Physics of Metals and Metallography*, 2009, vol. 108, no. 4, pp. 347–352.
5. Zeldovich V.I., Shorokhov E.V., Dobatkin S.V. et al. Structure and mechanical properties of titanium subjected to high-rate channel angular pressing and deformation by rolling. *The Physics of Metals and Metallography*, 2011, vol. 111, no. 4, pp. 421–429.
6. Shipachev A.N., Il'ina E.V., Zelepugin S.A. Deformirovanie titanovykh obraztsov pri dinamicheskom kanal'no-uglovom pressovanii. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2010, no. 4, pp. 20–24. (in Russian)
7. Suglobova I.K., Il'ina E.V., Shipachev A.N., Zelepugin S.A. Vybore parametrov nagruzheniya titanovykh obraztsov pri dinamicheskom kanal'no-uglovom pressovanii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 2(14), pp. 111–116. (in Russian)
8. Shipachev A.N., Zelepugin A.S., Il'ina E.V., Zelepugin S.A. Modelirovanie dinamicheskogo kanal'no-uglovogo pressovaniya titanovykh obraztsov po dvukhporshevoy skheme nagruzheniya. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2012, no. 10, pp. 7–11. (in Russian)
9. Zelepugin S.A., Zelepugin A.S., Bodrov A.S., Olimpiyeva N.V. Trekhmernoe modelirovanie protsessov plasticheskogo deformirovaniya metallicheskih obraztsov pri dinamicheskom kanal'no-uglovom pressovanii. *Izv. vuzov. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 7/3, pp. 50–52. (in Russian)
10. Gorelski V.A., Zelepugin S.A., Smolin A.Yu. Effect of discretization in calculating three-dimensional problems of high-velocity impact by the finite-element method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 6, pp. 722–730.
11. Johnson G.R. Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, vol. 38, issue 6, pp. 456–472.
12. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. *Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh*. Moscow, Yanus-K, 1996. (in Russian)
13. Gorelskii V.A., Zelepugin S.A., Sidorov V.N. Numerical solution of three-dimensional problem of high-speed interaction of a cylinder with a rigid barrier, taking into account thermal effects. *International Applied Mechanics*, 1994, vol. 30, issue 3, pp. 193–198.
14. Gorelskiy V.A., Zelepugin S.A., Tolkachev V.F. Issledovanie probivaniya pregrad pri nesimmetrichnom vysokoskorostnom udare s uchedom razrusheniya i teplovykh effektiv. *Izv. AN. MTT*, 1994, no. 5, pp. 121–130. (in Russian)
15. Zelepugin S.A., Zelepugin A.S. Modeling of the destruction of targets during a high-velocity impact. *Russian Journal of Physical Chemistry B, Focus on Physics*, 2008, vol. 2, issue 2, pp. 246–250.

В.Ю. Золотарев, Е.Ю. Котляров, Г.П. Серов, Д.В. Тулин, С.Н. Устинов

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕРМОРЕГУЛИРУЮЩИХ ЖАЛЮЗИ И РАДИАТОРОВ НА БАЗЕ РЕГУЛИРУЕМЫХ КОНТУРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ТРУБ

Представлено сравнение двух вариантов исполнения пассивной системы терморегулирования (ПСТР) для базового модуля космического аппарата (КА) НПО им. С.А.Лавочкина (НПОЛ) (типа «Навигатор»). В обоих случаях с помощью PSTР обеспечивается тепловой режим негерметичного приборного отсека КА, образованного из восьми тепловых сотов панелей (ТСП). Указанные ТСП монтируются на рамной конструкции, образуя боковые стенки призмы, на которых монтируется различное (термостатируемое) оборудование. Внутри восьмигранной призмы размещаются топливные баки и двигательная установка. Нижнее основание призмы открыто для функционирования двигателей, на месте верхнего основания размещается целевая аппаратура. В сравниваемых вариантах по-разному организован регулируемый сток тепла, выделяемого в приборном отсеке на ТСП. В случае применения терморегулирующих жалюзи – последние устанавливаются непосредственно на внешние излучающие стороны ТСП. Во втором случае радиаторы также крепятся с внешних сторон, параллельно ТСП, но подключаются к ним с помощью контурных тепловых труб (КнТТ) переменной проводимости. Для регулирования и в одном и в другом случае затрат электроэнергии не требуется. Дается качественное сравнение характеристик двух вариантов PSTР, предлагаемых для охлаждения одного и того же базового модуля, классифицируются их преимущества и недостатки. С помощью разработанной в программной среде NX-Siemens математической модели осуществляется количественное сравнение тепловых характеристик альтернативных PSTР (на базе жалюзи и на базе КнТТ). Рассмотренные варианты PSTР могут представлять определенный интерес для перспективных проектов НПОЛ, в частности проектов «Лаплас», «Луна-Ресурс (ОА)», «Интер-Гелиозонд», «Фобос-Грунт-2», «Венера-Д» и др.

Ключевые слова: *пассивная система терморегулирования, базовый модуль космического аппарата, радиаторы на базе контурных тепловых труб, терморегулирующие жалюзи, тепловая сотов панель, тепловые трубы, тепловой режим, тепловая математическая модель.*

Компоновка космических аппаратов, предусматривающая исполнение корпуса в виде призматической рамной конструкции, несущей топливные баки и двигательную установку (ДУ), имеет продолжительную историю и (в той или иной модификации) применяется разработчиками КА по сей день. В качестве примеров наиболее известных подобных решений, следует назвать западные КА Pioneer, Маринер, Вояджер, Galileo, Кассини [1–3] и др., а также отечественные – Фобос-Грунт и серию аппаратов (Спектр/Электро) на базе универсальной платформы Навигатор [4].

Призматический корпус более эффективно вписывается в пространство под обтекателем РН и одновременно способен предоставить больше места для размещения оборудования в составе КА. В части обеспечения теплового режима пере-

численные западные компоновки объединяет использование терморегулирующих жалюзи, отечественные компоновки – их отсутствие.

Известно, что регулируемый сток тепла позволяет повысить качество теплового режима и «разгрузить» систему электроснабжения КА. Как показывает практика, если применить для этого пассивный принцип регулирования, можно существенно повысить надежность и долговечность СТР и КА в целом. В этом смысле, терморегулирующие жалюзи зарекомендовали себя с положительной стороны и стабильно, с успехом используются в долгоживущих проектах ведущих космических агентств – NASA, ESA, JAXA.

Более новым, и по ряду параметров более эффективным, средством для организации регулируемого стока тепла являются радиационные теплообменники (РТО) на базе регулируемых КнТТ. На сегодняшний день подтверждено, что рабочий ресурс КнТТ также исчисляется годами, что подтверждается регулярным применением данных устройств со 2-й половины 1990-х годов в СТР КА различных производителей [5, 6].

Некоторые специфические особенности, связанные с обеспечением запуска и повторного запуска циркуляции теплоносителя в КнТТ, традиционно считаются факторами, сужающими границы применимости этих устройств. Однако в рассматриваемом случае РТО на базе КнТТ предлагаются как альтернатива жалюзи, т.е. размещаются непосредственно у ТСП и в пределах (наружной поверхности) ТСП, а это позволяет организовать стабильные условия для запуска КнТТ.

Особенности схемного решения перспективной ПСТР базового модуля

3D-схему анализируемой ПСТР иллюстрирует рис. 1. Здесь можно видеть, что в каждую из 8 ТСП (размерами 660×420) встроено по 5 вертикальных тепловых труб (для отвода тепла от приборов, которые на рисунке не показаны).

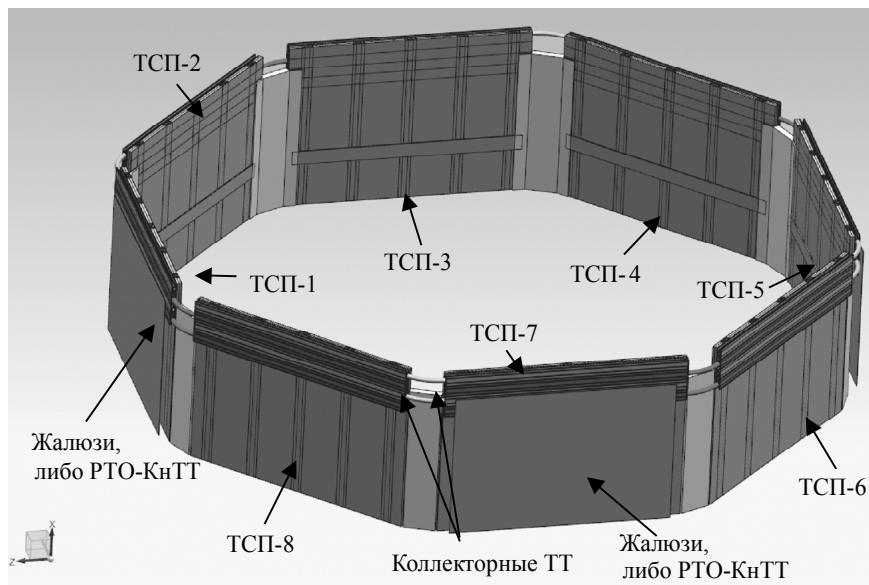


Рис.1. ПСТР базового модуля на базе 8 ТСП с 4 внешними гранями для регулируемого стока тепла

Каждые 2 соседние ТСП, попарно, у верхней кромки, соединены с помощью коллекторных теплопроводов так, что в пределах одной ТСП формируется 40 крестообразных контактных соединений тепловых труб (4×5 шт.). Таким образом, с помощью канальных (аксиальных) тепловых труб осуществляется тепловая связь между всеми ТСП, а это, в свою очередь, позволяет перераспределять как выделяемое оборудованием тепло, так и холодопроизводительность выделенных для сброса тепла поверхностей.

Для того чтобы снаружи «восьмигранника» имелись в наличии поверхности, на которые можно было устанавливать оборудование – только с помощью четырех ТСП (1-3-5-7), снаружи, зарезервировано/предусмотрено пространство для организации регулируемого стока тепла с помощью жалюзи либо радиационного теплообменника на базе КнТТ (РТО-КнТТ).

В случае оснащения рассматриваемой ПСТР терморегулирующими жалюзи, выбранными для сброса тепла ТСП, на наружную поверхность наносится покрытие с высоким ε , а сверху устанавливается жалюзийная решетка. В случае применения РТО на базе КнТТ излучающий «лист» РТО устанавливается параллельно ТСП, а испаритель КнТТ монтируется на коллекторные теплопроводы сверху. Все прочие поверхности ТСП вместе с оборудованием закрываются ЭВТИ.

Коллекторные теплопроводы для варианта ПСТР с жалюзи лучше размещать внутри восьмигранника, чтобы не мешать установке жалюзи и увеличить излучающую поверхность. Для варианта с КнТТ коллекторы лучше разместить со стороны РТО, чтобы сократить расстояние от испарителя КнТТ до РТО и, одновременно, увеличить площадь ТСП, предназначенную для установки приборов.

Взаимное расположение тепловых труб и коллекторных тепловых труб в пространстве организовано таким образом, чтобы система могла функционировать в поле массовых сил при наземной отработке КА. Однако в «жалюзийном» варианте распределение холодопроизводительности будет не в полной мере соответствовать штатной, поскольку тепло от коллектора к ТСП в поле массовых сил не передается.

Изображение, показанное на рис. 1, является также геометрической моделью для выполнения тепловых расчетов в NX-Simens [7].

Характеристики жалюзи

Для количественной оценки характеристик ПСТР базового модуля, укомплектованного жалюзи, использованы параметры жалюзийных решеток американского производителя Orbital Science (современное название Orbital ATK), оснащавшего данными устройствами КА Viking, Voyager, GOES, TRMM и многие другие.

Теплопередающие характеристики жалюзи Orbital Science иллюстрирует рис. 2 [8]. Здесь можно видеть, что эффективная излучательная способность панели, покрытой жалюзи, способна меняться в диапазоне $\varepsilon=0.115-0.707$.

Это, в свою очередь, позволяет рассеивать тепловым излучением с панели в космос поток свыше 100 Вт/м^2 при открытых створках жалюзи и «удерживать» температуру этой же панели (при закрытых жалюзи) с помощью нагревателя мощностью 10 Вт/м^2 . (Рассматривается температурный диапазон ТСП $0-50^\circ\text{C}$)

Работа жалюзи не требует энергозатрат извне. Положение створок закрывающих и открывающих панель, изменяется в зависимости от температуры с помощью определенным образом настроенной биметаллической пружины. Более подробное описание устройства и работы жалюзи можно найти в [9, 10].

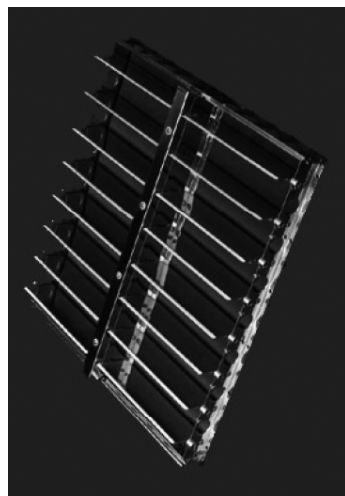
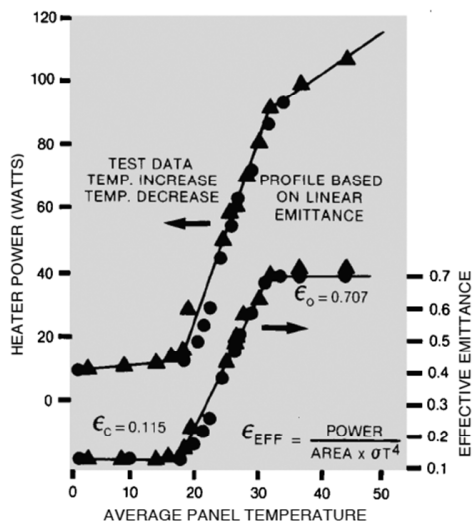


Рис. 2. Orbital Science терморегулирующие жалюзи

Характеристики РТО на базе КнТТ

Для количественной оценки характеристик ПСТР базового модуля, укомплектованного РТО на базе КнТТ, использовались параметры теплопроводов-радиаторов НПОЛ (рис. 3). Теплопроводы-радиаторы НПОЛ представляют собой КнТТ с конденсатором, встроенным в излучающую панель, имеющую покрытие ($A_s < 0.3$, $\epsilon > 0.88$, белая эмаль). Поскольку регулируемый РТО может принимать низкие температуры (ниже -150°C), в качестве теплоносителя в КнТТ применяется пропилен C_3H_6 , позволяющий выдерживать равновесные температуры до -190°C .

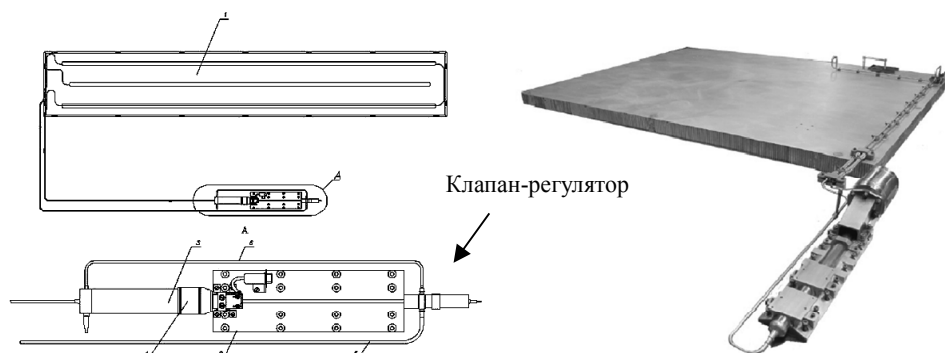


Рис. 3. Теплопровод-радиатор: НПОЛ – слева, Orbital Science – справа.

Для выполнения функции регулирования температуры КнТТ-РТО НПОЛ снабжены пассивным клапаном [9], который при снижении температуры испарителя ниже заданной (например $+3^\circ\text{C}$) «отключает» РТО. Осуществляя регулирование, клапан, представляющий собой пассивный регулятор давления, направляет циркулирующий теплоноситель либо в РТО, либо в обход него, через байпас.

В формальном выражении это соответствует увеличению термического сопротивления КнТТ в соответствии с диаграммой рис. 4.

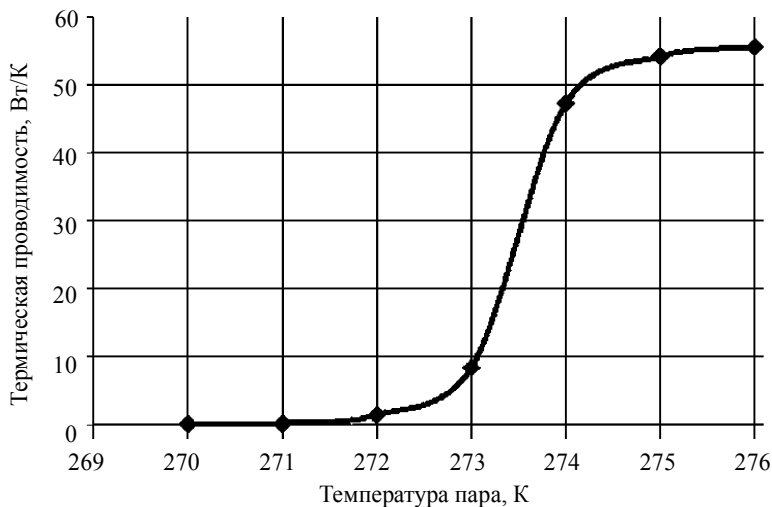


Рис. 4. Типовая теплопередающая характеристика конденсатора КнТТ теплопровода-радиатора НПОЛ

Наиболее важным свойством РТО, предлагаемым «взамен жалюзи», является отсутствие активных элементов управления для организации запуска и повторного запуска КнТТ. Запуск контура осуществляется с помощью небольшого специального РТО, установленного на компенсационной полости [10]. Другой вариант предусматривает калиброванное тепловое соединение компенсационной полости с РТО [11].

