ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 4 (33)

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/33/3

А.Р. Ерёмина, Ю.В. Малинковский

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с многорежимными стратегиями, положительными и отрицательными заявками нескольких типов. Время обслуживания заявок имеет показательное распределение, количество работы по переключению режима прибора в узле – произвольное распределение. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети относительно функциональной формы распределений величин работ, требующихся на переключение режимов работы приборов.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания; инвариантность; многорежимное обслуживание; отрицательные заявки; LCFS PR.

Сети массового обслуживания используются в качестве адекватных моделей производственных и транспортно-логистических сетей, сетей связи и передачи данных, информационных и компьютерных сетей.

Сети джексоновского типа с отрицательными заявками (так называемые «*G*-сети») были впервые рассмотрены Э. Геленбе в [1, 2]. В них наряду с обычными, «положительными» заявками в сеть поступают «отрицательные» заявки, которые не требуют обслуживания и ведут себя как сигналы (отрицательная заявка уменьшает количество положительных заявок в узле на одну и не оказывает никакого влияния на узел, если в нем нет положительных заявок). Э. Геленбе установил, что для таких сетей стационарное распределение также имеет форму произведения, а уравнение трафика (нелинейное) имеет единственное положительное решение. После этого многими авторами рассматривались различные обобщения *G*-сетей. В частности, в [3–5] исследовались сети с многорежимными стратегиями, отрицательными заявками и информационными сигналами. В этих работах полагалось, что длительности обслуживания заявок и времена пребывания приборов в режимах имеют показательные распределения. Однако в сетевых моделях, описывающих реальные объекты в экономике, финансах, технике и т.п., указанные распределения чаще всего отличаются от показательного. Так, например, любые технические средства в силу естественного износа или нарушения условий эксплуатации могут полностью прекращать функционирование, требовать ремонта (замены) или продолжать работать с меньшей производительностью. Поэтому большую важность для практических приложений представляет изучение сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать в нескольких режимах, соответствующих различной производительности. Подобные сети позволяют моделировать ситуации, когда обслуживающие приборы частично надёжны, что особенно актуально для реальных сетей, в которых любые технические средства в силу физического износа, нарушения условий эксплуатации и т.д. могут выходить из строя полностью или частично, работая при этом с различной производительностью. Стандартный случайный процесс, описывающий такие сети, не является марковским, что затрудняет их исследование и нахождение стационарного распределения.

В [6] была исследована сеть, в которой некоторые узлы доступны для отрицательных заявок и длительности обслуживания имеют показательное распределение, а оставшиеся узлы недоступны для отрицательных заявок и длительности обслуживания имеют произвольную функцию распределения. Была доказана инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний указанной сети по отношению к функциям распределения длительностей обслуживания заявок в узлах, недоступных для отрицательных заявок.

В [7] рассматривалась сеть с многорежимным обслуживанием и отрицательными заявками одного типа, когда обслуживание имело временную интерпретацию (т.е. скорость обслуживания равна 1). Была установлена инвариантность стационарного распределения относительно функций распределения величин работ, требующихся для переключения режимов функционирования приборов в узлах при фиксированных математических ожиданиях.

В данной статье результат, полученный в [7], распространен на случай, когда в сеть с многорежимным обслуживанием поступают положительные и отрицательные заявки различных типов.

1. Описание сети

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которую поступают два независимых простейших потока положительных и отрицательных заявок с интенсивностями λ^+ и λ^- соответственно. Каждая заявка входного потока положительных заявок независимо от других заявок направляется в l-й узел и становится заявкой типа u, $u=\overline{1,M}$, с вероятностью $p^+_{0(l,u)}$ ($\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p^+_{0(l,u)}=1$). Каждая заявка входного потока отрицательных заявок независимо от других заявок направляется в l-й узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p^-_{0(l,u)}$ ($\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p^-_{0(l,u)}=1$). Отрицательная заявка типа u, поступающая в узел сети, обслуживания не требует. Она уменьшает число заявок типа u в этом узле на единицу, если в очереди данного узла есть заявки типа u, и не оказывает никакого влияния на состояние узла в противном случае.

