ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 4 (33)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 510.63
DOI: 10.17223/19988605/33/8

В.В. Андреева, Т.П. Тарновская

СОКРАЩЕНИЕ РАНГА КОНЬЮНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕЙ КОРЕНЬ ЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (*проект № 14-19-00218*).

Предлагается метод поиска корня логического уравнения по возможности меньшего ранга. Поиск корня осуществляется с помощью *дерева разложения*. Сформулированы правила выбора переменной разложения, способствующие сокращению ранга корня логического уравнения. Сформулированы достаточные условия существования корня логического уравнения.
Ключевые слова: логическое уравнение; дерево разложения; троичные векторы.

Логические уравнения используются в различных приложениях [1]. Они широко применяются в электротехнике, комбинаторике, логике высказываний, целочисленном программировании и др. Принято представлять корни таких уравнений конъюнкциями. Требования к качеству корня в общем случае зависят от контекста задачи. Например, построение тестовых наборов для неисправности сводится к решению соответствующего логического уравнения с представлением решения в виде конъюнкции. Проверяющий тест для класса неисправностей задается совокупностью таких конъюнкций. Чем меньше ранги конъюнкций, тем больше возможностей для сокращения длины проверяющего теста [2].

В данной работе предлагается модификация алгоритма Закревского [3] поиска одного корня логического уравнения. Целью модификации является построение конъюнкции по возможности меньшего ранга. В общем случае поиск корня сводится к сокращенному обходу дерева. С целью сокращенного обхода на каждом шаге выбирается переменная разложения, способствующая ускорению поиска корня уравнения. В работе [3] предлагаются правила выбора переменной разложения, причем предпочтение отдается однородным переменным, которые способствуют быстрому поиску, но не сокращению ранга. В предлагаемой модификации выбирается такая переменная в очередной вершине дерева разложения, которая способствует сокращению ранга конъюнкции. Выбор переменной осуществляется среди конъюнкций минимального ранга, сопоставляемых вершине, причем выбирается не обязательно однородная переменная.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ДНФ $D = K_1 \vee, \ldots, \vee K_s$, зависящую от множества переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Представим D в виде троичной матрицы M (множеством троичных векторов), сопоставив каждой конъюнкции троичный вектор. Компоненты троичного вектора принимают значения из множества $\{0, 1, \text{x}\}$. Здесь символ x означает неопределенную компоненту, которая может принимать значение либо 0, либо 1. Значения $\{0, 1\}$ переменной троичного вектора будем называть *определенными*, значение x будем называть *неопределенным*. Троичный вектор, в котором определенные компоненты принимают только значение 1, будем называть *положительно однородным вектором* и *отрицательно однородным*, если определённые компоненты принимают только значение 0. Векторы, содержащие среди определенных компонент как 0, так и 1, будем называть *неоднородными*.

Однородным столбцом, соответствующим переменной x_i, в матрице троичных векторов M будем называть столбец, состоящий либо из значений {0, x}, либо {1, x}. Матрицу M будем называть совместимой, если в ней все столбцы однородны. *Максимально определенным* столбцом будем называть столбец, состоящий из максимального числа определенных компонент. В качестве примера рассмотрим ДНФ $D = x_1 \vee x_4 \vee x_2x_3x_4x_5 \vee x_1x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_1x_3x_4x_5x_6$, матрица M в этом случае будет иметь следующий вид. Здесь столбцы, соответствующие переменным x_1, x_2, x_3, являются *однородными*, а столбец, соответствующий переменной x_4, является *максимально определенным*. Очевидно, что некоторая конъюнкция r_i представляет корень уравнения $D = 0$, если она ортогональна каждой конъюнкции, представляемой строкой матрицы M. Ранг конъюнкции обозначим $rang_i$.

При анализе матрицы M будем придерживаться следующих правил.