Поскольку излучательную способность (обычного плоского) РТО можно сделать выше, чем у жалюзи, – появляется возможность рассеивать в космическое пространство аналогичную тепловую мощность при более низкой температуре. По грубым оценкам для РТО хладопроизводительностью около 100 Вт тепловая проводимость теплопередающего тракта от ТСП к излучающей поверхности РТО должна быть не ниже

$$K_{\text{ТСП-РТО}} = \frac{Q}{T_{\text{ТСП}} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_{\text{жал}}}{\varepsilon_{\text{РТО}}} \right)^{0.25} \right)} = \frac{100}{313 \left(1 - \left(\frac{0.707}{0.88} \right)^{0.25} \right)} = 6 \frac{\text{Вт}}{\text{К}},$$

чтобы РТО-КнТТ работал, не уступая жалюзи по характеристикам.

Стандартные параметры КнТТ с конденсатором-радиатором производства НПОЛ позволяют достичь как указанной граничной, так и более высокой тепловой проводимости, что указывает на потенциальное преимущество ПСТР, оснащаемой РТО-КнТТ вместо жалюзи.

Отдельное внимание следует сфокусировать на выборе габаритов радиатора запуска КнТТ. Если КнТТ спроектирована и изготовлена без технологических отклонений – мощность, отводимая от КП, необходимая для циркуляции теплоносителя, будет составлять единицы процентов от номинальной мощности КнТТ. Различные оценки показывают, что мощность 3–4 Вт (на уровне нормальных темпе-

ратур, отводимая от КП) является достаточной для запуска КнТТ, причем эта же мощность (до и после запуска) будет отводиться от охлаждаемого объекта, а это позволяет выделить (в виде «автономного» сегмента) часть основного РТО для выполнения функции РТО-запуска ($\sim 0.01 \text{ м}^2$). То есть дополнительной площади выделять не требуется.

Калиброванный тепловод-«шину» между КП и РТО более логично применять для нерегулируемых РТО [13], радиатор запуска [12] – для регулируемых. При этом оба варианта являются рабочими для рассматриваемой здесь задачи.

Качественное сравнение альтернативных схем ПСТР

Общими свойствами двух технических решений ПСТР являются:

- использование пространства у внешней стороны ТСП для диссипации тепла таким образом, что на этих поверхностях нельзя размещать оборудование (для КнТТ-РТО это, прежде всего, невозможность разместить навигационное оборудование);

- обеспечение тепловой связи с помощью коллекторных теплопроводов между всеми ТСП для рационального использования применяемых средств обеспечения теплового режима;

- соизмеримые массогабаритные характеристики всех тепловых агрегатов СТР, в частности теплоотводящих трактов. Жалюзи, закрывающие одну ТСП, согласно спецификации Orbital Science, имеют массу около 4.5 кг, а (замещающий их) теплопровод КнТТ-радиатор НПОЛ с аналогичными габаритами имеет массу около ($1.5 + 2.0 = 3.5$ кг, испаритель + РТО + крепления 0.35 кг).

В качестве преимуществ ПСТР, использующей терморегулирующие жалюзи можно выделить следующие:

- радиационный сброс тепла осуществляется непосредственно с поверхности панели, на которой установлено оборудование: без перестыков и теплопередающих трактов между РТО и ТСП;

- рабочий ресурс применения жалюзи, проверенный в космосе, составляет десятки лет;

- при организации самодостаточного охлаждения единичной ТСП с помощью жалюзи вообще можно отказаться от применения в ней тепловых труб. Как следствие, при выходе из строя тепловых труб (ТСП и коллекторных) отвод тепла в пределах одной ТСП все равно будет происходить непосредственно с панели.

К недостаткам применения жалюзи следует отнести:

- невозможность обеспечить «тепловое» подключение излучающей панели к коллекторам (в условиях гравитации), соединяющим ТСП между собой, при наземной отработке КА (так как от коллектора к ТСП тепло, в режиме термосифона, не передается);

- наличие механических подвижных элементов, экспонированных в космическое пространство;

- при засветке Солнцем жалюзи не закрывают, а открывают ТСП, что для связанных в тепловом отношении ТСП представляет «неправильный алгоритм» работы.

В качестве преимуществ ПСТР на базе РТО с КнТТ следует назвать:

- возможность диодной работы РТО на базе КнТТ при прямой засветке Солнцем (т.е. возможность полного отключения РТО, если его температура выше температуры ТСП);

- практически полное отключение РТО на холодных режимах, связанное с высоким соотношением термических сопротивлений, присущее регулируемым КнТТ (>1:100 при открытом и закрытом состоянии клапана);

- получение возможности теплоизолировать все ТСП приборного отсека с помощью ЭВТИ;

- наличие большей эффективности излучения у открытого РТО, чем у ТСП, закрытой жалюзи, а также, возможность наращивать поверхность РТО (относительно габаритов ТСП) и более свободно определять его ориентацию в пространстве.

- отсутствие механически подвижных элементов, экспонированных в космическое пространство.

К наиболее очевидным недостаткам применения КнТТ в рассматриваемой задаче можно отнести:

- менее продолжительный подтвержденный ресурс применения в космосе;

- полная потеря РТО при разгерметизации КнТТ или при выходе клапана из строя.

Методика сравнения количественных характеристик ПСТР

Количественное сравнение характеристик двух рассматриваемых ПСТР было проведено с помощью модели, разработанной в NX-Siemens (см. рис. 1). Здесь учтено наличие 5 тепловых труб (ТТ) в каждой ТСП и тепловое соединение каждых двух соседних ТСП коллекторными теплопроводами. Площадь излучателей (жалюзи либо РТО) для двух вариантов ПСТР принимается равной, а места их размещение идентичны. Удельная теплопередающая характеристика для ТТ, интегрированных в ТСП, и для коллекторных ТТ принята на уровне 40 Вт/мК. Для КнТТ проводимость стыка испарителя с коллекторными ТТ составляет 16 Вт/К, а минимальная проводимость испаритель – РТО составляет 50 Вт/К. Учитывается теплопроводность алюминиевых обечаек ТСП. Подвод тепла к каждой ТСП имитируется с плотностью порядка 0.1 Вт/см² для демонстрации различия температуры посадочных мест и средней температуры ТСП. При попадании солнечного излучения на излучающую панель и для жалюзи и для КнТТ-РТО принимается $As = 0.3$.

Методика сравнения двух ПСТР предусматривает:

- сравнение расчетной хладопроизводительности СТР при фиксированном максимальном уровне температуры посадочных мест 50 °С;

- определение и сравнение температурного уровня и градиентов температуры при равном теплонагружении ТСП (50 Вт × 8);

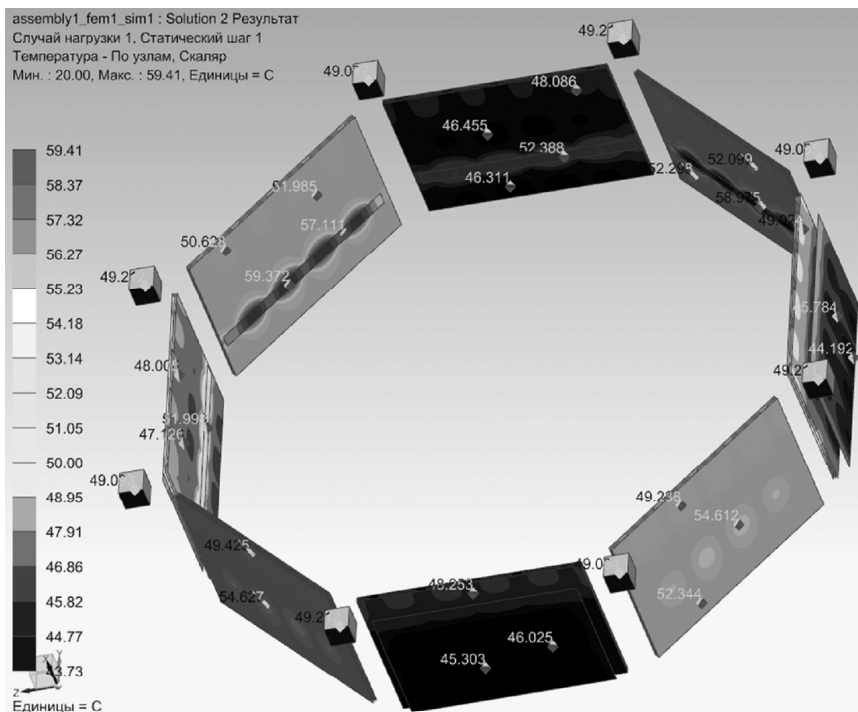
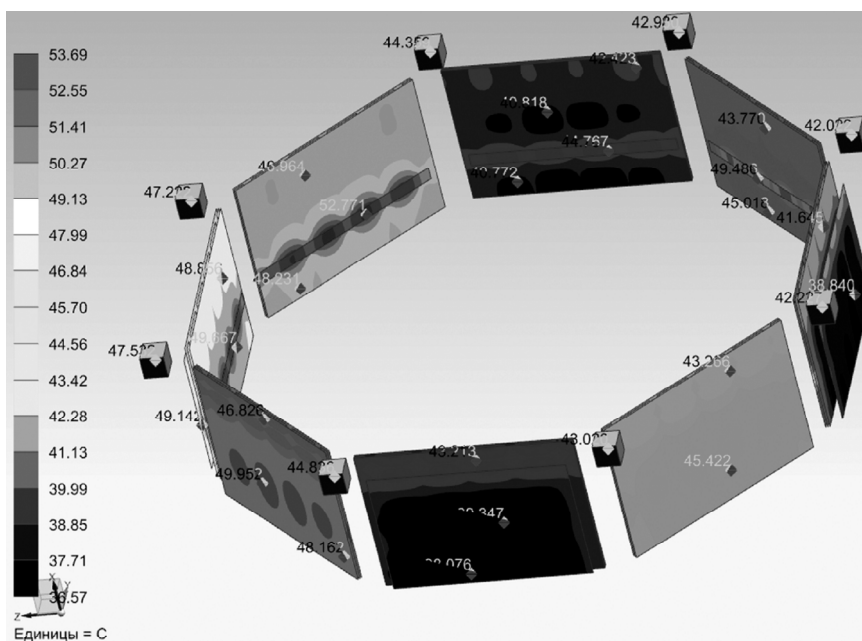
- определение и сравнение градиентов температуры при боковой засветке восьмигранника и равномерном теплонагружении (35 Вт × 8);

- оценку энергозатрат для поддержания заданной минимальной температуры ТСП на уровне 5 °С.

Результаты расчетов помещены в сравнительную таблицу.

Здесь видно, что хладопроизводительность ПСТР на базе РТО-КнТТ выше, а температурный уровень работы ТСП при прочих равных условиях – ниже.

Для понимания уровня детализации теплопередающих трактов в используемой тепловой модели с помощью рис. 5 и 6 показана работа ПСТР при боковой засветке и при ее отсутствии. Боковая засветка рассмотрена здесь в связи с традиционным использованием 1-степенных батарей солнечная (БС) в системе электроснабжения (СЭС) КА НПОЛ: это приводит к возможности соответствующего разворота КА и «утрате» хладопроизводительности одного из РТО.

Рис. 5. ПСТР с жалюзи, равномерное теплонагружение $Q = 50 \text{ Вт} \times 8$ Рис. 6. ПСТР с жалюзи, теплонагружение $Q = 35 \text{ Вт} \times 8$, солнечное излучение (фронтальное) на одну излучающую панель $S = 1400 \text{ Вт/м}^2$

Из рис. 5 видно, что четыре панели обеспечивают сток тепла, а максимальная температура достигается на «условных» посадочных местах, представленных в виде «полосок». Для детализированной компоновки оборудования разработанная модель позволит получить детализированные температурные поля.

Таблица сравнения ПСТР с жалюзи и РТО-КнТТ

Режим	Жалюзи	КнТТ+ РТО
Температура ТСП +50 °С	Расчетная хладопроизводительность 384 Вт	Расчетная хладопроизводительность 421 Вт
Нагрузка 50 Вт × 8	Градиент температуры 59.4–46.3 °С	Градиент температуры 47.3–37.3 °С
Нагрузка 35 Вт × 8 + Qs = 1400Вт/м ² (засветка одного РТО, #1)	Градиент температуры 52.8–40.8 °С	Градиент температуры 39.5–29.1 °С
Температура ТСП +5 °С (холодный режим)	Теплопотери 6 Вт (4ТСП) + + 37 Вт (4 жалюзи)	Теплопотери (6 Вт + 6 Вт) – 8 ТСП +6Вт – 4 РТО +15Вт – 4 РТОзап

Анализ результатов расчетов

Результаты сравнительных расчетов, полученные для горячих режимов, указывают на преимущество РТО-КнТТ (относительно жалюзи).

Для холодных режимов сравнение делается на основе паритета мощностей, необходимых для поддержания температурного уровня +5 °С. Предполагается, что только наружные поверхности ТСП рассеивают тепло в космос. Внутренние поверхности ТСП обращены к (теплоизолированным) топливным бакам ДУ, температура которых близка к температуре приборного отсека (здесь теплообмен несущественный).

Итак, в соответствии с таблицей, при использовании жалюзи 4 ТСП теряют 6 Вт, а через закрытие жалюзи уходит около 37 Вт ($\varepsilon = 0.115$).

При использовании РТО-КнТТ имеем следующее: 8 ТСП теряют 12 Вт, а сами РТО < 6 Вт (так как связь РТО с ТСП имеет небесконечное термическое сопротивление).

Таким образом, для 4 РТО-запуска остается $(37+6) - 18 = 25$ Вт.

Разумеется, хладопроизводительность 4 РТО-запуска можно сделать меньшей, если заданным образом регламентировать качество изготовления испарителей КнТТ. Следовательно, и по холодному режиму можно предположить потенциальное преимущество КнТТ по отношению к жалюзи.

Усовершенствование РТО на базе КнТТ

Дополнительный выигрыш в массе и хладопроизводительности РТО на базе КнТТ может быть получен при использовании двухстороннего излучения «листа» РТО-КнТТ. Экранно-вакуумная теплоизоляция (ЭВТИ), закрывающая ТСП и расположенная за РТО, служит экраном, с помощью которого обратная сторона РТО может излучать в открытое космическое пространство.

Качественный анализ указывает на то, что 2-сторонний РТО будет иметь большую хладопроизводительность, чем односторонний, поскольку наличие зазора (между ТСП и РТО) обеспечит снижение температуры ЭВТИ относительно

РТО. Если же зазор небольшой – тогда за РТО на ЭВТИ возникнет «теплое пятно», которое не способно эффективно излучать в открытое пространство. В случае, когда РТО нельзя необходимым образом отодвинуть от ТСП, можно выполнить перфорацию в листе РТО (рис. 7), за счет чего снизится температура ЭВТИ (в зоне «пятна») и снизится масса самого РТО. Эффект от перфорации, прежде всего, снижает массу. Повышение хладопроизводительности зависит от зазора за тыльной поверхностью РТО, а также от характеристик облицовочного покрытия ТСП на которой РТО закреплен.

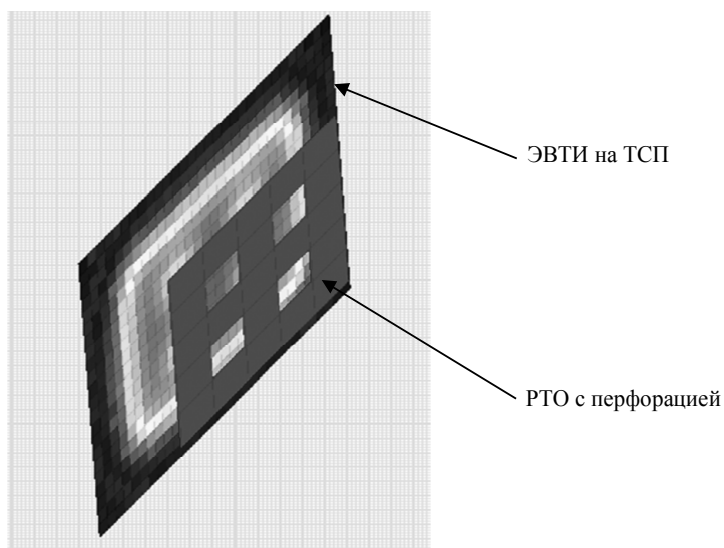


Рис. 7. Перфорированный РТО на базе КнТТ (НПОЛ)

Для рассматриваемой задачи количественный анализ, проведенный с помощью ТЕРМ [14] и NX [7], показывает, что при перфорации порядка 16 % (см. рис. 7) и дистанции ~ 60 мм между ЭВТИ и РТО – хладопроизводительность РТО повысится не менее чем на 23 % (относительно одностороннего варианта), при этом будет получено соответствующее (~16 %) снижение массы каждого РТО. Хладопроизводительность перфорированного РТО при указанном выигрыше в массе ниже, чем у неперфорированного, на 9 %.