После обслуживания в l-м узле положительная заявка типа u независимо от других заявок мгновенно с вероятностью $p^+_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k-й узел как положительная заявка типа v, с вероятностью $p^-_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k-й узел как отрицательная заявка типа v, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть ($\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}(p^+_{(l,u)(k,v)}+p^-_{(l,u)(k,v)})+p_{(l,u)0}=1; l,k=\overline{1,N}; u,v=\overline{1,M}$).

Заявки в узлах обслуживаются согласно дисциплине LCFS PR (заявка, поступающая в l-й узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится первой в очереди на обслуживание). Таким образом, поступающие в узел заявки имеют абсолютный приоритет. Время обслуживания заявки типа u, находящейся в l-м узле, имеет показательное распределение с параметром μ_{lu}.

В каждом из N узлов находится единственный прибор, который может работать в r_l+1 режимах $0, 1, ..., r_l$, $l=\overline{1,N}$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t)=(x_1(t), x_2(t),..., x_N(t))$, где состояние l-го узла в момент времени t описывается вектором $x_l(t)=(\overline{x}_l(t), j_l(t))=$ $=(x_{l1}(t), x_{l2}(t),..., x_{l,n(l)}(t), j_l(t))$; $x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t; $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t и т.д.; $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на облуживание в l-м узле в момент времени t; $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на облуживании в l-м узле в момент времени t; $j_l(t)$ – режим, в котором работает l-й узел в момент времени t. Процесс $x(t)$ обладает пространством состояний

$$X=X_1\times X_2\times...\times X_N,$$

где $X_l=\{(0,j_l), (x_{l1},j_l), (x_{l1},x_{l2},j_l), (x_{l1},x_{l2},x_{l3},j_l),...: x_{lk}=\overline{1,M}, k=1,2,...; j_l=\overline{0,r_l}\}$.

В качестве основного режима работы обслуживающего прибора полагается режим работы 0. Переключение происходит только на соседние режимы. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Количество работы, необходимое для переключения прибора l-го узла из основного режима работы в режим 1, является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0,\tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(0)$. При этом если в момент времени t в узле находится $n(l)$ заявок (состояние узла $(\bar{x}_l, j_l)$), то указанная работа выполняется со скоростью $\nu_l(\bar{x}_l,0)$.

Для состояний x_l, у которых $1 \le j_l \le r_l - 1$, количество работы, необходимое для изменения режима j_l, также является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l,\tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(j_l)$.

Если в момент времени t состояние узла $(\bar{x}_l, j_l)$, то выполнение работы происходит со скоростью $\nu_l(x_l)+\varphi_l(x_l)$, при этом с вероятностью $\dfrac{\nu_l(x_l)}{\nu_l(x_l)+\varphi_l(x_l)}$ прибор l-го узла переходит в режим j_l+1, а с вероятностью $\dfrac{\varphi_l(x_l)}{\nu_l(x_l)+\varphi_l(x_l)}$ прибор l-го узла переходит в режим j_l-1.

Аналогично количество работы, необходимое для выхода прибора l-го узла из режима работы r_l в r_l-1, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l,\tilde{u})$ и математическое ожидание $\eta_l(r_l)$. При этом если в момент времени t состояние узла $(\bar{x}_l, j_l)$, то указанная работа выполняется со скоростью $\varphi_l(\bar{x}_l, r_l)$.

Математические ожидания всех вышеперечисленных случайных величин конечны, т.е. $\eta_l(j_l)<+\infty,\ j_l=\overline{0,\ r_l},\ l=\overline{1,N}.$

Для сокращения выкладок вводятся операторы:

$$T_u^+(\bar{x}_l)=T_u^+(x_{l1},\dots,x_{l,n(l)})=(x_{l1},\dots,x_{l,n(l)},u),$$

$$T^-(\bar{x}_l)=T^-(x_{l1},\dots,x_{l,n(l)})=(x_{l1},\dots,x_{l,n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x)=T_{(l,u)}^+(x_1,\dots,x_N)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(T_u^+(\bar{x}_l), j_l),$$

$$T_l^-(x)=T_l^-(x_1,\dots,x_N)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(T^-(\bar{x}_l), j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x)=R_l^{j_l+1}(x_1,\dots,x_N)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(\bar{x}_l, j_l+1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x)=R_l^{j_l-1}(x_1,\dots,x_N)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(\bar{x}_l, j_l-1).$$

Полагается, что все величины μ_l, $\nu_l(x_l)$, $\varphi_l(x_l)$ строго больше 0, а матрица $\left(p^+_{(l,u)(k,v)}\right)$, $u,v=\overline{1,M}$, $l,k=\overline{0,N}$, неприводима.