Правило 1. Если в троичной матрице M присутствует троичный вектор, в котором определена всего одна компонента, то соответствующая ей переменная в конъюнкции r_i содержится с противоположным знаком инверсии. В этой ситуации из матрицы M могут быть удалены все троичные векторы, ортогональные троичному вектору, представляющему конъюнкцию r_i. У оставшихся троичных векторов соответствующая компонента может быть заменена значением x. Например, в рассматриваемом примере (табл. 1) два троичных вектора веса 1, тогда в конъюнкции r_i могут присутствовать две переменные с противоположным знаком инверсии, т.е. $\bar{x}_2, x_4$.

Таблица 1

$M =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_1	x	1	x	x	x	x
K_2	x	x	x	0	x	x
K_3	x	1	0	1	1	x
K_4	0	x	x	1	0	0
K_5	0	x	0	1	0	1

После упрощения матрица M будет иметь вид, представленный в табл. 2.

Таблица 2

$M =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_4	0	x	X	x	0	0
K_5	0	x	0	x	0	1

Если в результате упрощения в оставшейся матрице будет получен вектор, состоящий только из значений x, то рассматриваемое уравнение *не имеет решения*.

Правило 2. Если в матрице присутствует однородный полностью определенный монотонный столбец, то соответствующая переменная включается в решение конъюнкцию r_i с противоположным знаком инверсии. Троичный вектор, представляющий конъюнкцию, будет ортогонален всем векторам матрицы M, следовательно, является корнем.

Например, в матрице M (табл. 2), полученной после упрощения, переменной x_1 соответствует однородный столбец, следовательно, эту переменную можно включить в r_i, тогда $r_i = x_1\bar{x}_2x_4$.

Эти правила будут использоваться при отыскании корня уравнения $D = 0$, где D – произвольная ДНФ.

2. Поиск корня логического уравнения $D = 0$

Рассмотрим общую процедуру построения дерева разложения относительно некоторой переменной x_i троичной матрицы M [4]. Из вершины дерева, отмеченной переменной x_i, исходят три дуги, помеченные значениями {0,1,x}. Каждой дуге сопоставляется соответствующее подмножество троичных векторов, полученное путем разбиения исходного множества M относительно переменной x_i на три подмножества, обозначим их следующим образом: $M^1(x_i = 1)$, $M^0(x_i = 0)$, $M^x(x_i = \text{x})$ по значениям $\{0,1,\text{x}\}$(рис. 1).

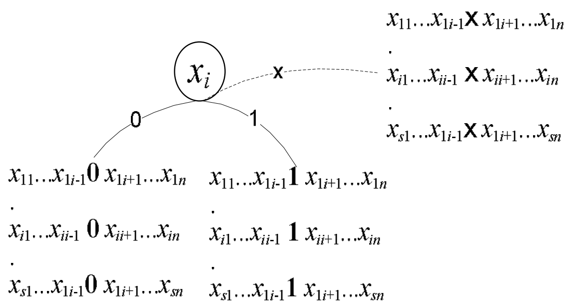

Рис. 1. Дерево разложения по переменной x_i

Среди множеств $M^1(x_i =1)$, $M^0(x_i =0)$ выбирается множество большей мощности, и переменная x_i включается в конъюнкцию r_i со знаком инверсии, обеспечивающим ортогональность всем элементам выбранного множества. Во втором из рассматриваемых множеств переменной x_i присваивается значение x, и полученное в результате множество троичных векторов объединяется с $M^x(x_i = \text{x})$. Новое множество M сопоставляется со следующим шагом разложения. При этом дерево корректируется, так что из вершины, помеченной x_i, исходят две дуги, одна из которых помечена определенным значением, а другая значением x. Если на очередном шаге разложения выясняется, что конъюнкция r_i не может быть достроена до корня уравнения, т.е. в множестве, сопоставляемом дуге, отмеченной переменной x, присутствует вектор из одних неопределенных компонент, то возвращаемся в ближайшую вершину дерева разложения, для которой оба множества $M^1(x_i =1)$, $M^0(x_i =0)$ не пусты.