Выводы и рекомендации

Анализируя полученные в настоящей работе результаты, можно прийти к следующим выводам:

- при обеспечении теплового режима приборного отсека на базе связанных в тепловом отношении между собой ТСП вместо жалюзи на панели можно устанавливать радиаторы с КнТТ (сохраняя концепцию компоновки);
- предлагаемое техническое решение на базе КнТТ может оказаться более эффективным по массогабаритным и тепловым характеристикам;
- доказанная продолжительность работы жалюзи в космосе выше, чем КнТТ, при этом отсутствует зависимость жалюзи от наличия в системе ТТ и способа их трассировки. Таким образом, для средних плотностей тепловыделения от оборуду-

дования < 0.025 Вт/см² жалюзи могут представлять интерес как более простое и надежное решение.

В работе не сравнивалось поведение жалюзи и КнТТ в нестационарном режиме, однако, из практики известно, что работа жалюзи (при регулировании) вызывает более значимые температурные осцилляции, чем РТО на базе КнТТ, поэтому жалюзи не рекомендуют применять для объектов, обладающих низкой тепловой инерцией. КнТТ с РТО запуска не имеют таких ограничений и при этом достаточно стабильно поддерживают температуру.

Сформулированные технические решения будут полезны при разработке эскизных проектов межпланетных КА с увеличенным ресурсом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mariner-Venus, Final Project Report, 1962, NASA-SP-59
2. *Kerry T. Nock*. Galileo spacecraft thermal designs // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1991. V. 28. No. 2. P. 129–129.
3. *Virgil Mireles and Glenn T. Tsuyuki*. A Summary of the Cassini System-Level Thermal Balance Test: Engineering Subsystems, 97ES-278.
4. Космическая платформа «Навигатор». URL: // ru.wikipedia.org/wiki/ Космическая_платформа#cite_note-navigator-16
5. *Michael Nikitkin*. Loop heat pipes in the USA, from inception to flight // 2nd International Conference Heat Pipes for Space Applications. Moscow, Russia. 2014.
6. *Bednov S.M., Vezhnevets P.D., Gulya V.M., Kopyatkevich R.M., et al.* A hybrid design of thermal control system for spacecraft // *Cosmonautics and Rocket Engineering*. No. 3(36). Korolyov: TSNIIMASH, 2004. P. 114–117.
7. *Гончаров П.С., Артамонов И.А., Халитов Т.Ф., Денисихин С.В., Сотник Д.Е.* NX Advanced Simulation. Инженерный анализ. М.: ДМК Пресс, 2012.
8. Спецификация на жалюзи, Orbital Technical Services Division. URL: www.orbital.com, www.slideshare.net/IngesAerospace/thermal-louvers-brochure-orbital-company
9. ECSS-E-HB-31-01, Thermal design handbook – Part 12:Louvers
10. *Miguel Domingo, José Julián Ramírez*. Mechanical design and test of rosetta platform louvres // *Proceedings of the 10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, 24–26 September 2003, San Sebastián, Spain.
11. *Bodendieck F., Schlitt R., Romberg O., Goncharov K., Buz V., Hildebrand U.* Precision Temperature Control With a Loop Heat Pipe, 05-ICES-145, ICES, Rom, 2005.
12. Патент РФ № 2044983 «Контурная тепловая труба».
13. *Goncharov K., Nikitkin M., Golovin O.* Loop Heat Pipes in Thermal Control Systems for “Obzor” Spacecraft, 25-ICES, USA, CA, 1995.
14. *ТЕРМ*, Руководство пользователя, v1.11. Королев: ЦННИМАШ, 2003.

Статья поступила 23.06.2015 г.

Zolotarev V.Yu., Kotlyarov E.Yu., Serov G.P., Tulin D.V., Ustinov S.N. COMPARATIVE ANALYSIS OF THERMAL LOUVERS AND RADIATORS ON BASE OF REGULATED LOOP HEAT PIPES

DOI 10.17223/19988621/37/6

This paper presents a comparison of two alternate versions of the passive thermal control system (PTCS) intended for the spacecraft's service module manufactured by Lavochkin Association (LA). In both cases the PTCS provides the required thermal mode of instrument compartment, formed on the base of eight thermal honeycombs panels (THP) with built-in heat pipes.

Two different options of regulated removal of heat generated in the honeycomb panels have been analyzed: in the first case, with application of thermal louvers; in the second case, with use of radiators on the base of loop heat pipes (LHP).

A qualitative comparison of the properties of the two proposed options has been done and their advantages and disadvantages were classified. With the help of a thermal mathematical model developed using the NX-Siemens software environment, the temperature characteristics of the alternative thermal control systems are compared. The recommendations to the application of the proposed technical solutions are made.

Keywords: passive thermal control system, the basic module of spacecraft, radiator on base of loop heat pipe, thermal louvers, honeycomb panels with heat pipes, thermal mode, thermal mathematical model.

ZOLOTAREV Victor Yurievich (M.Sc., Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: fasdertok@bk.ru

KOTLYAROV Evgeny Yurievich (M.Sc., Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: key@laspace.ru

SEROV Gennady Pavlovich (Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: serov@laspace.ru

TULIN Dmitry Vladimirovich (Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: tulin@laspace.ru

USTINOV Svyatoslav Nicolaevich (Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation)
E-mail: ust@laspace.ru

REFERENCES

1. *Mariner-Venus, Final Project Report*, 1962, NASA-SP-59
2. Kerry T. Nock. Galileo spacecraft thermal designs. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1991, vol. 28, no. 2, pp. 129–129.
3. Virgil Mireles and Glenn T. Tsuyuki. *A Summary of the Cassini System-Level Thermal Balance Test: Engineering Subsystems*, 97ES-278.
4. *Kosmicheskaya platforma «Navigator»*. URL: ru.wikipedia.org/wiki/Kosmicheskaya_platforma#cite_note-navigator-16(in Russian)
5. Michael Nikitkin. Loop heat pipes in the USA, from inception to flight. *2nd International Conference Heat Pipes for Space Applications*. Moscow, Russia, 2014.
6. Bednov S.M., Vezhnevets P.D., Gulya V.M., Kopyatkevich R.M., et al. A hybrid design of thermal control system for spacecraft. *Cosmonautics and Rocket Engineering*. Korolyov, TSNIIMASH, 2004, no. 3(36), pp. 114–117.
7. Goncharov P.S., Artamonov I.A., Khalitov T.F., Denisikhin S.V., Sotnik D.E. *NX Advanced Simulation. Inzhenernyy analiz*. Moscow, DMK Press Publ., 2012. (in Russian)
8. Spetsifikatsiya na zhalyuzi, Orbital Technical Services Division. URL: www.orbital.com, www.slideshare.net/IngesAerospace/thermal-louvers-brochure-orbital-company
9. ECSS-E-HB-31-01, *Thermal design handbook – Part 12: Louvers*
10. Miguel Domingo, José Julián Ramírez. Mechanical design and test of rosetta platform louvers. *Proceedings of the 10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, 24–26 September 2003*, San Sebastián, Spain.
11. Bodendieck F., Schlitt R., Romberg O., Goncharov K., Buz V., Hildebrand U. *Precision Temperature Control With a Loop Heat Pipe*, 05-ICES-145, ICES, Rom, 2005.
12. Patent RF no. 2044983 «Konturnaya teplovaya trub». (in Russian)
13. Goncharov K., Nikitkin M., Golovin O. *Loop Heat Pipes in Thermal Control Systems for “Obzor” Spacecraft*, 25-ICES, USA, CA, 1995.
14. *TERM, Rukovodstvo pol'zovatelya*, v1.11. Korolev, TsNNIMASH Publ., 2003. (in Russian)

О.В. Матвиенко, Е.В. Евтюшкин, А.О. Андропова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ДРЕЙФА ЧАСТИЦ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ПОТОКЕ

Исследуются рамки применимости модели дрейфа частиц в потоке. Для описания свойств многофазных потоков в настоящее время используют два метода, основанные на подходе Лагранжа и Эйлера. В случае частиц с малой инерционностью эти подходы могут быть заменены моделями, основанными на концепции дрейфа дисперсной фазы относительно несущей среды. При этом скорость дисперсной фазы определяется в предположении динамического баланса сил, действующих на частицы. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что при $Kn_p < 1$, $Re < 1$ использование модели дрейфа частицы дает погрешность, не превышающую 1%.

Ключевые слова: механика многофазных сред, частицы, дисперсная фаза, модель дрейфа, осаждение.

Многофазные течения широко распространены в энергетике, химической, обрабатывающей промышленности и имеют широкую область применения [1–9]. В инженерных приложениях приходится иметь дело с большим разнообразием многофазных сред, которые принято разделять на следующие классы [10]:

- газозвеси, дым – смеси газа с твердыми частицами;
- аэрозоли, туман – смесь газа с жидкими каплями;
- суспензии – смесь жидкости с твердыми частицами;
- эмульсии – смесь жидкости с каплями другой жидкости;
- газожидкостные среды, пены – смесь жидкости с газовыми пузырями;
- зернистые (гранулированные) среды – упакованные твердые частицы, в зазорах которых содержится газ или жидкость;
- капиллярно-пористые среды – пористые тела, содержащие в порах газ или жидкость.

Твердые частицы, капли, пузырьки газа называются дисперсными частицами, или дисперсной фазой, а окружающую их фазу – несущей средой.

Для описания свойств многофазных потоков в настоящее время используют два метода, основанные на подходе Лагранжа и Эйлера [11, 12].

В рамках подхода Лагранжа выписываются уравнения движения отдельных частиц, рассматриваемых как материальные точки, в форме второго закона Ньютона, в правых частях которого стоят силы, действующие на частицу в потоке [13]. Несмотря на кажущуюся простоту описания движения частиц в рамках подхода Лагранжа, этот метод обладает, по крайней мере, двумя существенными недостатками. Первый из них связан с вычислительными трудностями, связанными с необходимостью решать огромное число уравнений движения для совокупности частиц. Так, для описания пространственного движения N частиц требуется решить $6N$ уравнений. Проблема становится еще более сложной, если возникает необходимость моделирования движения частиц с учетом их взаимодействия. Вторая проблема связана с трудностью учета стохастического характера движения частиц в потоке с турбулентностью. Используемые в настоящее время подходы,

основанные на использовании метода Монте-Карло, требуют проведения целой серии расчетов, так, чтобы результат их осреднения имел объективный характер.

Эффекты взаимодействия фаз, стохастический характер движения большой совокупности частиц могут быть учтены в рамках подхода Эйлера, в соответствие с которым многофазная среда рассматривается как совокупность многоскоростных континуумов (несущей среды и различных фракций частиц). Для каждого из этих континуумов записываются уравнения движения в форме Эйлера, а также уравнения сохранения массы каждого из рассматриваемых континуумов.

В случае частиц с малой инерционностью этот подход может быть заменен моделями, основанными на концепции дрейфа дисперсной фазы относительно несущей среды. При этом скорость дисперсной фазы определяется в предположении малости инерционных членов или, иными словами, динамического баланса сил, действующих на частицы. Таким образом, нет необходимости решать полные дифференциальные уравнения движения, а достаточно рассмотреть уравнение динамического баланса сил.

Вследствие своей простоты и экономичности модели дрейфа частиц получили широкое распространение в инженерной практике. Тем не менее возможность их применения должна определяться не интуитивными оценками и соображениями простоты, а соответствующими количественными оценками.

Отметим, что использование как подхода Лагранжа, так и подхода Эйлера основано на предположении малости размеров частиц d_p по сравнению с характерным размером области течения L , за который в рамках вычислительной гидродинамики удобно принять размер конечноразностной сетки. Таким образом, должно выполняться соотношение

$$Kn_p = d_p / L \ll 1. \quad (1)$$

В случае нарушения условий (1) в рамках подхода Лагранжа частицу невозможно принять за материальную точку и приходится исследовать картину обтекания частицы потоком. Невыполнение условия (1) в рамках подхода Эйлера эквивалентно невозможности применить модель взаимопроникающих континуумов.

Рассмотрим некоторый объем жидкости, соответствующий объему конечноразностной ячейки. Скорость несущей среды внутри этого объема $\vec{v}_l$ можно считать независимой от координат. Введем систему координат, движущуюся со скоростью $\vec{v}_l$. В этой системе координат несущая среда будет неподвижной.

При моделировании движения дисперсной фазы внутри конечноразностной ячейки будем исходить из следующих предположений:

- движение частицы определяется силой Архимеда и силой сопротивления;
- частица дисперсной фазы с начальной скоростью $\vec{v}_0$ попадает в некоторый объем покоящейся жидкости;
- вектор скорости частицы в начальный момент времени параллелен вектору ускорения, вызываемого силой Архимеда;
- частицы дисперсной фазы предполагаются сферическими;
- взаимодействие между частицами не учитывается.

Отметим, что последнее предположение позволяет исследовать движение только одиночной частицы.

В рамках этих предположений уравнение движения одиночной частицы можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} C_D d_p^{-1} |\vec{v}_p| \vec{v}_p + \frac{\rho_p - \rho}{\rho_p} \vec{g}. \quad (2)$$

В уравнении (2) $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, d_p – диаметр дисперсной фазы, ρ , ρ_p – плотность несущей и дисперсной фазы $\vec{v}_p$ – скорость дисперсной фазы, коэффициент сопротивления C_D является функцией относительного числа Рейнольдса $Re = \rho |\vec{v}_p| d_p / \mu$.

Стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать кусочными зависимостями вида

$$C_D = C' Re^n, \quad (3)$$

где значения коэффициентов в формуле (3) приведены в таблице.

Значения коэффициентов в законе сопротивления

Число Рейнольдса Re	$Re < 1$	$1 < Re < 10$	$10 < Re < 800$	$800 < Re \leq 2 \cdot 10^5$
C'	24	26.3	12.3	0.44
n	-1	-0.8	-0.5	0

Определим скорость движения частицы в рамках модели дрейфа. В случае гравитационного оседания частиц уравнение динамического баланса сил может быть представлено следующим образом:

$$\frac{3}{4} C_D \frac{\rho}{\rho_p} d_p^{-1} |v_s| v_s + \frac{\rho - \rho_p}{\rho} g = 0, \quad (4)$$

где v_s – скорость стационарного осаждения частицы (скорость седиментации).

При движении частиц, описываемом законом сопротивления Стокса скорость седиментации может быть определена как

$$v_s = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g d^2. \quad (5)$$

В переходной области скорость седиментации определится выражением

$$v_s = \left[\frac{4}{3} (C')^{-1} (\rho_p - \rho) \rho_p g \right]^{5/6} \frac{d_p^{3/2}}{\rho \mu^{4/6}} \text{ для } 1 < Re < 10; \quad (6)$$

$$v_s = \left[\frac{4}{3} (C')^{-1} (\rho_p - \rho) \rho_p g \right]^{2/3} \frac{d_p}{\rho \mu^{1/3}} \text{ для } 10 < Re < 800. \quad (7)$$

При движении частицы, описываемом законом сопротивления Ньютона, скорость седиментации

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_p - \rho}{\rho} C_D^{-1} g d_p}. \quad (8)$$

Скорость седиментации можно рассматривать в качестве масштабной характеристики, характеризующей скорость движения частицы в сопротивляющейся среде. Другими такими масштабными характеристиками являются время седимента-

ции t_s и длина седиментации l_s . Эти масштабы могут быть определены следующим образом:

$$t_s = \frac{\rho}{\rho - \rho_p} \frac{v_s}{g}, \quad l_s = v_s t_s. \quad (9)$$

Для дальнейшего анализа удобно представить уравнения движения в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные скорости, координаты и время:

$$\varphi = \frac{v}{v_s}, \quad \xi = \frac{x}{l_s}, \quad \tau = \frac{t}{t_s}. \quad (10)$$

Таким образом, движение частицы в рамках модели дрейфа будет описываться следующими зависимостями:

$$\varphi = \varphi_d = 1, \quad \xi = \xi_d = \tau. \quad (11)$$

При необходимости учета инерционных свойств частицы необходимо решить дифференциальные уравнения движения, которые в безразмерном виде имеют вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -|\varphi| \varphi^{1+n} + 1, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \varphi, \quad (12)$$

где n – показатель степени у числа Рейнольдса в законе сопротивления.

Уравнения движения частицы (12) замыкаются следующими начальными условиями:

$$\tau = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \xi = 0. \quad (13)$$

Решение системы уравнений (12) с начальными условиями (13) зависит от закона сопротивления.