Обозначим через $\alpha^+_{(l,u)}$ среднюю интенсивность поступления положительных заявок типа u в l-й узел, а через $\alpha^-_{(l,u)}$ – среднюю интенсивность поступления отрицательных заявок типа u в l-й узел, $u=\overline{1,M}$.

Рассмотрим систему нелинейных относительно $\alpha^+_{(l,u)}$ и $\alpha^-_{(l,u)}$ уравнений:

$$\alpha^+_{(l,u)}=\lambda^+ p^+_{0(l,u)}+\sum_{(k,v)}\frac{\alpha^+_{(k,v)}\mu_{(k,v)}}{\mu_{(k,v)}+\alpha^-_{(k,v)}}p^+_{(k,v)(l,u)}, \tag{1}$$

$$\alpha^-_{(l,u)}=\lambda^- p^-_{0(l,u)}+\sum_{(k,v)}\frac{\alpha^+_{(k,v)}\mu_{(k,v)}}{\mu_{(k,v)}+\alpha^-_{(k,v)}}p^-_{(k,v)(l,u)}, \tag{2}$$

$$l,\ k=\overline{1,N};u,\ v=\overline{1,M}.$$

Система уравнений (1)–(2) имеет решение

$$\left(\alpha^+_{(1,u)},\alpha^+_{(2,u)},...,\alpha^+_{(N,u)};\alpha^-_{(1,u)},\alpha^-_{(2,u)},...,\alpha^-_{(N,u)}\right),\ u=\overline{1,M}.$$

Полагается, что оно существует, причём $\alpha^+_{(1,u)}>0, l=\overline{1,N}$.

Через $\psi_{lj_l(t)}(t)$ обозначается количество работы, которое осталось выполнить с момента t для переключения режима обслуживания на соседний режим в l-м узле, если обслуживающий прибор работает в режиме j_l, $\psi(t)=\left(\psi_{1,j_1(t)}(t),\psi_{2,j_2(t)}(t),...,\psi_{N,j_N(t)}(t)\right)$.

В силу вышесказанного

$$\frac{d\psi_{l,j_l(t)}(t)}{dt}=-\left(\nu_l(x_l)I_{(j_l\neq r_l)}+\varphi_l(x_l)I_{(j_l\neq 0)}\right).$$

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассматривается кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t)=(x(t),\psi(t))$, полученный добавлением к $x(t)$ непрерывной компоненты $\psi(t)$.

Под $P=\{P(x)\}$ понимается стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$, $P(x)=\lim\limits_{t\to\infty}P\{x(t)=x\}$.

Функции

$$F(x,z)=F(x,z_{1,j_1},z_{2,j_2},...,z_{N,j_N})=$$

$$=\lim_{t\to\infty}P\left\{x(t)=x;\psi_{1,j_1}(t)<z_{1,j_1},\psi_{2,j_2}(t)<z_{2,j_2};...;\psi_{N,j_N}(t)<z_{N,j_N}\right\}$$

называются стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного марковского процесса $\zeta(t)$.

2. Марковский случай

Пусть длительности пребывания в режимах имеют показательное распределение, т.е. для l-го узла $\Phi_l(x_l,\tilde{u})=1-\exp\{-(\nu_l(\bar{x}_l,j_l)+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l))\tilde{u}\}$, $(\tilde{u}>0)$. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счётным фазовым пространством состояний $X=X_1\times X_2\times...\times X_N$, где $X_l=\{(0,j_l),(x_{l1},j_l),(x_{l1},x_{l2},j_l),...:x_{lk}=\overline{1,M},k=1,2,...;\ j_l=\overline{0,r_l}\}$.