2.1. Достаточные условия существования корня логического уравнения

Ведем следующие обозначения:

M^+ – подмножество положительно однородных векторов;

M^- – подмножество отрицательно однородных векторов;

M^* – подмножество неоднородных векторов.

Утверждение 1. Если множество $M = M^*$, то корень уравнения существует.

Доказательство. Пусть множество M состоит только из неоднородных троичных векторов. Значения определенных компонент в неоднородном троичном векторе принимают 0 и 1, следовательно, найдется такой троичный вектор, представляющий корень уравнения, который будет ортогонален всем векторам из M либо только по компонентам 1, либо только по компонентам 0. Утверждение доказано.

Рассмотрим множество M (табл. 3), вектор 1x11xx, ортогональный всем троичным векторам по определенному значению 0, а троичный вектор x0x0xx ортогонален всем троичным векторам по значению 1.

Таблица 3

$M =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_1	**0**	1	x	x	**0**	x
K_2	1	1	x	**0**	x	x
K_3	x	1	**0**	1	1	x
K_4	**0**	x	x	1	**0**	**0**

Утверждение 2. Если множество $M = M^* \cup M^-$ либо $M = M^* \cup M^+$, то корень уравнения существует.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $M = M^* \cup M^-$, т.е. наряду с неоднородными векторами присутствуют однородно отрицательные векторы, следовательно, в каждом векторе присутствуют определенные компоненты со значением 0, тогда найдется такой троичный вектор, представляющий корень уравнения, который будет ортогонален всем векторам из M по компонентам со значением 0. В случае $M = M^* \cup M^+$ найдется такой троичный вектор, представляющий корень уравнения, который будет ортогонален всем векторам из M по компонентам со значением 1. Утверждение доказано.

Например, во множестве M (табл. 4) вектор 1x1xx ортогонален всем троичным векторам по определенным компонентам со значением 0.

Таблица 4

$M =$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	K_1	**0**	x	x	x	**0**	x
	K_2	**0**	**0**	x	**0**	x	x
	K_3	x	1	**0**	1	1	x
	K_4	**0**	x	x	1	**0**	**0**

В множестве троичных векторов M выполним упрощения по правилам 1, 2.

Пусть $M^{**} = M^+ \cup M^-$.

Утверждение 3. Если множество M представляется в виде $M = M^* \cup M^+ \cup M^-$ и M^{**} совместимо, то корень уравнения существует.

Доказательство. Пусть подмножество M^{**} совместимо, тогда найдем пересечение между этими троичными векторами. Результатом пересечения является *неоднородный* вектор V. Получим вектор V^* путем инвертирования всех значений вектора V, таким образом, V^* ортогонален всем векторам из M^{**}. Так как M^*состоит из неоднородных векторов, то найдется вектор V^{**}, совместимый с вектором V^*, ортогональный всем элементам из M^*. Утверждение доказано**.**

Например, в множестве M (табл. 5) выделим множество M^{**}, которое состоит из двух троичных векторов, 11xxxx и xxx000. Результатом их пересечения будет вектор V = 11x000, получим вектор V^* = 00x111. По утверждению 3 найдется вектор, совместимый с V^* и ортогональный всем векторам из M^*. В нашем случае V^{**} = x0xx1x.

Таблица 5

$M=$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	K_1	1	**1**	x	x	X	x
	K_2	x	x	x	0	**0**	0
	K_3	x	**1**	0	1	1	x
	K_4	0	x	x	1	**0**	0
	K_5	0	x	0	1	**0**	1

Например, полученный вектор V^{**} поглощает вектор V^*, тогда результирующий вектор $R = V^{**}$, он содержит меньшее количество компонент и ортогонален всем элементам матрицы M (табл. 5).

2.2. Выбор переменой разложения

Предлагаются следующие правила выбора переменной разложения.