Рассмотрим сначала движение частиц в режиме сопротивления Стокса: $n = -1$. Интегрирование уравнений (12) с условиями (13) позволяет определить скорость и перемещение частицы для различных моментов времени. В безразмерном виде эти зависимости имеют вид

$$\varphi = 1 + (\varphi_0 - 1)e^{-\tau}, \quad \xi = \tau + (\varphi_0 - 1)[1 - e^{-\tau}]. \quad (14)$$

Скорость и перемещение частицы, движущейся в режиме сопротивления Стокса, отличаются от скорости дрейфа и перемещения, вызванного дрейфом на следующие значения:

$$\Delta\varphi = (\varphi_0 - 1)e^{-\tau}, \quad \Delta\xi = (\varphi_0 - 1)[1 - e^{-\tau}]. \quad (15)$$

Время, за которое частица переместится на характерный размер области течения L , в рамках модели дрейфа определится как

$$\Delta\tau = \frac{L}{l_s} = \lambda = \frac{18}{\text{Kn}_p \text{Re}_s}, \quad (16)$$

где $\text{Re}_s = \rho v_s d_p / \mu$ – седиментационное число Рейнольдса, $\text{Kn}_p = d_p / L$ – сеточное число Кнудсена. Таким образом, относительная погрешность в смещении частицы, даваемая моделью дрейфа, может быть записана в виде

$$\frac{\Delta\xi}{\lambda} = \frac{\text{Kn}_p \text{Re}_s}{18} (\varphi_0 - 1) \left[1 - \exp\left(-\frac{18}{\text{Kn}_p \text{Re}_s}\right) \right]. \quad (17)$$

Модель дрейфа частиц может быть применена при $Kn_* = \Delta\xi/\lambda \ll 1$. Границы применимости формулы (17) определяются границами применимости закона сопротивления Стокса:

$$Re_s \leq 1, \quad Re\varphi_0 \leq 1. \tag{18}$$

Решение уравнений движения частицы при ньютоновском режиме сопротивления позволяет найти изменение скорости и координаты частицы со временем, а также относительную погрешность модели дрейфа:

$$\varphi = \frac{(1 + \varphi_0) - (1 - \varphi_0) \exp(-2\tau)}{(1 + \varphi_0) + (1 - \varphi_0) \exp(-2\tau)}; \tag{19}$$

$$\xi = \ln \left| \frac{(1 - \varphi_0) + (1 + \varphi_0) \exp(3/2 C_D Kn_p)}{2} \right| - 2\tau; \tag{20}$$

$$\frac{\Delta\xi}{\lambda} = \frac{4}{3} C_D^{-1} Kn \cdot \ln \left| \frac{(1 - \varphi_0) + (1 + \varphi_0) \exp(3/2 C_D Kn_p)}{2} \right| - 2. \tag{21}$$

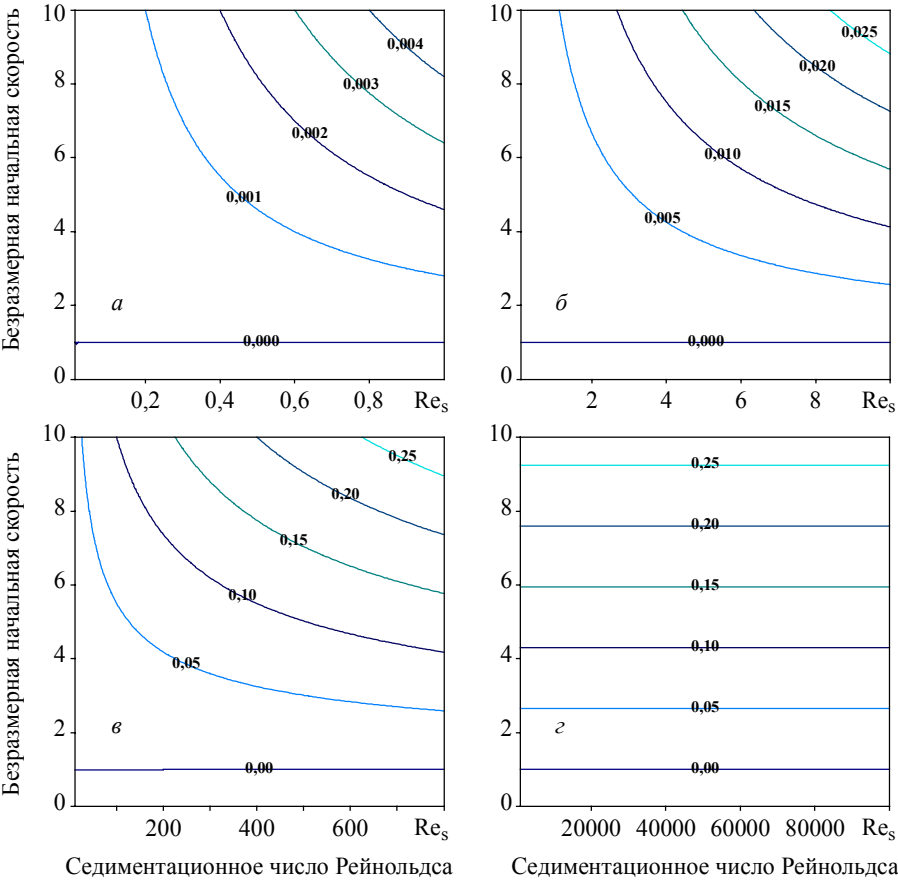


Рис. 1. Относительная погрешность модели дрейфа:
а – $Re < 1$, б – $1 < Re < 10$, в – $10 < Re < 800$, г – $800 < Re$

Определение закона движения частицы и определение погрешности модели дрейфа в переходной области в аналитической форме, к сожалению, невозможно. Поэтому для определения характеристик движения необходимо использовать численные методы.

На рис. 1 представлены линии равных относительных погрешностей $Kn_* = \text{const}$ для различных значений Re_s и φ_0 , а также различных законов сопротивления. Анализ этих рисунков позволяет сделать вывод, что при разумно выбранных параметрах сетки ($Kn_p < 0.1$) использование модели дрейфа частицы при $Re < 1$ дает погрешность, не превышающую 1%.

В переходной области с ростом числа Рейнольдса и начальной скорости частицы относительная погрешность возрастает. При $Re = 800$ с увеличением φ_0 от 2 до 5 Kn_* увеличивается от 1 до 10 %. При $Re > 800$ величина относительной погрешности зависит только от величины φ_0 .

Таким образом, в ходе проведенного исследования определена область изменения параметров, при которых возможно применение модели дрейфа частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дик И.Г., Матвиенко О.В., Неессе Т. Моделирование гидродинамики и сепарации в гидроциклоне // Теоретические основы химической технологии. 2000. Т. 34. № 5. С. 478–488.
2. Матвиенко О.В. Анализ моделей турбулентности и исследование структуры течения в гидроциклоне // ИФЖ. 2004. Т. 77. № 2. С. 58–64.
3. Матвиенко О.В., Дик И.Г. Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 40. № 2. С. 216–221.
4. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 107–118.
5. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Теоретическое исследование процесса очистки загрязненной нефтью почвы в гидроциклонных аппаратах // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 3. С. 72–80.
6. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // ИФЖ. 2011. Т. 84. № 2. С. 243–252.
7. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Исследование влияния режимов течения из гидроциклона на его сепарационные характеристики // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 23–34.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Математическое исследование сепарации несферических изометрических частиц дисперсной фазы в гидроциклоне // XXIII Семинар по струйным, отрывным и нестационарным течениям. Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2012. С. 248–250.
9. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Веник В.Н., Смирнова Н.Г. Численное исследование процесса образования кавитационных пузырьков в смесительном устройстве // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2014. № 4. С. 231–245.
10. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
11. Матвиенко О.В., Ушаков В.М., Евтюшкин Е.В. Математическое моделирование турбулентного переноса дисперсной фазы в турбулентном потоке // Вестник ТГПУ. 2004. Вып. 6 (43). С. 50–53.
12. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 190–192.

13. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В., Базуев В.П. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. № 4. С. 144–156.

Статья поступила 07.07.2015 г.

Matvienko O.V., Evtushkin E. V., Andropova A.O. STUDYING THE APPLICABILITY OF THE ALGEBRAIC SLIP MODEL FOR PREDICTION DISPERSED PHASE MOTION IN THE FLOW

DOI 10.17223/19988621/37/7

Two different approaches (Eulerian and Lagrangian ones) are currently available for the analysis of the behavior of solid particles in flows. In the Lagrangian method, trajectories of the individual size fractions are evaluated by solving time dependent ordinary differential equations. In the Eulerian approach, partial differential equations for the conservation of mass and momentum are written for each of the particles fractions, which are solved together with the equation of the liquid flow. The particles' drift model is based on the algebraic slip velocity approach. In this approach, the relative velocities between particles and liquid are evaluated by consideration of the forces acting on the particles. The analysis of the obtained results allows one to conclude that using the model of particles' drift for and yields an error not exceeding 1%.

Keywords: Mechanics of fluid, particles, dispersed phase, the movable wall, deposition.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doktor of Physics and Mathematics, Tomsk State University)
E-mail: matvolegv@mail.ru

EVTYUSHKIN Eugeny Viktorovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University of Architecture and Building)
E-mail: teormech@tsuab.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University)
E-mail: a.o.andropova@gmail.com

REFERENCES

1. Dik I.G., Matvienko O.V., Neesse Th. Modeling of hydrodynamics and separation in a hydrocyclone. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2000, vol. 34, no. 5, pp. 428–438.
2. Matvienko O.V. Analysis of turbulence models and investigation of the structure of the flow in a hydrocyclone. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2004, vol. 77, no. 2, pp. 316–323.
3. Matvienko O.V., Dik I.G. Numerical study of the separation characteristics of a hydrocyclone under various conditions of loading of the solid phase. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2006, vol. 40, no. 2, pp. 203–208.
4. Matvienko O.V., Agafontseva M.V. Chislennoe issledovanie protsessa degazatsii v gidrotsiklonakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 4(20), pp. 107–118. (in Russian)
5. Matvienko O.V., Evtushkin E.V. Theoretical investigation of the process of cleaning oil-polluted soil in hydrocyclone apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 3, pp. 502–510.
6. Matvienko O.V., Evtushkin E.V. Mathematical study of hydrocyclone dispersed phase separation in clearing viscoplastic drilling fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 241–250.
7. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. Influence of the regime of flow of particles from a hydrocyclone on its separation characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 24–37.

8. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. Matematicheskoe issledovanie separatsii nesfericheskikh izometricheskikh chastits dispersnoy fazy v gidrotsiklone. *XXIII Seminar po struynym, otrvnyym i nestatsionarnym techeniyam*. Tomsk, Natsional'nyy issledovatel'skiy Tomskiy politekhnicheskiy universitet, 2012, pp. 248–250. (in Russian)
9. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Chislennoe issledovanie protsessa obrazovaniya kavitatsionnykh puzyr'kov v smesitel'nom ustroystve. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2014, no. 4, pp. 231–245. (in Russian)
10. Ostrovskiy G.M. *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000. 359 p. (in Russian)
11. Matvienko O.V., Ushakov V.M., Evtyushkin E.V. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo perenosa dispersnoy fazy v turbulentnom potoke. *Vestnik TGPU*, 2004, no. 6 (43), pp. 50–53. (in Russian)
12. Matvienko O.V., Daneyko A.M. Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke. *Izv. vuzov. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 9/3, pp. 190–192. (in Russian)
13. Matvienko O.V., Agafontseva M.V., Bazuev V.P. Issledovanie dinamiki puzyr'ka v zakruchennom potoke nelineyno-vyazkoy zhidkosti. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2012, no. 4, pp. 144–156. (in Russian)

М.А. Пономарева, Е.А. Собко, В.А. Якутенок

**РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА
НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹**

Рассматривается метод численного решения уравнения Лапласа в осесимметричных областях с осесимметричными граничными условиями с использованием цилиндрической системы координат. Описывается переход к гранично-интегральной формулировке задачи. Приводится вывод основных соотношений непрямого метода граничных элементов. Предлагаются способы вычисления всех необходимых интегралов. Достоверность результатов подтверждается решением тестовых примеров.

Ключевые слова: теория потенциала, уравнение Лапласа, осесимметричные задачи, не прямой метод граничных элементов, сингулярные интегралы.

Метод граничных элементов (МГЭ) является эффективным средством решения задач механики сплошных сред, в частности, сводящихся к уравнению Лапласа с различными краевыми условиями. Это особенно актуально для исследования потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью. Во многих случаях эта проблема имеет осесимметричный характер. При этом фундаментальные решения уравнения Лапласа выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода, что значительно усложняет их интегрирование, особенно в сингулярном случае. В [1] для вычисления сингулярных интегралов предлагается использовать специальную квадратурную формулу для интегралов с логарифмическими особенностями. В [2, 3] в целях облегчения вычисления интегралов описывается переход от эллиптических интегралов к функции Лежандра второго рода. В [4] приводится модификация МГЭ с использованием мультипольного разложения основных соотношений.

Альтернативой не прямому методу граничных элементов выступает метод фундаментальных решений. При его использовании сингулярные интегралы не возникают, однако сложность заключается в выборе точек приложения фиктивных нагрузок. Этот метод для решения осесимметричных задач рассматривается в [5, 6].

В настоящей работе вычисление сингулярных интегралов производится с помощью аппроксимации эллиптических интегралов многочленами [7], разложения оставшейся части подынтегральной функции в ряд Тейлора с сохранением слагаемых первого порядка и последующего аналитического интегрирования.

Постановка задачи

Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной осесимметричной поверхностью S с образующей Γ

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

(рис. 1) при следующих краевых условиях:

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (2)$$

$$q(\mathbf{x}) = -\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2, \quad (3)$$

где $S = S_1 \cup S_2$, q – поток, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S , $g(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ – известные распределения потенциала и потока на границах S_1 и S_2 соответственно. Причем функции $g(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ не зависят от угловой координаты θ .

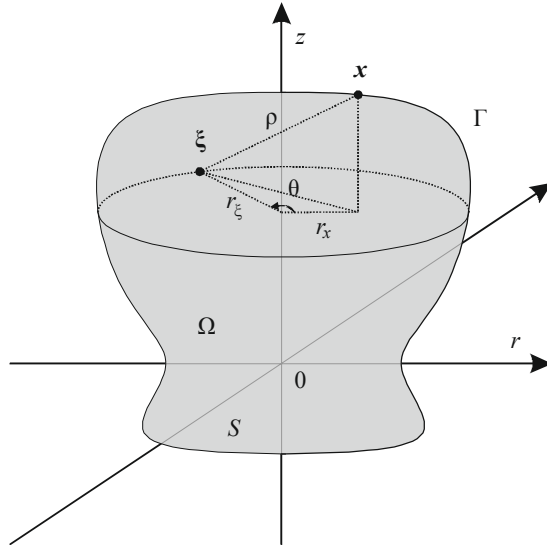


Рис. 1. Область решения и система координат (r, θ, z)

Гранично-интегральная формулировка задачи

Потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{x}$ источником единичной интенсивности, сосредоточенным в точке ξ , может быть найден из уравнения

$$\Delta G(\mathbf{x}, \xi) = -\delta(\mathbf{x} - \xi),$$

где $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ – дельта-функция Дирака. Решением этого уравнения является ньютоновский потенциал

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi\rho}, \quad (4)$$

где ρ – расстояние между точками $\mathbf{x}$ и ξ . Тогда, если считать, что потенциальное поле создается фиктивными источниками, непрерывно расположенными на границе S , то суммарный потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{x}$ всеми фиктивными источниками, можно получить интегрированием выражения (4), предварительно умножив его на плотность распределения фиктивных источников $\varphi(\xi)$:

$$u(\mathbf{x}) = \int_S \varphi(\xi) G(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi, \quad (5)$$

где обозначение dS_ξ означает, что при интегрировании именно точка ξ «пробега-ет» поверхность S . В дальнейшем индекс ξ в подобных случаях будет опущен, однако подразумеваться будет то же самое.

С учетом того, что $dS_\xi = r_\xi d\theta d\Gamma$, выражение (5) преобразуется к виду

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) G(\mathbf{x}, \xi) r_\xi d\theta d\Gamma,$$

где Γ – образующая поверхности S , расположенная для простоты в плоскости rOz , при этом $\theta_x = 0$. Так как задача осесимметрична, то r_ξ и $\varphi(\xi)$ не зависят от угла θ и могут быть вынесены за знак соответствующего интеграла:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left(\int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}, \xi) d\theta \right) r_\xi \varphi(\xi) d\Gamma.$$

Введя обозначение

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) = \int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}, \xi) d\theta,$$

выражение (5) окончательно можно записать в форме

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) r_\xi \varphi(\xi) d\Gamma.$$

Как видно из рис. 1:

$$\rho = \sqrt{(z_x - z_\xi)^2 + r_x^2 + r_\xi^2 - 2r_x r_\xi \cos \theta},$$

где r_x , z_x , r_ξ , z_ξ – радиальные и аксиальные координаты точек $\mathbf{x}$ и ξ соответственно. Тогда

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(z_x - z_\xi)^2 + r_x^2 + r_\xi^2 - 2r_x r_\xi \cos \theta}}. \quad (6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= (z_x - z_\xi)^2 + r_x^2 + r_\xi^2, \\ b &= 2r_x r_\xi, \\ m &= \frac{2b}{a+b}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда формула (6) принимает вид

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a - b \cos \theta}} = \frac{K(m)}{\pi \sqrt{a+b}}, \quad (8)$$

где $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Для рассматриваемого осесимметричного случая поток в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ в направлении внешней нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, обусловленный наличием единичного сосре-

доточенного источника в точке ξ , определяется выражением

$$F(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{\partial G}{\partial n} = -\left(\frac{\partial G}{\partial r_x} n_r + \frac{\partial G}{\partial z_x} n_z \right),$$

где n_r и n_z – компоненты внешней нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Совершенно аналогично предыдущему:

$$q(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \tilde{F}(\mathbf{x}, \xi) r_{\xi} \varphi(\xi) d\Gamma,$$

где

$$\tilde{F}(\mathbf{x}, \xi) = \int_0^{2\pi} F(\mathbf{x}, \xi) d\theta.$$

Нетрудно получить, что

$$\tilde{F}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} \left[-\frac{1}{2r_x} \left(\frac{r_{\xi}^2 - r_x^2 + (z_x - z_{\xi})^2}{a-b} E(m) - K(m) \right) n_r + \frac{z_x - z_{\xi}}{a-b} E(m) n_z \right], \quad (9)$$

где $E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Таким образом, гранично-интегральная формулировка задачи с учетом условий (2) и (3) представляется в виде системы уравнений

$$g(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) r_{\xi} \varphi(\xi) d\Gamma, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (10)$$

$$h(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \tilde{F}(\mathbf{x}, \xi) r_{\xi} \varphi(\xi) d\Gamma, \quad \mathbf{x} \in S_2, \quad (11)$$

где $\tilde{G}(\mathbf{x}, \xi)$ и $\tilde{F}(\mathbf{x}, \xi)$ определяются выражениями (8) и (9), $\varphi(\xi)$ – искомая плотность распределения фиктивных источников. После нахождения функции $\varphi(\xi)$ становится возможным вычисление потенциала и потока в произвольном направлении в любой точке области Ω .