В [8] установлено, что при выполнении условий

$$\nu_l(\bar{x}_l,j_l-1)\phi_l(T^-(\bar{x}_l),j_l)=\nu_l(T^-(\bar{x}_l),j_l-1)\varphi_l(\bar{x}_l,j_l), \tag{3}$$

$$\sum_{x\in X}q_x\prod_{l=1}^{N}\left[\prod_{s=1}^{n(l)}\left(\frac{\alpha^+_{(l,x_{ls})}}{\mu_{(l,x_{ls})}+\alpha^-_{(l,x_{ls})}}\right)\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(\bar{x}_l,k-1)}{\varphi_l(\bar{x}_l,k)}\right]<+\infty, \tag{4}$$

$$q_x=\lambda^++\lambda^-+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{(l,u)}+\sum_{l=1}^{n}\left[\nu_l(\bar{x}_l,j_l)+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l)\right]$$

процесс $x(t)$ эргодичен. При этом финальное стационарное распределение имеет мультипликативную форму, в которой множители характеризуют отдельные узлы

$$P(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)\times...\times p_N(x_N),$$

где

$$p_l(\bar{x}_l,j_l)=\prod_{s=1}^{n(l)}\left(\frac{\alpha^+_{(l,x_{ls})}}{\mu_{(l,x_{ls})}+\alpha^-_{(l,x_{ls})}}\right)\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(\bar{x}_l,k-1)}{\varphi_l(\bar{x}_l,k)}p_l(0,0),\ (\bar{x}_l,j_l)\in X_i, \tag{5}$$

а $\left(\alpha^+_{(l,u)},\alpha^-_{(l,u)}\right)$, $l=\overline{1,N}$, – положительное решение уравнений трафика (1)–(2).

3. Основной результат

Пусть теперь количество работы, необходимое для переключения режима прибора l-го узла на один из соседних режимов, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l,\widetilde{u})$, когда состояние l-го узла есть $(\bar{x}_l, j_l)$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3)–(4), то процесс $\zeta(t)$ эргодичен, при этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x,z)$ определяются по формулам

$$F(x,z)=\prod_{l=1}^{N} p_l(x_l)\eta_l^{-1}(j_l)\int_0^{z_{l,jl}}\left(1-\Phi_l(j_l,\widetilde{u})\right)d\widetilde{u},\ x\in X, \tag{6}$$

где

$$p_l(\bar{x}_l,j_l)=\prod_{s=1}^{n(l)}\left(\frac{\alpha^+_{(l,x_{ls})}}{\mu_{(l,x_{ls})}+\alpha^-_{(l,x_{ls})}}\right)\frac{\eta(j_l)}{\eta(0)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(0,k-1)}{\varphi_l(0,k)}p_l(0{,}0), \tag{7}$$

$$p_l(0{,}0)=\eta(0)\left(1-\prod_{s=1}^{n(l)}\frac{\alpha^+_{(l,x_{ls})}}{\mu_{(l,x_{ls})}+\alpha^-_{(l,x_{ls})}}\right)\left(\sum_{j_l=0}^{r_l}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(0,k-1)}{\varphi_l(0_l,k)}\right)^{-1}, \tag{8}$$

а $\left(\alpha^+_{(l,u)},\alpha^-_{(l,u)}\right)$, $l=\overline{1,N}$, – положительное решение уравнений трафика (1)–(2).

Доказательство. Пусть выполнены условия (3)–(4), т.е. в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, тогда, по-видимому, и в общем случае при выполнении условий (3)–(4) существует стационарное эргодическое распределение $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок, прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [9. С. 41], при этом учитывается, что среднее время обслуживания заявки равно среднему времени обслуживания заявки в марковском случае.

Обозначим $\vartheta_l(\bar{x}_l,j_l)=v_l(x_l)I_{(j_l\neq r_l)}+\varphi_l(x_l)I_{(j_l\neq 0)}$, $n(l)>0$, $j_l=\overline{0,r_l}$, $l=\overline{1,N}$.