Рассмотрим множество векторов, представляемое матрицей M. Исключим из матрицы все поглощаемые векторы, далее упорядочим векторы по возрастанию их рангов. Выделим группу векторов, содержащую троичные векторы *минимального ранга*.

В этой группе выделяем множество монотонных векторов $M^+(M^-)$ и среди последних векторов выполняем поиск максимально определенных столбцов, среди выбранных столбцов предпочтение отдается тому, который имеет максимальное число определенных компонент в множестве M. Сопоставляемая этому столбцу переменная выбирается в качестве переменной разложения.

В случае отсутствия однородных векторов в группе предпочтение отдается столбцу, который имеет максимальное число определенных компонент в множестве M. Если существует несколько неоднородных столбцов с максимальным числом определенных компонент, то для каждого столбца подсчитываем число единичных и нулевых компонент. Предпочтение отдаем столбцу с максимальным числом либо значений 0, либо значений 1. Иначе выбираем любой столбец с максимальным числом определенных компонент. Сопоставляемая ему переменная выбирается в качестве переменной разложения.

Рассмотрим пример (табл. 6). Здесь K_1, K_2, K_3, K_4 образуют подмножество троичных векторов минимального ранга, в котором присутствуют однородно отрицательные троичные векторы K_1, K_2.

Таблица 6

$M=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_1	**x**	**x**	**x**	**x**	**0**	**0**
K_2	**x**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**
K_3	**1**	**x**	**0**	**x**	**x**	**x**
K_4	**x**	**x**	**x**	**1**	**0**	**x**
K_5	1	x	1	0	x	x
K_6	1	1	x	0	x	x
K_7	x	1	0	x	0	x
K_8	1	1	x	x	0	x
K_9	x	1	1	x	x	0

По утверждению 2 корень уравнения существует. В качестве переменной разложения выбираем максимально определенную компоненту из множества однородно отрицательных векторов, а именно компоненту, отмеченную переменной x_6. Из вершины, помеченной x_6, исходят две дуги: одна дуга, помеченная значением 0, вторая дуга, помеченная значением x. Для множества, сопоставляемого дуге со значением x, разложение продолжается, как показано на (рис. 2). Корень уравнения найден, если на очередном шаге разложения множество, сопоставляемое дуге со значением x, оказывается пустым. Построенная конъюнкция представляет корень уравнения. Для рассматриваемого примера $r = \bar{x}_1 x_5 x_6$.

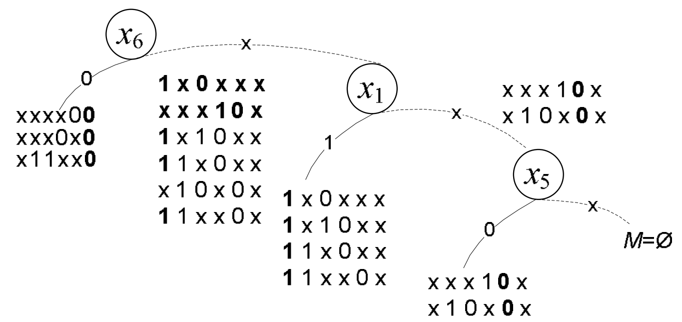

Рис. 2. Дерево разложения по переменной x_i

Рассмотрим множество M, представленное в табл. 7 и 8, для которого корня не существует. Дерево разложения представлено на рис 3.

Таблица 7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_1	1	x	x	x	x	0
K_2	1	x	1	x	1	x
K_3	1	x	x	x	0	1
K_4	1	0	x	x	1	1
K_5	1	1	0	x	x	1
K_6	0	0	x	x	1	x
K_7	0	1	x	x	x	1

Таблица 8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
K_8	0	x	x	x	0	1
K_9	0	x	x	0	1	0
K_{10}	0	1	x	1	0	0
K_{11}	0	1	x	1	1	0
K_{12}	0	x	1	x	0	0
K_{13}	0	0	0	x	0	0