Дискретизация границы и метод решения

Для решения интегральных уравнений (10), (11) образующая Γ разбивается на N граничных элементов. Используются «постоянные» граничные элементы, т. е. элементы считаются отрезками прямых, а величина φ внутри каждого элемента считается постоянной (рис. 2). Тогда интегралы (10) и (11) преобразуются в конечные суммы:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{\Gamma_i} \tilde{G}(\mathbf{x}, \xi) r_{\xi} d\Gamma; \quad (12)$$

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{\Gamma_i} \tilde{F}(\mathbf{x}, \xi) r_{\xi} d\Gamma, \quad (13)$$

где Γ_i – i -й граничный элемент, φ_i – значение функции $\varphi(\xi)$ на i -м граничном элементе.

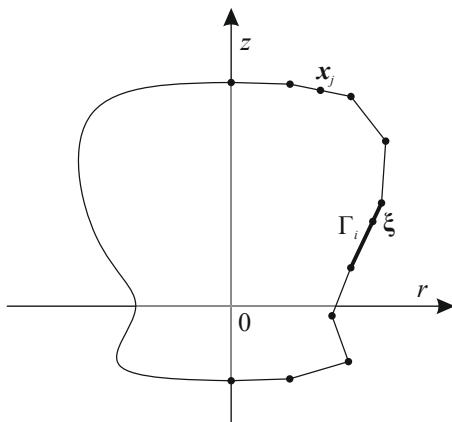


Рис. 2. Дискретизация границы

Теперь, последовательно располагая точки наблюдения x в узлах (т. е. серединах) граничных элементов и записывая для этих точек одно из уравнений (12) или (13) (в зависимости от принадлежности точки к S_1 или S_2), можно получить систему из N линейных алгебраических уравнений вида

$$g_j = \sum_{i=1}^N \hat{G}_{ij} \varphi_i ; \quad (14)$$

$$h_j = \sum_{i=1}^N \hat{F}_{ij} \varphi_i \quad (15)$$

относительно N неизвестных φ_i , где g_j и h_j – известные значения потенциала или потока в узле j -го граничного элемента,

$$\hat{G}_{ij} = \int_{\Gamma_i} \tilde{G}(x_j, \xi) r_\xi d\Gamma, \quad \hat{F}_{ij} = \int_{\Gamma_i} \tilde{F}(x_j, \xi) r_\xi d\Gamma,$$

x_j – узел j -го граничного элемента (рис. 2), а $\tilde{G}(x, \xi)$ и $\tilde{F}(x, \xi)$ определяются выражениями (8) и (9). Значения φ_i находятся из системы (14), (15). После этого потенциал и поток в любой точке $x \in \Omega$ могут быть найдены по формулам

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{\Gamma_i} \tilde{G}(x, \xi) r_\xi d\Gamma, \quad q(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{\Gamma_i} \tilde{F}(x, \xi) r_\xi d\Gamma.$$

Вычисление интегралов $\hat{G}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$

Из выражений (8) и (9) видно, что в интегралах $\hat{G}_{ij}$ и $\hat{F}_{ij}$ подынтегральные функции содержат эллиптические интегралы первого и второго рода, поэтому их аналитическое интегрирование не представляется возможным. В связи с этим их значения определяются численным интегрированием с помощью квадратурной формулы Гаусса. В отдельном рассмотрении нуждается случай, когда точка наблюдения x расположена на элементе, по которому происходит интегрирование.

Эти интегралы являются сингулярными, поскольку фундаментальные решения имеют особенности в точке, где расположен источник.

Для вычисления интеграла $\hat{G}_{ii}$ используется координата η (рис. 3). Начало оси η располагается в узле элемента. Тогда от интегрирования по Γ можно перейти к интегрированию по η в пределах от $-L_i$ до L_i , где L_i – половина длины i -го элемента.

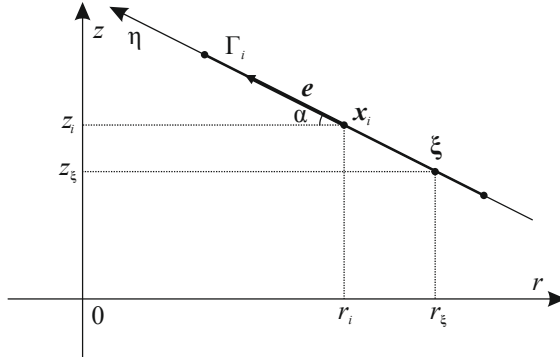


Рис. 3. Локальная координатная ось η

Из рисунка видно, что

$$r_i - r_\xi = \eta \cos \alpha = -\eta e_r; \quad (16)$$

$$z_\xi - z_i = \eta \sin \alpha = \eta e_z, \quad (17)$$

где r_i , z_i – координаты точки x_i (узла i -го элемента), η – координата точки ξ , e_r , e_z – компоненты орта e . Выражения a , b и m , определяемые формулами (7), при $x = x_i$ с учетом (16) и (17) приобретают вид

$$\begin{aligned} a &= 2r_i^2 + 2\eta r_i e_r + \eta^2, \\ b &= 2r_i^2 + 2\eta r_i e_r, \\ m &= \frac{2b}{a+b} = \frac{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r}{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r + \eta^2} \end{aligned} \quad (18)$$

и являются функциями переменной η .

При подстановке (18) в (8) с учетом (16) интеграл $\hat{G}_{ii}$ записывается как

$$\hat{G}_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_{-L_i}^{L_i} \frac{K\left(\frac{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r}{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r + \eta^2}\right) \cdot (\eta e_r + r_i) d\eta}{\sqrt{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r + \eta^2}}.$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, является произведением двух функций:

$$\hat{G}_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_{-L_i}^{L_i} \bar{K}(\eta) A(\eta) d\eta, \quad (19)$$

где

$$\bar{K}(\eta) = K\left(\frac{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r}{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r + \eta^2}\right); \quad (20)$$

$$A(\eta) = \frac{\eta e_r + r_i}{\sqrt{4r_i^2 + 4\eta r_i e_r + \eta^2}}. \quad (21)$$

Эллиптический интеграл (20) можно аппроксимировать многочленом [7]:

$$\bar{K}(\eta) \approx \frac{e_r}{2r_i} \eta - \ln \frac{\eta}{8r_i}, \quad (22)$$

а функция $A(\eta)$ после разложения в ряд Тейлора с учетом слагаемых порядка не выше η имеет вид

$$A(\eta) \approx \frac{1}{2} + \frac{e_r}{4r_i} \eta. \quad (23)$$

Тогда из (19) находится приближенное значение $\hat{G}_{ii}$:

$$\hat{G}_{ii} \approx \frac{1}{\pi} \int_{-L_i}^{L_i} \left(\frac{e_r}{2r_i} \eta - \ln \frac{\eta}{8r_i} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{e_r}{4r_i} \eta \right) d\eta = \frac{L_i}{\pi} \left(1 + \frac{e_r^2 L_i^2}{12r_i^2} - \ln \frac{L_i}{8r_i} \right). \quad (24)$$

Интеграл $\hat{F}_{ii}$ имеет значение 0.5 в соответствии с теоремой о разрыве производной потенциала простого слоя [8].

Решение тестовых примеров

Для подтверждения работоспособности метода приводятся результаты численного решения трех тестовых примеров, имеющих аналитические решения. Погрешности оцениваются с использованием метрики пространства L_2 , т. е. по

формулам $E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i^{(ч)} - u_i^{(А)})^2}$ и $E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_i^{(ч)} - q_i^{(А)})^2}$, где $u_i^{(ч)}$ и $q_i^{(ч)}$ –

численно полученные значения потенциала или потока в i -й точке, $u_i^{(А)}$ и $q_i^{(А)}$ – их точные значения, n – число рассматриваемых точек. При вычислении интегралов $\hat{G}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$ в несингулярном случае применяются квадратурные формулы Гаусса

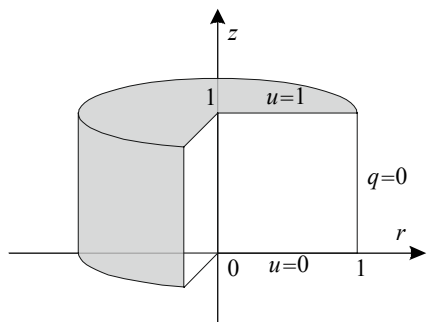


Рис. 4. Постановка задачи для примера 1

с четырьмя и восемью точками. Полученные результаты представлены на графиках черными и серыми линиями соответственно. Это сделано для определения оптимального количества точек интегрирования.

Пример 1. Рассматривается круговой цилиндр единичной длины и единичного радиуса. На основаниях определены потенциалы 0 и 1. На боковой поверхности задан нулевой поток (рис. 4). Точное решение для потенциала: $u = z$. Численный расчет проведен на трех прямых: $r = 0$

(ось цилиндра), $r = 0.5$ (потенциал вычисляется в 101 точке: $z_i = 0.01 \cdot [i - 1]$, $1 \leq i \leq 101$) и $r = 1$ (боковая поверхность, вычисление потенциала в узлах элементов). На рис. 5 приведены графики зависимости погрешности для потенциала от числа граничных элементов. Причем N означает число элементов на каждом из трех участков границы, т.е. общее число элементов – $3N$. Видно, что на границе решение сходится медленнее, чем внутри области решения. Это может быть объяснено тем, что при вычислении потенциала в узлах необходимо вычислять сингулярные интегралы, которые, по-видимому, определяются с меньшей точностью, чем несингулярные. Вообще говоря, эти интегралы имеют слабые особенности порядка логарифмической и поэтому могут быть посчитаны непосредственно по квадратурной формуле Гаусса. Рис. 6 показывает незначительные отличия в результатах при вычислении этими двумя способами, что подтверждает правильность формулы (24). Также проведен расчет потока на прямой $z = 1$ (верхнее

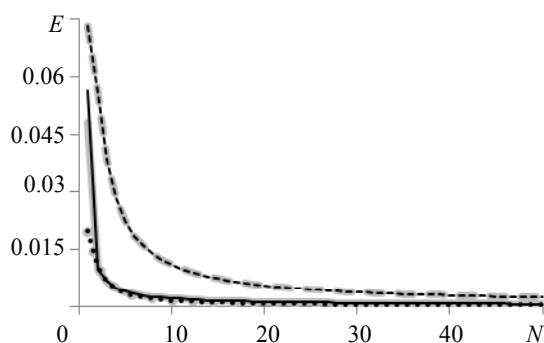


Рис. 5. Зависимости погрешности E для потенциала от числа элементов N для примера 1: точки – $r = 0$, сплошные линии – $r = 0.5$, пунктирные линии – $r = 1$. Черный цвет – формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет – формулы Гаусса с восемью точками

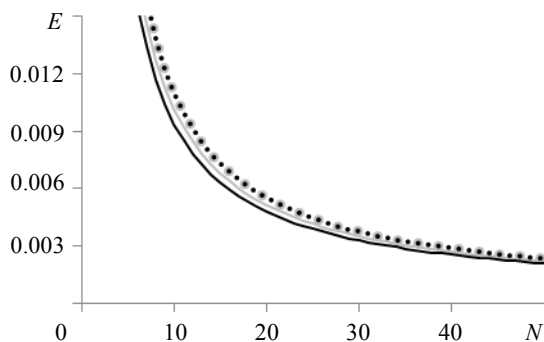


Рис. 6. Зависимости погрешности E для потенциала от числа элементов N для примера 1: точки – при использовании формулы (24), сплошные линии – при использовании формулы Гаусса. Черный цвет – формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет – формулы Гаусса с восемью точками

основание цилиндра, вычисление потока в узлах элементов). Значение потока для внутренних узлов (т. е. всех узлов, кроме ближайшего к оси и ближайшего к боковой поверхности) сходится к аналитическому решению, однако значение в приосевом узле отдалается от аналитического (рис. 7). В крайнем правом узле погрешность еще в 10–15 раз больше, чем в приосевом (погрешность в узле рассчитана по формуле $E = |q^{(Ч)} - q^{(А)}|$). Такое поведение решения для потока обусловлено наличием особенности в угловой точке.

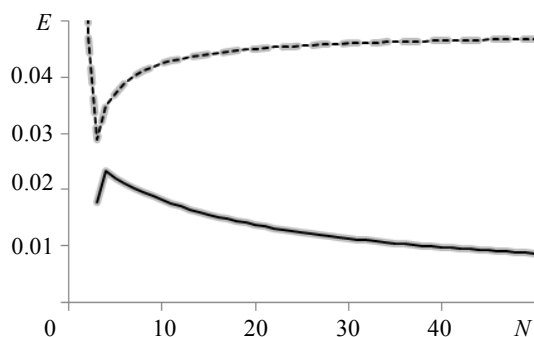


Рис. 7. Зависимости погрешности E для потока от числа элементов N для примера 1: сплошные линии — во внутренних узлах, пунктирные линии — в приосевом узле. Черный цвет — формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет — формулы Гаусса с восемью точками

Пример 2. Рассматривается область между двумя концентрическими сферами. На внутренней, единичного радиуса, задан потенциал 0; на внешней, с радиусом 2, потенциал равен 1 (рис. 8). Точное решение для потенциала

$$u = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right).$$

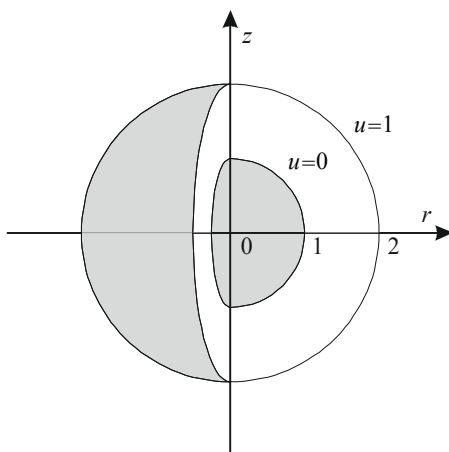


Рис. 8. Постановка задачи для примера 2

Численный расчет проведен на двух прямых: $r = 0$ (вычисление потенциала в 101 точке: $z_i = 1 + 0.01 \cdot [i - 1]$, $1 \leq i \leq 101$ – рис. 9) и $z = 0$ (вычисление потенциала в 101 точке: $r_i = 1 + 0.01 \cdot [i - 1]$, $1 \leq i \leq 101$ – рис. 10). На рисунках приведены графики зависимости погрешности для потенциала от числа граничных элементов. Обозначено: N – число элементов на каждой из двух полуокружностей, следовательно, общее число элементов – $2N$. Видно, что решения быстро сходятся к аналитическому, как при использовании формулы Гаусса для вычисления сингулярных интегралов, так и при использовании формулы (24). Полученный результат также подтверждает достоверность формулы (24).