Для $F(x,z)$ справедлива следующая система разностно-дифференциальных уравнений:

$$\left(\lambda^+ + \lambda^- + \sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}\right)F(x,z)= \tag{9}$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\vartheta_l(\bar{x}_l,j_l)\left(\frac{\partial F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}-\left(\frac{\partial F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}\right)_{z_{l,j_l}=0}\right)+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}p_{(l,u)0}F(T^+_{(l,u)}(x),z)+$$

$$+\lambda^+\sum_{l=1}^{N}p^+_{0(l,x_{l,n(l)})}F(T^-_l(x),z)+\lambda^-\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^-_{0(l,u)}F(T^+_{(l,u)}(x),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{su}p^+_{(s,u)(l,x_{l,n(l)})}F(T^+_{(s,u)}(T^-_l(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}p^+_{(l,u)(l,x_{l,n(l)})}F(T^+_{(l,u)}(T^-_l(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\mu_{su}p^-_{(s,u)(l,v)}F(T^+_{(s,u)}(T^+_{(l,v)}(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\mu_{lu}p^{-}_{(l,u)(l,v)}F(T^{+}_{(l,u)}(T^{+}_{(l,v)}(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\nu_l(\bar{x}_l,j_l-1)\Phi_l\left(j_l,z_{l,j_l}\right)\left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x),z)}{\partial z_{l,j_l-1}}\right)_{z_{l,j_l-1}=0}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(\bar{x}_l,j_l+1)\Phi_l\left(j_l,z_{l,j_l}\right)\left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x),z)}{\partial z_{l,j_l+1}}\right)_{z_{l,j_l+1}=0},\ x\in X.$$

Для данных уравнений предполагается, что если аргумент функции $F(x,z)$ не принадлежит фазовому пространству, т.е. если $x\notin X$, то $F(x,z)=0$.

Полученная система разбивается на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\left(\lambda^{+}+\lambda^{-}+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}\right)F(x,z)= \qquad (10)$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}p_{(l,u)0}F(T^{+}_{(l,u)}(x),z)+$$

$$+\lambda^{+}\sum_{l=1}^{N}p^{+}_{0(l,x_{l,n(l)})}F(T^{-}_{l}(x),z)+\lambda^{-}\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^{-}_{0(l,u)}F(T^{+}_{(l,u)}(x),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{su}p^{+}_{(s,u)(l,x_{l,n(l)})}F(T^{+}_{(s,u)}(T^{-}_{l}(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}p^{+}_{(l,u)(l,x_{l,n(l)})}F(T^{+}_{(l,u)}(T^{-}_{l}(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\mu_{su}p^{-}_{(s,u)(l,v)}F(T^{+}_{(s,u)}(T^{+}_{(l,v)}(x)),z)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\mu_{lu}p^{-}_{(l,u)(l,v)}F(T^{+}_{(l,u)}(T^{+}_{(l,v)}(x)),z),$$

$$\vartheta_l(\bar{x}_l,j_l)\left(\frac{\partial F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}-\left(\frac{\partial F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}\right)_{z_{l,j_l}=0}\right)= \qquad (11)$$

$$=\nu_l(\bar{x}_l,j_l-1)\Phi_l\left(j_l,z_{l,j_l}\right)\left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x),z)}{\partial z_{l,j_l-1}}\right)_{z_{l,j_l-1}=0}+$$

$$+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l+1)\Phi_l\left(j_l,z_{l,j_l}\right)\left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x),z)}{\partial z_{l,j_l+1}}\right)_{z_{l,j_l+1}=0}.$$

Функции распределения вероятностей $F(x,z)$, определённые формулами (6)–(8), являются решениями уравнений (10)–(11), а следовательно, и уравнений (9).

Действительно, подставим (6) в (10), приведём подобные слагаемые и, учитывая уравнения трафика (1)–(2), получим тождество. Подставляя (6) в (11) и учитывая (3), также получим тождество.

Теорема доказана.

Из теоремы с учётом равенства $P(x)=F(x,+\infty)$ имеем:

Следствие. Если выполняются соотношения (3)–(4), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $\{P(x),x\in X\}$ не зависит от функционального вида распределения $\Phi_l\left(j_l,\widetilde{u}\right)$ и имеет вид

$$P(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$ определяются по формулам (7)–(8).