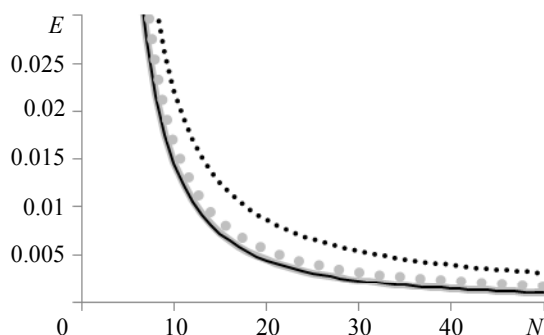


Рис. 9. Зависимости погрешности E для потенциала от числа элементов N для примера 2 (на прямой $r = 0$): сплошные линии – при использовании формулы (24), точки – при использовании формулы Гаусса. Черный цвет – формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет – формулы Гаусса с восемью точками

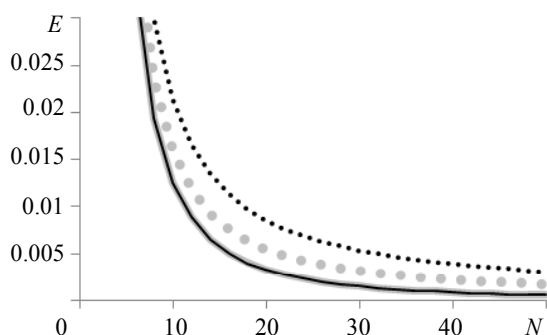


Рис. 10. Зависимости погрешности E для потенциала от числа элементов N для примера 2 (на прямой $z = 0$): сплошные линии – при использовании формулы (24), точки – при использовании формулы Гаусса. Черный цвет – формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет – формулы Гаусса с восемью точками

Пример 3. Рассматривается область внутри сферы единичного радиуса. На нижней полусфере задан потенциал 0; на верхней – потенциал равен 1 (рис. 11). Точное решение для потенциала

$$u = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} [P_{k+1}(0) - P_{k-1}(0)] \cdot (r^2 + z^2)^{\frac{k}{2}} \cdot P_k \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \right],$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра порядка k . Численный расчет проведен на прямой $r = 0$ (вычисление потенциала в 101 точке: $z_i = -1 + 0.02 \cdot [i - 1]$, $1 \leq i \leq 101$).

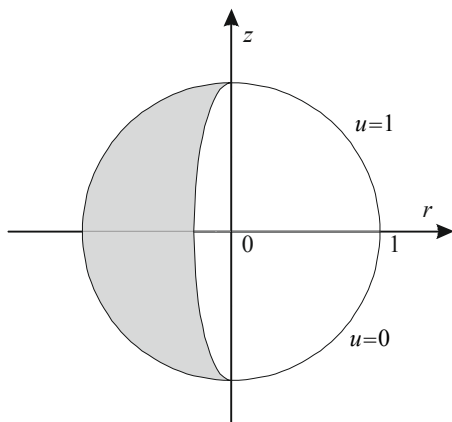


Рис. 11. Постановка задачи для примера 3

На рис. 12 приведены графики зависимости погрешности для потенциала от числа граничных элементов (сумма ряда для получения точного решения рассчитана с точностью 10^{-6}). Обозначено: N – число элементов на каждой из двух

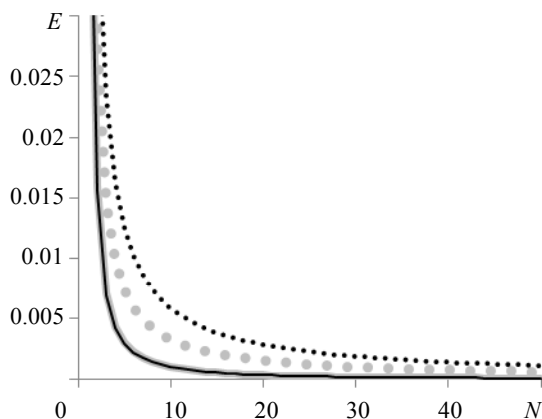


Рис. 12. Зависимости погрешности E для потенциала от числа элементов N для примера 3: сплошные линии – при использовании формулы (24), точки – при использовании формулы Гаусса. Черный цвет – формулы Гаусса с четырьмя точками, серый цвет – формулы Гаусса с восемью точками

частей границы, следовательно, общее число элементов – $2N$. Видно, что решения быстро сходятся к аналитическому. Это также подтверждает достоверность формулы (24).

Заключение

Выведены основные соотношения непрямого метода граничных элементов для осесимметричных задач теории потенциала. Представлены методы вычисления всех необходимых интегралов. Приведены результаты решения тестовых задач для подтверждения достоверности описанных соотношений и методов.

Результаты тестов показывают, что изложенный метод пригоден для нахождения потенциала в любых точках области, а также нахождения потока в точках, не лежащих вблизи оси симметрии или углов области решения. Также видно, что во всех рассмотренных случаях решения, полученные с использованием восьмиточечной формулы Гаусса, практически совпадают с решениями, полученными при помощи четырехточечной, т. е. использование дополнительных точек не влечет уточнения решения, поэтому достаточной является формула, использующая четыре точки интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: пер. с англ. М.: Мир, 1984.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: пер. с англ. М.: Мир, 1987.
3. Rui Z., Jin H., Tao L. Mechanical quadrature methods and their splitting extrapolations for solving boundary integral equations of axisymmetric Laplace mixed boundary value problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006. No. 30. P. 391–398.
4. Singh J., Glière A., Achard J. A multipole expansion-based boundary element method for axisymmetric potential problem // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2009. No. 33. P. 654–660.
5. Smyrilis Y.-S., Karageorghis A. A matrix decomposition MFS algorithm for axisymmetric potential problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2004. No. 28. P. 463–474.
6. Reutskiy S. The method of approximate fundamental solutions for axisymmetric problems with Laplace operator // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2007. No. 31. P. 410–415.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. М.: Наука, 1979.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 16.09.2015 г.

Ponomareva M. A., Sobko E. A., Yakutenok V. A. SOLVING AXISYMMETRIC POTENTIAL PROBLEMS USING THE INDIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD

DOI 10.17223/19988621/37/8

The paper contains all necessary relations to implement the indirect boundary element method in order to solve axisymmetric potential problems. It includes fundamental solutions of Laplace's equation for the potential and flux in the axisymmetric case. These solutions contain complete elliptic integrals of the first and second kinds. Based on this, boundary integral equations were written corresponding to the boundary value problem. The equations were quantized by means of constant elements. The approximate formula for the integral of the fundamental solution for the potential along the element with singularity was obtained using truncated Taylor series and complete elliptic integral of the first kind approximation by a polynomial. In a similar case for the

flux, a value of 0.5 was used according to the theorem about the discontinuity in the derivative of the simple layer potential. Approximate convergence of the method was explored based on three test examples. Attained results demonstrate a good convergence of the method, except for the flux computation in a close proximity to the axis of symmetry and corner points, which have nonremovable singularities. It was also shown that using the Gauss quadrature formula with four points is sufficient to estimate the nonsingular integral along the elements with a sufficient level of accuracy.

Keywords: potential theory, Laplace's equation, axisymmetric problems, indirect boundary element method, singular integrals.

PONOMAREVA Maria Andreevna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: pma@ftf.tsu.ru

SOBKOV Evgeniy Alekseevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sobkozheka@gmail.com

YAKUTENOK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: yva@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London, McGraw-Hill Company, 1981.
2. Brebbia C.A., Telles J. C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
3. Rui Z., Jin H., Tao L. Mechanical quadrature methods and their splitting extrapolations for solving boundary integral equations of axisymmetric Laplace mixed boundary value problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, no. 30, pp. 391–398.
4. Singh J., Glière A., Achard J. A multipole expansion-based boundary element method for axisymmetric potential problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009, no. 33, pp. 654–660.
5. Smyrilis Y.-S., Karageorghis A. A matrix decomposition MFS algorithm for axisymmetric potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, no. 28, pp. 463–474.
6. Reutskiy S. The method of approximate fundamental solutions for axisymmetric problems with Laplace operator. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, no. 31, pp. 410–415.
7. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. New York, Dover, 1974.
8. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moscow, Nauka Publ., 1977. (in Russian)

Н.А. Чинчикеева, А.В. Шваб

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ¹

Представлены результаты математического моделирования движения плотного слоя и нестационарного переноса тепла в аппаратах порошковой технологии. Рассмотрены физические особенности течения высококонтрированной гранулированной среды. Показано, что использование условий частичного скольжения среды на стенке и применение уравнений Навье – Стокса позволяет адекватно опытным данным описывать гидродинамику и теплообмен плотного слоя гранулированной среды.

Ключевые слова: нестационарное течение, гранулированная среда, скольжение, трение, теплообмен, амплитуда, период.

Физическая и математическая постановка задачи

В настоящее время широко применяются пневматические циркуляционные аппараты для перемешивания, сушки, дозирования и транспортирования зернистых материалов при высокой концентрации компонентов смеси. Поэтому актуальной задачей является разработка математических моделей, описывающих гидродинамику и тепломассообмен высококонтрированных гранулированных материалов.

В работе рассматривается течение плотного слоя в плоском канале шириной H , в котором на внутренней поверхности расположены ребра для интенсификации процесса переноса тепла и массы (рис. 1, а).

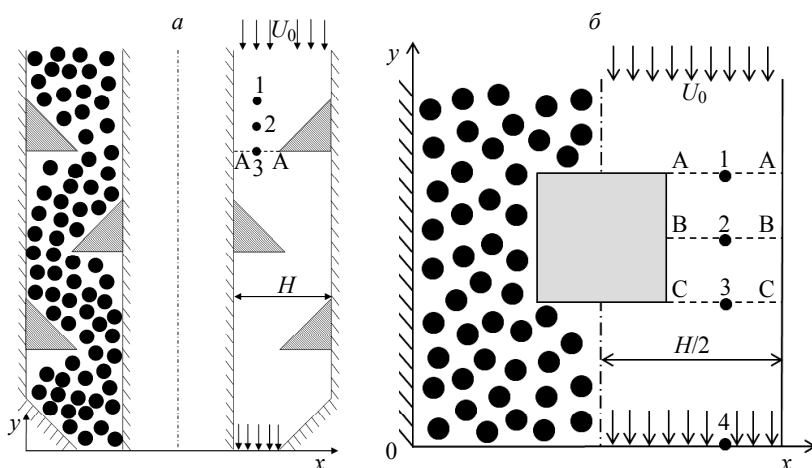


Рис. 1. Геометрия исследуемой области

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-00372-А.

Гранулированная среда, имеющая температуру T_0 , поступает сверху в плоский канал с постоянной скоростью U_0 и затем нагревается за счет обтекания горячих препятствий, расположенных в камере смешения, причем боковые наклонные стенки имеют периодически изменяемую температуру по гармоническому закону $T_w - T_0 = T_1 - T_0 + A(T_1 - T_0)\sin(2\pi t/t_0)$. Здесь t_0 – период колебаний температуры стенки, t – текущее время и $A = \text{const}$. Внешние стенки канала и горизонтальные стенки обтекаемого тела считаются теплоизолированными.

Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показывают, что для описания динамики гранулированной среды можно использовать законы механики сплошной среды. В частности, для описания хорошо сыпучей высококонцентрированной среды в первом приближении можно использовать динамику вязкой несжимаемой жидкости при условии правильной постановки граничных условий на твердой стенке. В качестве граничного условия для движущегося потока воспользуемся условием частичного скольжения среды по стенке, которое можно записать в виде

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_w = \beta U_w; U_n = 0, \quad (1)$$

где U_w , U_n – тангенциальная и нормальная составляющие вектора скорости по направлению к стенке; n – нормаль; β – коэффициент скольжения среды на стенке, который изменяется от нуля (условие полного скольжения) до бесконечности (условие прилипания).

Для описания движения хорошо сыпучей гранулированной среды воспользуемся вязкими уравнениями Навье – Стокса, безразмерная форма которых получена с использованием масштаба скорости U_0 , ширины канала H , плотности среды ρ и перепада температур $(T_1 - T_0)$. В результате система уравнений в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x^2}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Theta}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Здесь $\text{Pr} = \nu/\alpha$ и $\text{Re} = U_0 H/\nu$ – критерии Прандтля и Рейнольдса, которые характеризуются как некоторые эффективные критерии, значения которых определяются из сопоставления с опытными данными [3].

Вводя вихрь и функцию тока по зависимостям

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

систему уравнений (2) – (4) можно представить в эквивалентной форме в переменных вихрь – функция тока:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Omega; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Omega}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

Численное решение полученной системы уравнений проводится при следующих граничных условиях. Для получения единственного решения воспользуемся граничными условиями, представленными в безразмерной форме. На входе в канал из условия $u_y = -1$, для функции тока получаем $\Psi = x$, $\Omega = 0$ и $\Theta = 0$. На выходе из рассматриваемой области для искомых функций используются условия Неймана ($\partial/\partial y = 0$). На левой стенке канала $\Psi = 0$ и на правой стенке канала $\Psi = \text{const}$. Значения вихря на стенках в соответствии с уравнением (6) определяется путем разложения функции тока в ряд Тейлора вблизи стенки с учетом условия скольжения (1). В результате получим

$$\Omega_\omega = \frac{2(\Psi_{\omega+1} - \Psi_\omega)}{\Delta n^2} \left(\frac{\beta}{\beta + 2/\Delta n} \right).$$

При условии прилипания среды на стенке ($\beta \rightarrow \infty$) имеем условие Тома, а при условии полного скольжения среды на стенке – $\Omega_\omega = 0$.

На стенках смесительной камеры используется условие частичного скольжения среды, а на нижних горизонтальных стенках – условие полного скольжения. На всех стенках для температуры используется условие отсутствие теплового потока $\partial\Theta/\partial n = 0$, за исключением наклонных стенок обтекаемого тела, на которых ставятся условия периодического изменения температуры, которое в безразмерной форме имеет вид $\Theta = 1 + A \sin(2\pi\tau/\text{Ho})$, где $\text{Ho} = t_0 U_0 / H$ – критерий гомотронности и $\tau = t U_0 / H$ – безразмерное время, причем критерий гомотронности можно выразить через критерий Фурье: $\text{Ho} = \text{Fo} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}$. Здесь критерий Фурье имеет вид $\text{Fo} = t_0 \alpha / H^2$, где α – коэффициент температуропроводности.

Для достоверности проводимого исследования дополнительно решалась задача о движении плотного слоя в плоском канале при обтекании препятствия виде квадрата (рис. 1, б). Уравнения имели аналогичный вид (6), (7), а в качестве граничных условий использовались условия частичного скольжения [4].

Метод решения обоих задач проводился с помощью эволюционного метода установления по времени и неявного обобщенного метода переменных направлений [5].

Результаты расчетов

Сравнение полученного решения при движении плотного слоя с опытными данными [3] для геометрии рис. 1, б представлено на рис. 2, где изображено распределение вертикальной скорости в зависимости от координаты x в сечениях, показанных пунктиром (А–А, В–В, С–С) на рис. 1, б при $\text{Re} = 0.25$ и $\beta = 0.5$.

На рис. 3 представлено распределение изолиний функции тока для установившегося режима течения гранулированной среды в смесительной камере (рис. 1, а). На рис. 4 показано распределение изотермических линий при периодическом изменении температуры на наклонных стенках в различные моменты времени: $\tau = 0.630$ (а), $\tau = 0.756$ (б), $\tau = 1.01$ (в).

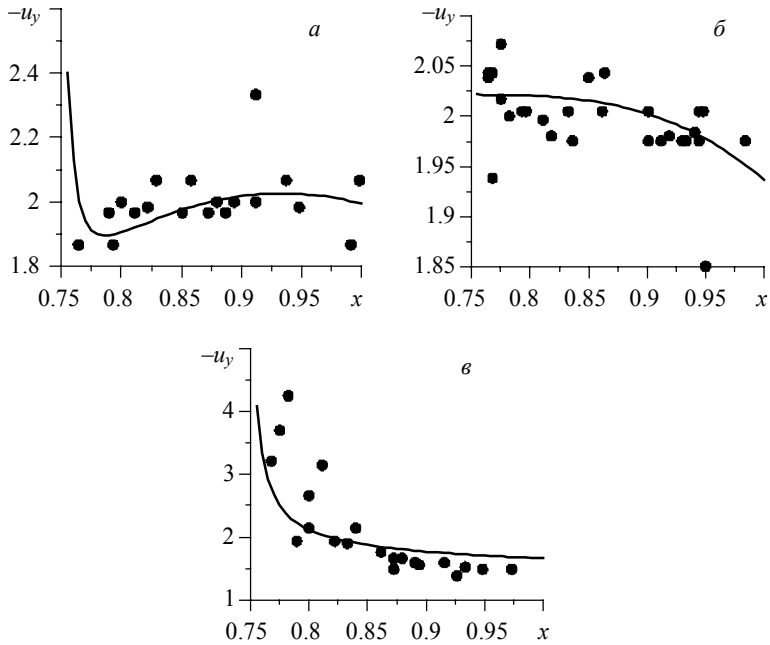


Рис. 2. Сравнение полученного решения с опытными данными [3]

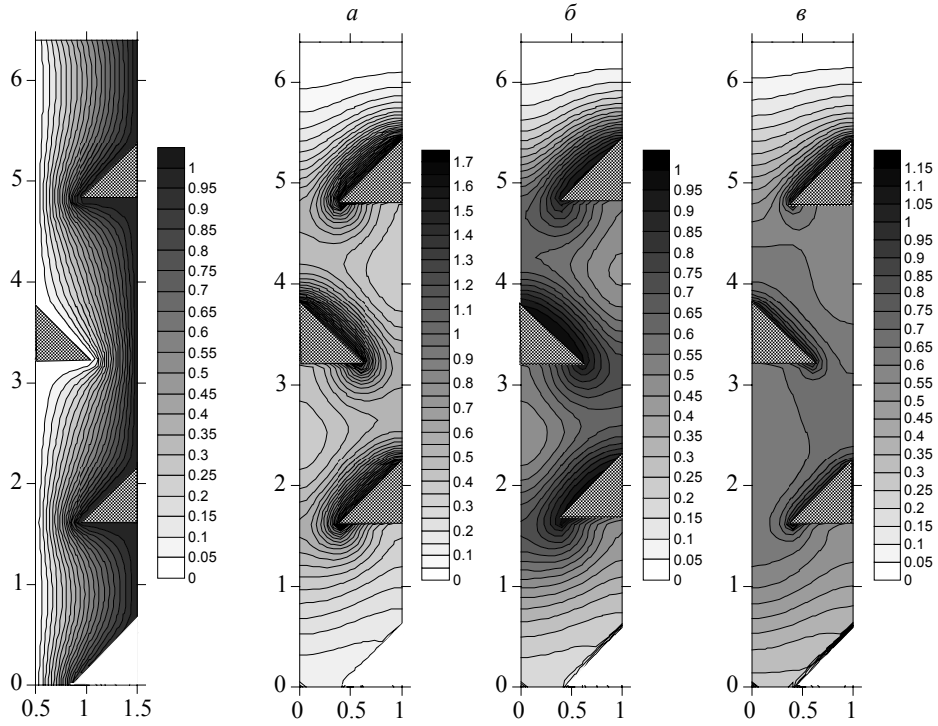


Рис. 3. Распределение линий тока

Рис. 4. Распределение изотерм в различные моменты времени

Изменение температуры по времени в различных точках смесительной камеры (1–3, рис. 1, *a*) показано на рис. 5 при следующих параметрах: $A = 0.5$, $Pr = 10$, $Re = 0.25$, $\beta = 0.5$. Из этого графика видно, что вниз по потоку происходит более интенсивный нагрев зернистого слоя и увеличивается амплитуда колебаний температуры. Влияние интенсивности изменения температуры в зависимости от координаты x в сечении А–А (рис. 1, *a*) в различные моменты времени показано на рис. 6. Кривая 1 – $\tau = 2.52$, кривая 2 – $\tau = 2.58$, кривая 3 – $\tau = 2.65$.

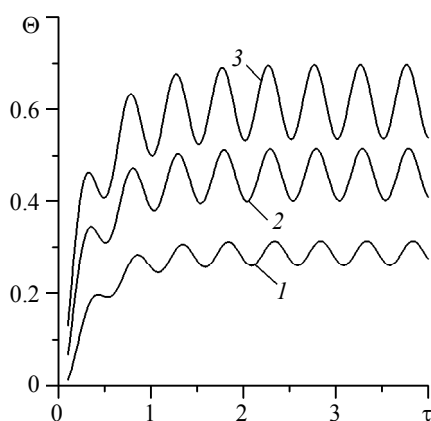


Рис. 5. Распределение температуры в зависимости от времени в трех точках пространства (рис. 1, *a*)

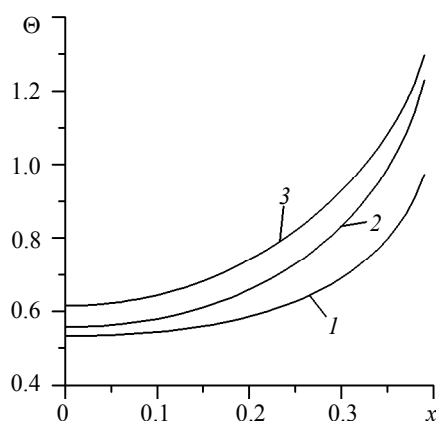


Рис. 6. Распределение температуры в поперечном сечении А–А в различные моменты времени

Заключение

Представленное теоретическое исследование гидродинамики и теплообмена плотного слоя в смесительной камере может быть использовано для анализов процессов смешения, сушки и других технологических процессов в аппаратах порошковой технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Механика* гранулированных сред: Теория быстрых движений: сб. статей: пер. с англ. / сост. И.В. Ширко. М.: Мир, 1985. 280 с.
2. Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н. Моделирование гидродинамики и процесса усреднения гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // ИФЖ. 2011. Т. 84. № 4. С. 676–681.
3. Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970.
4. Чинчикеева Н.А., Шваб А.В. Моделирование нестационарного переноса тепла в потоке высококонцентрированной гранулированной // Наука. Технологии. Инновации. Новосибирск: НГТУ, 2013. С. 172–175.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.

Статья поступила 01.07.2015 г.

Chinchikeeva N.A., Shvab A.V. MODELING OF UNSTEADY HEAT TRANSFER AT MOTION HIGHLY CONCENTRATED GRANULAR MEDIUM

DOI 10.17223/19988621/37/9

The paper presents the results of mathematical modeling of dense layer motion and unsteady heat transfer apparatus of powder technology. The physical features of the flow of a highly concentrated granular medium are analyzed. It is shown that the application of the Navier–Stokes equations and the use of partial slip conditions of the medium on the wall adequately describe the hydrodynamics and heat transfer of granular medium. This was verified by comparing numerical results with experimental data.

Keywords: unsteady flow, granular medium, sliding, friction, heat transfer, amplitude, period.

CHINCHIKEEVA Natalia Aleksandrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

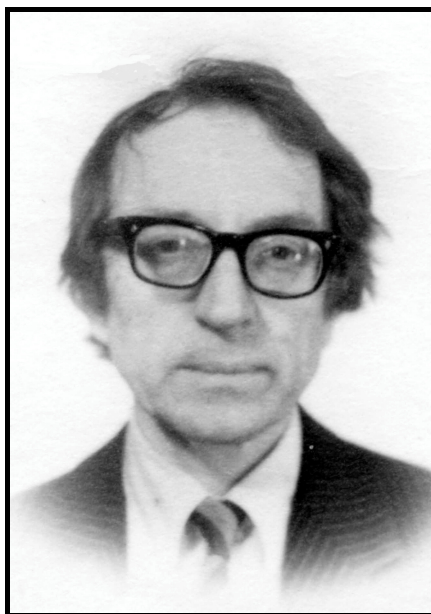
E-mail: chinchikeeva@gmail.com

SHVAB Alexander Veniaminovich (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: avshvab@inbox.ru

REFERENCES

1. *Mekhanika granulirovannykh sred: Teoriya bystrykh dvizheniy*: sb. statey / sost. I.V. Shirko. Moscow, Mir, 1985. 280 p. (in Russian)
2. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. Modelirovanie gidrodinamiki i protsessa usredneniya granulirovannoy sredy v apparatakh poroshkovoy tekhnologii. *IFZh*, 2011, vol. 84, no. 4, pp. 676–681. (in Russian)
3. Gorbis Z.R. *Teploobmen i gidromekhanika dispersnykh skvoznykh potokov*. Moscow, Energiya Publ., 1970. (in Russian)
4. Chinchikeeva N.A., Shvab A.V. Modelirovanie nestatsionarnogo perenosa tepla v potoke vysokokontsentririrovannoy granulirovannoy. *Nauka. Tekhnologii. Innovatsii*. Novosibirsk, NGTU Publ., 2013, pp. 172–175. (in Russian)
5. Patankar C. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. (in Russian)

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**ЖИЗНЬ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ
ПРОФЕССОРА Г.Г. ПЕСТОВА**

18 августа 2015 года ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Герман Гаврилович Пестов. Ему шёл восемьдесят третий год.

Герман Гаврилович – яркий представитель томской математической школы, видный ученый, высококвалифицированный преподаватель высшей школы

Герман Гаврилович окончил в 1955 г. механико-математический факультет Томского госуниверситета. В ноябре 1955 г. поступил в аспирантуру ТГУ (руководитель профессор П.П. Куфарев). По окончании аспирантуры работал в Томском политехническом институте ассистентом кафедры высшей математики, затем старшим преподавателем, доцентом, и.о. зав. кафедрой инженерной и вычислительной математики. Кандидатскую диссертацию «Исследование по теории n -мерной функции порядка» защитил в июне 1966 г.

С февраля 1968 г. вся дальнейшая деятельность Г.Г. Пестова связана с кафедрой математического анализа ТГУ, на которую он был зачислен на должность доцента. С сентября 1969 г. по 1982 г. заведовал кафедрой математического анализа с небольшим перерывом. Докторскую диссертацию «К теории упорядоченных

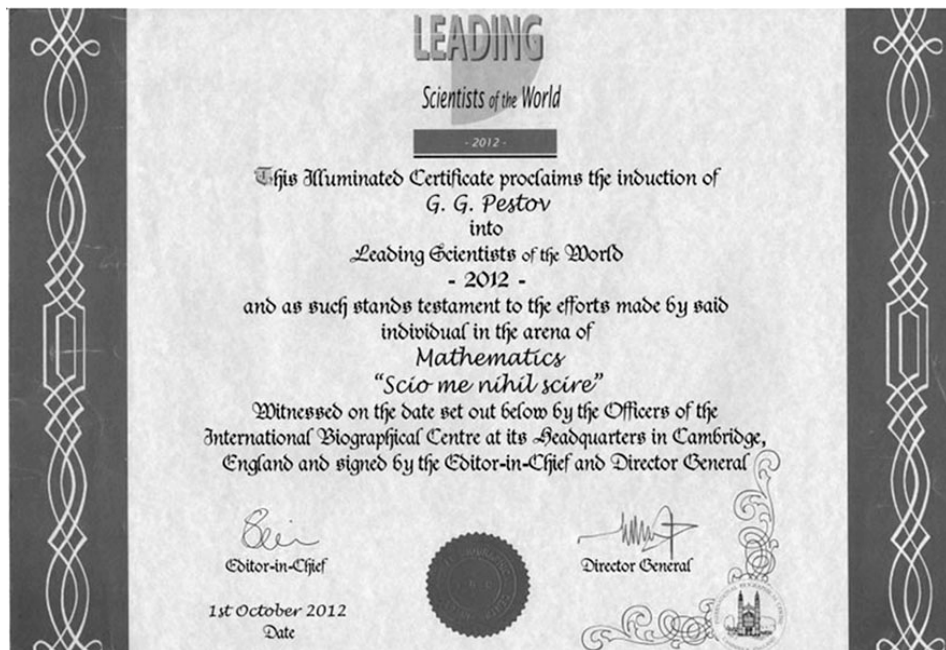
полей и групп» защитил в Институте математики и механики Уральского отделения Российской академии наук в ноябре 2004 года. С октября 2005 года профессор кафедры математического анализа ТГУ. В ноябре 2008 года утвержден в ученом звании профессора по кафедре математического анализа.

Его первая работа «О наибольшем круге, вложенном в замкнутую кривую» была опубликована в Докладах Академии наук СССР в 1959 году.

В 1970-х – 1990-х годах на механико-математическом факультете под руководством Германа Гавриловича работал коллектив, занимавшийся вопросами теории надежности и оптимального резервирования. Введя новые понятия, удалось получить важные свойства множества стратегий и существенно упростить алгоритм вычисления стратегии резервирования. Результаты этих исследований, опубликованные в Известиях АН СССР (1971) и других изданиях, получили значительную известность. Продолжение эта работа нашла в кандидатской диссертации В.Н. Губина, выполненной под руководством Германа Гавриловича.

С конца 60-х годов и до последнего дня Г.Г. Пестов вместе со своими учениками занимался теорией упорядоченных полей. Важными результатами, полученными в последние годы, является разработка классификации сечений в линейно упорядоченных полях, характеристика различных замыканий линейно упорядоченных полей, введение определения бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля, представление нестандартной вещественной прямой с помощью поля обобщенных степенных рядов и ряд других результатов.

Математические исследования Германа Гавриловича широко известны и за пределами России. Он был членом Американского математического общества, референтом ведущих международных реферативных журналов: *Mathematical Reviews* и *Zentralblatt MATH*. Международным биографическим центром в Кембридже Г.Г. Пестов был избран одним из ведущих ученых мира 2012 года.



Герман Гаврилович был постоянным руководителем научных семинаров по упорядоченным системам и нестандартному анализу.

Под руководством Г.Г. Пестова подготовлено и успешно защищено семь кандидатских диссертаций (Л.В. Ушакова, В.А. Томиленко, А.И. Терре, А.И. Забарина, Н.Ю. Галанова, А.А. Тоболкин, Е.А. Фомина).

Г.Г. Пестов внес значительный вклад в совершенствование преподавания курса математического анализа – одного из основных общих курсов на ММФ. Он одним из первых ввел преподавание важных разделов математического анализа с использованием понятия меры, что позволило включить в этот курс основные факты теории интеграла Лебега.

Его лекциям присущи ясность изложения самых трудных вопросов современной математики, умение вовлекать слушателей в активные размышления над математическими проблемами.

Более сорока лет назад физики и математики нашего университета организовали летнюю ФМШ, и Герман Гаврилович был одним из первых её преподавателей. Его давние коллеги и сейчас с теплотой рассказывают о его умении помочь в решении постоянно возникавших в сезоне проблем, его активное творческое участие во всех школьных мероприятиях.

В течение многих лет Г.Г. Пестов читал лекции и проводил семинарские занятия по истории и методологии математики для студентов Томского педагогического университета. Большую работу Герман Гаврилович вел и по улучшению методов изучения математики в школе. Он соавтор многих пособий и учебников, предназначенных школьникам и учителям.

Герман Гаврилович был членом методического совета университета, председателем методической комиссии факультета, членом диссертационного совета по защитам докторских диссертаций по алгебре и анализу при ТГУ, членом ученого совета ММФ.

Г.Г. Пестов был награжден нагрудными знаками «За отличные успехи в работе» МВ и ССО СССР и «Почетный работник высшего профессионального образования» Российской Федерации, медалью «За заслуги перед Томским государственным университетом».

Г.Г. Пестов был лауреатом конкурса в сфере образования и науки, за высокие достижения в сфере образования и науки, способствующие укреплению престижа Томского научно-образовательного комплекса в стране и во всём мире (1997); лауреатом конкурса Томской области в сфере образования и науки, здравоохранения и культуры (2008).

Коллеги искренне уважали Германа Гавриловича за эрудицию, способность тактично помочь в трудной ситуации, за доброжелательное отношение к студентам и коллегам, за скромность, умение создать творческую обстановку в руководимом им коллективе. Его жизненные правила вызывали искреннее уважение. Герман Гаврилович серьёзно занимался йогой и до преклонного возраста не обращался к врачам. Он с удовольствием пел известные и собственные песни, аккомпанируя себе на гитаре, читал в подлиннике книги на английском и немецком языках, интересовался новостями в различных областях науки.

Перестало биться сердце Пестова Германа Гавриловича, но его ученики и последователи остались. Верность жизненным и научным принципам Германа Гавриловича будет лучшей памятью о нём.

Герман Гаврилович Пестов похоронен в Томске на кладбище «Тихий дол».

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ
Пестова Германа Гавриловича

1959

1. О наибольшем круге, вложенном в замкнутую кривую // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 6. С. 1170–1172 (соавтор *Ионин В.К.*).
2. Исследование вибрации ручного пневматического молотка при работе по различным материалам // Горные машины и автоматика. 1959. Вып. 56 (12). С. 52–54 (соавторы *Горбунов В.Ф., Бабуров В.И., Редутинский Л.С. Триханов А.В.*).

1964

3. Об одном классе преобразований абсолютно сходящихся рядов // Доклады Третьей сибирской конференции по математике и механике 8–13 сентября 1964 г. Томск. С. 50–51.
4. О полупроективных структурах // Доклады Третьей сибирской конференции по математике и механике 8–13 сентября 1964 г. Томск. С. 208–209.

1965

5. Аксиоматика конечных точечных систем // Известия ТПИ. 1965. Т. 131. С. 83–87.
6. О глубине точки в точечной системе // Известия ТПИ. 1965. Т. 131. С. 88–93.
7. Способы задания точечных систем // Известия ТПИ. 1965. Т. 131. С. 94–99.
8. О некоторых числовых характеристиках точечных систем // Известия ТПИ. 1965. Т. 131. С. 100–103.
9. Некоторые экстремальные задачи теории точечных систем // Известия ТПИ. 1965. Т. 131. С. 104–107.

1966

10. Об одном сохраняющем меру отображении // Вопросы математики. Труды ТГУ. 1966. Т. 179. С. 63–65,

1967

11. n -мерные точечные системы // Труды ТГУ. 1967. Т. 191. С. 158–163.
12. Теоремы о внешних точках и гранях n -мерной точечной системы // Труды ТГУ. Т. 191. С. 164–174.
13. Глубина точки и функция сечений n -мерной точечной системы // Труды ТГУ. 1967. Т. 191. С. 174–178.
14. О числе невыпуклых и выпуклых четверок в плоской точечной системе // Известия ТПИ. 1967. Т. 154. С. 3–5.
15. Необходимые признаки наименьшей выпуклости точечной системы // Известия ТПИ. 1967. Т. 154. С. 6–9.

1968

16. Отчет по хозяйственной теме «Решение задач надежности элементов вычислительной техники на ЭЦВМ». 2-й этап, рукопись. Томск: ТГУ, 1968 (соавторы *Романович В.А., Устинов Ю.К., Кривякова Э.Н., Прищепа Г.П., Кривоуцкий В.И.*).

1969

17. Отчет по хозяйственной теме «Решение задач надежности элементов вычислительной техники на ЭЦВМ». 1-й этап, рукопись. Томск: ТГУ, 1969 (соавторы *Романович В.А., Устинов Ю.К., Кривякова Э.Н., Прищепа Г.П.*).