Заключение

В настоящей работе установлены условия независимости стационарного распределения вероятностей состояний открытых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, положительными и отрицательными заявками разных типов от вида законов распределения величин работ, требующихся для переключения режимов функционирования приборов в узлах, когда дисциплиной обслуживания является LCFS PR (абсолютный приоритет поступающего требования с дообслуживанием). При этом установлено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product Form Solution // Neural Computation. 1989. V. 1. P. 502–510.
2. *Gelenbe E., Muntz R.R.* Probabilistic Models of Computer Systems. Part I: Exact Results // Acta Inform. 1976. № 7. P. 35–60.
3. *Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю.* Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2002. № 6(15). С. 183–188.
4. *Нуеман А.Ю.* Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1 (1). С. 90–93.
5. *Нуеман А.Ю.* Сети массового обслуживания с ненадежными приборами и отрицательными заявками // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы V Респ. науч. конф. студентов и аспирантов. Гомель, 18–20 марта 2002 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. Гомель, 2002. С. 179–180.
6. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания : учеб. М. : РУДН, 1995. 529 с.
7. *Старовойтов А.Н.* Сети с многорежимным обслуживанием, отрицательными заявками и произвольным временем пребывания в режимах // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2007. № 6(45). С. 193–198.
8. *Летунович Ю.Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием // Современные информационные компьютерные технологии : сб. науч. ст. : в 2 ч. / ГрГУ им. Я. Купалы. Гродно, 2008. С. 97–99. Ч. 2.
9. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М. : Физматлит, 2004. 772 с.

Ерёмина Александра Рафаэловна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: a.eremina@grsu.by
Малинковский Юрий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: Malinkovsky@gsu.by
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
Республика Беларусь

Поступила в редакцию 23 сентября 2015 г.

Eryomina Alexandra R., Malinkovskiy Yury V. (Yanka Kupala State University of Grodno, Francisk Skorina Gomel State University, Republic of Belarus).

Invariance of the stationary distribution of queuing networks with multimode strategies and negative demands.

Keywords: queueing network; invariance; multimode strategies; LCFS PR.

DOI: 10.17223/19988605/33/3

The open queueing network with two independent simplest incoming flows of positive and negative demands with λ^+ and λ^- corresponding intensities is considered in article.

Every demand of incoming flow of positive demands goes to l-unit independently of other demands and becomes the u-type demand, $u=\overline{1,M}$, with $p^+_{0(l,u)}$ probability ($\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^+_{0(l,u)}=1$). Every demand of incoming flow of negative demands goes to l-unit independently of other demands and becomes the u-type demand with $p^-_{0(l,u)}$ probability ($\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^-_{0(l,u)}=1$). Negative u-type demand, entering in l-unit, does not require the service. It reduces the number of u-type demands in this unit by one if the queue of the unit has u-type demands, and has no effect on the state of the unit otherwise.

After serving in l-unit u-type positive demand goes to k-unit instantly and independently of other demands as v-type positive demand with $p^+_{(l,u)(k,v)}$ probability and as v-type negative demand with $p^-_{(l,u)(k,v)}$ probability, and with $p_{(l,u)0}$ probability this u-type positive demand goes away from the network ($\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}(p^+_{(l,u)(k,v)}+p^-_{(l,u)(k,v)})+p_{(l,u)0}=1; l,k=\overline{1,N}; u,v=\overline{1,M}$).

The single line units can work in some strategies. Every strategy responds to different degree of serviceability. The dispatching rule of demands by device of l-unit is LCFS PR $(l=\overline{1,N})$.

The network condition at moment t is characterized by vector $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$, where condition of l-unit at moment t is vector $x_l(t) = (\overline{x}_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), ..., x_{l,n(l)}(t), j_l(t))$, $x_{l1}(t)$ is the type of demand, which stands on the final position in l-unit at moment t, $x_{l2}(t)$ is the type of demand, which stands on the penultimate position in l-unit at moment t, $x_{l,n(l)-1}(t)$ is the type of demand, which stands on the first position in l-unit at moment t, $x_{l,n(l)}(t)$ is the type of demand, which is servicing by device in l-unit at moment t, $n(l)$ is total amount of demands in l-unit, $j_l(t)$ is the number of device strategy in l-unit at moment t, $l = \overline{1, N}$.