18. Отчет по хоздоговорной теме «Решение задач надежности элементов вычислительной техники на ЭЦВМ». 2-й этап, рукопись. Томск: ТГУ, 1969 (соавторы Романович В.А., Устинов Ю.К., Кривякова Э.Н., Разин С.А.).
19. О метризациях линейных пространств, при которых прямые являются кратчайшими // Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири. Новокузнецк, 1969. С. 42–43.
20. Функции порядка в аффинном пространстве // Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири. Новокузнецк, 1969. С. 116–117.
21. О некоторых моделях в задачах оптимального резервирования // Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири. Новокузнецк, 1969. С. 174–175.
22. О метриках, для которых прямые являются кратчайшими // Тез. докл. Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии. Тбилиси, 1969. С. 197–198.
1970
23. О 2-упорядоченных полях // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Томск, 1970. Т. 1. С. 156–157.
24. О продолжении частичных порядков в группах // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Томск, 1970. Т. 1. С. 157 (соавтор Терпе А.И.).
25. Об одной модели оптимального резервирования // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Томск, 1970. Т. 1. С. 115–117 (соавторы Тен-Чу-Су, Ушакова Л.В.).
26. Оптимальные стратегии в задаче динамического резервирования // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Томск, 1970. Т. 1. С. 117–118 (соавтор Ушакова Л.В.).
27. n -упорядоченные множества // Труды Иркутского государственного университета. Сер. математич. Иркутск, 1970. Вып. 6. Т. 74. С. 146–169.
1971
28. Оптимальные стратегии в задаче динамического резервирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 5. С. 76–79 (соавтор Ушакова Л.В.).
29. О двумерно упорядоченных полях // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, резюме сообщений и докладов. Кишинев, 1971. С. 328–329.
1972
30. Некоторые свойства оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Материалы Второй научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1971. Т. 1. С. 98–101.
1973
31. Упрощенный алгоритм поиска оптимальной стратегии в задаче динамического резервирования // Материалы Третьей научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. Вып. 1. С. 126–128 (соавтор Ушакова Л.В.).
32. Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 5. С. 76–82 (соавтор Ушакова Л.В.).

1974

33. Об одном способе задания 2-порядка, совместимого со структурой поля // Материалы Четвертой научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. Т. 1. С. 114–119 (соавтор *Терпе А.И.*).
34. Пространство стратегий одного класса задач резервирования // Материалы Четвертой научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. Т. 1. С. 146 (соавтор *Козлова Н.Г.*).

1975

35. К теории 2-упорядоченных полей // Материалы пятой научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. Т.1. С. 81.
36. О некоторых характеристиках управляемой резервированной системы // Материалы Пятой научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. Т. 1. С. 100–102 (соавтор *Томиленко В.А.*).

1976

37. К теории двумерно упорядоченных полей // Группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1976. С. 35–48 (соавтор *Терпе А.И.*).

1977

38. Поток вторичных частиц на поверхности Луны. Рукопись. Отчет по НИР. ТГУ. 1977. № г.р.78025024, Главы 3, 4. С. 49–78 (соавторы *Исаева Н.А., Козлова Н.Г., Кривякова Э.Н., Плеханова Л.Г., Фаст В.Г.*).

1978

39. Поток вторичных частиц на поверхности Луны, II. Рукопись. Отчет по НИР. ТГУ, 1978. № г.р.78025024, главы 3.2, С. 30–50 (соавтор *Бояркина А.П., Исаева Н.А., Кривякова Э.Н., Сибиряков Г.В., Фаст В.Г.*).

1979

40. Поток вторичных частиц на поверхности Луны и в окололунном пространстве. Рукопись. Отчет по НИР. ТГУ, 1979. № г.р.78025024. Гл. 2. С. 16–30 (соавтор *Исаева Н.А., Кривякова Э.Н., Сибиряков Г.В., Фаст В.Г.*).

1980

41. Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. С. 1–80.

1981

42. Об архимедово полных полях и теореме вложения Хана // Аннотированная программа Омской областной математической конференции. Омск: ОМГУ, 1981. С. 5.
43. О вещественно замкнутых подполях алгебраически замкнутого поля // Аннотированная программа Омской областной математической конференции. Омск: ОМГУ, 1981. С. 5.
44. Об архимедовском пополнении упорядоченного поля // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы. Ленинград: ЛОМИ, 1981. С. 126.

1982

45. О вещественно замкнутых подполях алгебраически замкнутого поля // Труды III Омской областной математической конференции. Омск, 1982. № 1018–83. Деп. УДК 519.48. С.79–80.

1983

46. Задача о сопряженных элементах для абелевой линейно упорядоченной группы // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция: тез. сообщений. Минск, 1983. Ч. 2. С.181.
47. Об архимедовски полных полях и теореме вложения Хана // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция: тез. сообщений. Минск, 1983. Ч. 2. С. 81–82.

1984

48. К теореме Сверчковского // Сибирский математический журнал. 1984. № 4. С. 46–53 (соавтор *Забарина А.И.*).
49. О классе циклически упорядоченных групп // IX Всесоюзный симпозиум по теории групп: тез. М., 1984. С. 200 (соавтор *Забарина А.И.*).

1985

50. Критерий циклической упорядочиваемости групп // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция: тез. сообщений. Кишинев, 1985. Ч. 1. С. 195 (соавтор *Забарина А.И.*).

1986

51. О критерии циклической упорядочиваемости группы // Упорядоченные множества и решетки. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1986. С. 19–24 (соавтор *Забарина А.И.*).

1987

52. К задаче о сопряженных элементах // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 3(255). С. 188.

1990

53. Одна теорема о преобразованиях Фурье // Нестандартный анализ. Третий Всесоюзный семинар: тез. докладов. Саратов, 1990. С. 36.

1995

54. A mathematical model of the impact (meteoritic) crater formation // International meeting : Ecological Consequences of the Collision of the Earth with Small Bodies of the Solar System, Moscow – Tomsk – Vanavara – Tungusca Meteoritic Parc, July 18–26, Houston, 1995; 1 P (соавтор *Фаст В.Г.*).

1997

55. Об одной модели альтернативной теории множеств Вopenки // Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике»: тез. докладов. Томск, 17–20 июля 1997. Томск, 1997. Т.1. С.56 (соавтор *Забарина А.И.*).
56. Поля обобщенных степенных рядов // Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике»: тез. докладов. Томск, 17–20 июля 1997. Томск, 1997. Т. 1. С. 11–12 (соавтор *Галанова Н.Ю.*).
57. О поле нестандартных вещественных чисел // Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике»: тез. докладов. Томск, 17–20 июля 1997. Томск, 1997. Т. 1. С. 66–67.
58. Симметрия сечений в упорядоченном поле // Избранные доклады Международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. Т. 1. С. 198–203.

59. Об архимедовской полноте и об изоморфизме упорядоченных полей // Избранные доклады Международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. Т. 1. С. 203–208.

1998

60. Об одной стохастической модели образования осколков // Математическое моделирование и теория вероятностей: сборник. Томск: Пеленг, 1998. С. 248–252.

2000

61. К теории сечений в упорядоченных полях // Исследования по математическому анализу и алгебре: сб. трудов. Томск: ТГУ, 2000. С. 11.
62. К теореме направленности // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 60–62 (соавтор *Хусаинова С.Р.*).

2001

63. Об обобщенно периодических элементах // Исследования по математическому анализу и алгебре: сб. трудов. Томск: ТГУ, 2001. Вып. 3. С. 223–234.
64. К теории сечений в упорядоченных полях // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
65. Pestov G.G. On the theory of sections in ordered fields // Sibirsk. Mat. Zh. 2001. V. 42. No. 6. P. 1350–1360. (in Russian)

2002

66. Об определенных сечениях в упорядоченных полях // Международная конференция «Алгебра и ее приложения»: тез. докладов. Красноярск, 2002. С. 96.

2003

67. О замыканиях упорядоченных полей // Международная конференция по математике и механике 16–18 сентября 2003 г.: тез. докладов. Томск, ТГУ. С. 52.
68. Об n -упорядоченных группах // Международная конференция по математике и механике 16–18 сентября 2003 г.: тез. докладов. Томск, ТГУ. С. 40 (соавтор *Забарина А.И.*).
69. Двумерно упорядоченные поля. Томск: ТГУ, 2003. С. 1–128.
70. Об n -мерно упорядоченных группах // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 40–42 (соавтор *Забарина А.И.*).

2004

71. Правый конус и ромбические окрестности в двумерно упорядоченном поле // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2004. № 21. С. 5–18.
72. Топологические и алгебраические свойства двумерно упорядоченных полей // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2004. № 21. С. 19–33.
73. Теоремы о замыканиях линейно упорядоченных полей // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2004. № 21. С. 34–38.
74. О классе циклически упорядочиваемых групп // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2004. № 21. С. 39–43.

2006

75. К альтернативной теории множеств // Вестник Томского государственного университета. № 290. Март 2006. С 35–37 (соавтор *Забарина А.И.*).

2007

76. О бесконечно близких к базе элементах // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2007. № 29. С 157–158 (соавтор *Фомина Е.А.*).
77. О 2-упорядоченных полях без бесконечно малых над базой // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания: материалы заочной научно-практической конференции. Томск: Изд-во ТГПУ, 2007. С. 32–39 (соавтор *Фомина Е.А.*).
78. О подгруппах 2-упорядоченных групп // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания: материалы заочной научно-практической конференции. Томск: Изд-во ТГПУ, 2007. С. 17–20 (соавтор *Забарина А.И.*).
79. Об архимедовски замкнутых полях // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 299. С. 101–103.
80. Конфинальность симметричных сечений в полях ограниченных степенных рядов // Международная конференция «Алгебра и её приложения». Красноярск, 12–18 августа 2007: тез. докладов. Красноярск, 2007. С. 105–106 (соавтор *Галанова Н.Ю.*).
81. k -плоскости в n -мерно упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 301. С. 92–93 (соавтор *Тоболкин А.А.*).
82. О сечениях в базе 2-упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 301. С. 94–96 (соавтор *Фомина Е.А.*).
83. n -dimensionally ordered groups // Избранные вопросы алгебры. Сборник статей, посвящённых памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алтайского государственного университета, 2007. С. 165–172.
84. К геометрии n -упорядоченных групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 46–49 (соавтор *Тоболкин А.А.*).
85. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50–53 (соавтор *Фомина Е.А.*).

2008

86. Об алгоритмах Матиясевича // Всероссийская конференция по математике и механике 22–25 сентября 2008 г.: тез. докладов. Томск, 2008. С. 115–116 (соавтор *Грязнова Л.И.*).
87. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 2. С. 174–185 (соавтор *Галанова Н.Ю.*).

2009

88. Подполе B бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2 (6). С. 41–47.

2011

89. Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 5–8 (соавтор *Забарина А.И.*).

90. К теории двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2 (14). С. 16–19 (соавтор *Фомина Е.А.*).

2013

91. Конструкция семейства бесконечно узких полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 13–15 (соавтор *Фомина Е.А.*).
92. О целых алгебраических числах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 18–19 (соавтор *Забарина А.И.*).

2014

93. Об одном классе резервируемых устройств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4 (30). С. 14–23 (соавтор *Губин В.Н.*).

2015

94. О 2-упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2 (34). С. 30–40 (соавторы *Забарина А.И., Фомина Е.А., Тоболкин А.А.*).

СПИСОК УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ РАБОТ

Пестова Германа Гавриловича

1970

1. О построении курса теории вероятностей во втузе // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Томск, 1970. Т. 1. С. 208–210 (соавтор *Пестова Н.Ф.*).

1972

2. Элементы теории надежности в курсе теории вероятностей // Материалы Второй научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1971. Т. 1. С. 110 (соавтор *Пестова Н.Ф.*).

1980

3. О курсе математического анализа для студентов-математиков // Вопросы методики преподавания математики в вузе. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. С. 55–56.

1982

4. Об изложении темы: Образ измеримого множества при непрерывно дифференцируемом отображении // Материалы научно-методического совещания-семинара заведующих кафедрами математики вузов Уральской, Западносибирской и Дальневосточной зон. Омск: Ред.-изд. отдел ОМПИ, 1982. С. 106–107.

1983

5. Об изложении в курсе анализа темы: Образ измеримого множества при непрерывно дифференцируемом отображении // Вопросы методики преподавания математики в вузе. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. С. 90–94.

6. Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 74 с.

1984

7. Исследования по алгебре в Томском университете // Сибирский математический журнал. 1984. № 3. С. 213–214 (соавтор *Беккер И.Х.*).

1991

8. Диалоги о функции // Методические рекомендации для учителей и учащихся по теме «Функция». Томск, 1991. С. 36–44, 18 (соавторы *Гельфман Э.Г.* и др.).

1995

9. Сказка о спящей красавице или функция. Учебное пособие по математике для 9 класса. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1995. С. 1–346 (соавторы *Гельфман Э.Г.* и др.).

1996

10. Функции и их свойства // Сказка о спящей красавице или функция: учеб. пособие по математике для 9 класса. Изд. второе, исправленное и дополненное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. С. 34–95 (соавтор *Гельфман Э.Г.* и др.).
11. О студенческих семинарах // Тез. докл. Сибирской научной конференции «Проблемы развития творческого потенциала личности в системе педагогического образования». Томск, ТГПИ. 1996. С. 199 (соавтор *Забарина А.И.*).

1997

12. Классификация задач по сложности решения // Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск, 17–20 июля 1997 г.: тез. докл. Томск, 1997. Т. 1. С. 56–57 (соавтор *Фомина Е.А.*).

2007

13. Организация занятий школьников по логике в рамках игры «Кенгуру»: учеб.-методич. пособие. Томск: Изд-во ТГПУ, 2007. 57 с (соавторы *Забарина А.И., Ожеред Т.С.*).
14. Математическое творчество Эйлера // Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвящённая трёхсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера: сб. материалов. Томск, 2007. С. 21–27.
15. Дипломная работа и государственные экзамены по специальности на механико-математическом факультете: учеб. пособие для студентов ММФ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. (соавторы *Гришин А.М., Крылов П.А., Старченко А.В.*).

2011

16. Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3 (15). С. 41–47.

2013

17. Алгебра. Учебник для 9 класса. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 272 с (соавторы *Гельфман Э.Г.* и др.).
18. Алгебра: Понятие отображения: учеб.-методич. пособие. Томск: Изд-во ТГПУ, 2013. 63 с (соавторы *Забарина А.И., Фомина Е.А.*).

2014

19. История кафедры математического анализа Томского университета. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29). С. 109–124 (соавторы *Александров И.А., Копанева Л.С.*).

2015

20. Математическая логика: понятие и свойства предикатов: учеб.-методич. пособие. Томск: Издательство ТГПУ, 2015. 72 с. (соавторы *Забарина А.И., Фомина Е.А.*).

*И.А. Александров, В.В. Конев, С.А. Копанев,
Э.Н. Кривякова, С.М. Пергаменщиков,
Г.В. Сибиряков, А.В. Старченко*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВЕРШИНИН Ярослав Николаевич – аспирант кафедры математической кибернетики математического факультета Кемеровского государственного университета. E-mail: Azimus88@gmail.com

КРУТИКОВ Владимир Николаевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики математического факультета Кемеровского государственного университета. E-mail: krutikovvn@gmail.com

ЗАХАРОВ Юрий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики математического факультета Кемеровского государственного университета. E-mail: zacharovyn@rambler.ru

КОВАЛЕВСКИЙ Артем Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Новосибирского государственного технического университета. E-mail: pandorra@ngs.ru

ШАТАЛИН Евгений Викторович – аспирант Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева. E-mail: sh_e_v_89@list.ru

СЕДЫХ Анна Геннадьевна – старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) Российского экономического университета им. Плеханова. E-mail: Sedykh-anna@mail.ru

АНДРОПОВА Антонина Олеговна – преподаватель физико-математической школы Томского государственного университета. E-mail: a.o.andropova@gmail.com

БОДРОВ Александр Станиславович – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: alex.bodrov@mail.ru

ЕВТЮШКИН Евгений Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: teormechn@tsuab.ru

ЗЕЛЕПУГИН Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: alekszel84@mail.ru

ЗЕЛЕПУГИН Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: szel@yandex.ru

ЗОЛОТАРЕВ Виктор Юрьевич – аспирант, инженер центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им.С.А.Лавочкина». E-mail: fasdertok@bk.ru

КОТЛЯРОВ Евгений Юрьевич – аспирант, начальник сектора центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им.С.А.Лавочкина». E-mail: key@laspace.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета. E-mail: matvolegv@mail.ru

ОЛИМПНОВА Надежда Владимировна – аспирантка кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: nadin_04@mail.ru

ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pma@ftf.tsu.ru

СОБКО Евгений Алексеевич – студент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sobkozheka@gmail.com

СЕРОВ Геннадий Павлович – ведущий специалист центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им.С.А.Лавочкина». E-mail: serov@laspace.ru

ТУЛИН Дмитрий Владимирович – начальник центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». E-mail: tulin@laspace.ru

УСТИНОВ Святослав Николаевич – заместитель начальника центра «Тепловое и аэродинамическое проектирование космических аппаратов» ФГУП «НПО им. С.А.Лавочкина». E-mail: ust@laspace.ru

ЧИНЧИКЕЕВА Наталья Александровна – аспирантка кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: chinchikeeva@gmail.com

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: evseevns@gmail.com

ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: yva@ftf.tsu.ru