Servicing time of u-type demand, located in l-unit at moment t, has the exponential distribution with μ_{lu} parameter.

The basic device strategy is strategy 0. Switching occurs only on the neighboring strategies. During switching the device from one strategy to another one the number of demands in the unit does not change.

For x_l conditions, where $0 \le j_l \le r_l$, the quantity of work, which is necessary for switching of device work strategy j_l, is random variable with arbitrary distribution function $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$ and expectation value $\eta_l(j_l)$.

The piecewise-linear Markovian process $\zeta(t) = \left(x(t), \psi(t)\right)$ is considered. This process is obtained by addition to $x(t)$ continuous component $\psi(t) = \left(\psi_{1,j_1(t)}(t), \psi_{2,j_2(t)}(t), ..., \psi_{N,j_N(t)}(t)\right)$, where $\psi_{lj_l(t)}(t)$ is quantity of work, which lefts to execute from moment t for switching of device work strategy to neighboring strategy in l-unit, if device works with j_l strategy.

Suppose that $P = \{P(x)\}$ is stationary distribution of state probabilities of $x(t)$ process; $F(x, z)$ are stationary distribution functions of state probabilities of piecewise-linear Markovian process $\zeta(t)$:

$$F(x,z) = F(x, z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, ..., z_{N,j_N}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} P\left\{x(t) = x; \psi_{1,j_1}(t) < z_{1,j_1}, \psi_{2,j_2}(t) < z_{2,j_2}; ...; \psi_{N,j_N}(t) < z_{N,j_N}\right\}.$$

It was proved that stationary distribution of network state probabilities is invariant in relation to functional form of distributions of work's quantities, which are necessary for switching of device work strategies.

REFERENCES

1. Gelenbe, E. (1989) Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product Form Solution. *Neural Computation*. 1. pp. 502-510.
2. Gelenbe, E. & Muntz, R.R. (1976) Probabilistic Models of Computer Systems. Part I: Exact Results. *Acta Inform*. 7. pp. 35-60.
3. Malinkovskiy, Yu.V. & Nueman, A.Yu. (2002) Invariantnaya mera markovskogo setevogo protsessa s mnogorezhimnymi strategiyami [The invariant measure of the Markov network process with multimode strategies]. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny*. 6(15). pp. 183-188.
4. Nueman, A.Yu. (2002) Otkrytye seti s mnogorezhimnymi strategiyami obsluzhivaniya i otritsatel'nymi zayavkami [Open networks with with multimode service strategies and negative demands]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1(1). pp. 90-93.
5. Nueman, A.Yu. (2002) [Queuing network with unreliable devices and negative demands]. *Novye matematicheskie metody i komp'yuternye tekhnologii v proektirovanii, proizvodstve i nauchnykh issledovaniyakh* [New mathematical methods and computer technology in design, production and research]. Proc. of the 5th Rep. Conf. of students and post-graduates. Gomel. 18th to 20th March 2002. Gomel: Gomel State University. pp. 179-180.
6. Bocharov P.P. & Pechinkin, A.V. (1995) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow: RUDN.
7. Starovoytov, A.N. (2007) Seti s mnogorezhimnym obsluzhivaniem, otritsatel'nymi zayavkami i proizvol'nym vremenem prebyvaniya v rezhimakh [Networks with the multimode service, negative demands and arbitrary time of staying in conditions]. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta im. F. Skoriny*. 6 (45). pp. 193-198.
8. Letunovich, Yu.E. (2008) Statsionarnoe raspredelenie sostoyaniy otkrytoy neodnorodnoy seti s mnogorezhimnymi strategiyami i nemedlennym obsluzhivaniem [Stationary distribution of states of open heterogeneous network with multimode strategies and immediate service]. In: *Sovremennye informatsionnye komp'yuternye tekhnologii* [Modern information computer technologies]. Grodno: GrSU im. Ya. Kupaly. pp. 97-99.
9. Ivnitskiy, V.A. (2004) *Teoriya setey massovogo obsluzhivaniya* [Theory of queuing networks]. Moscow: Fizmatlit.