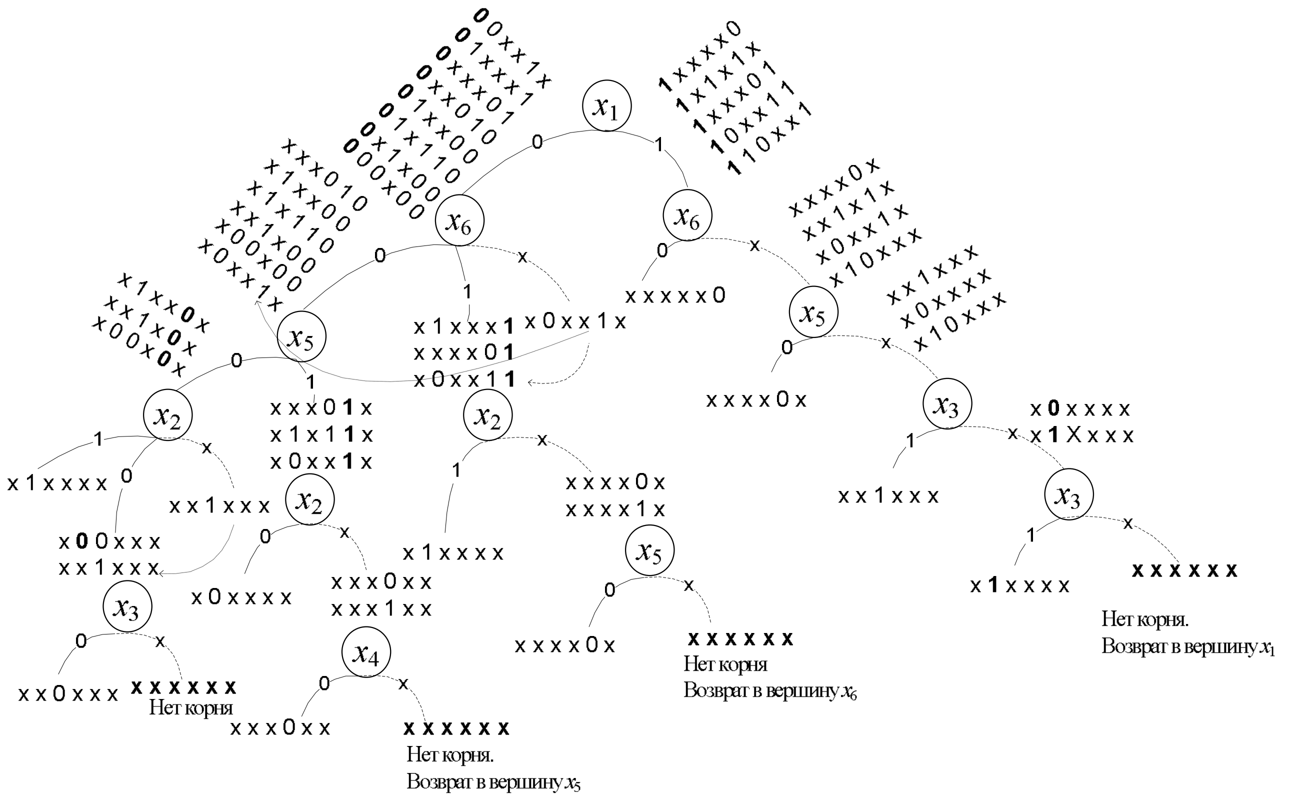

Рис. 3. Дерево разложения множества *M* в случае отсутствия корня

3. Экспериментальные результаты

Предложенная модификация программно реализована и испытана на случайно сгенерированных примерах, полученных с помощью программы [5]. Генерировались примеры разной размерности и разной разреженности по неопределённым компонентам. Результаты сравнивались с алгоритмом Закревского. Как показали экспериментальные результаты (см. табл. 9, 10), предложенная модификация сокращает ранг конъюнкции.

Таблица 9

№	*i*	*t*	*%dc*	*rZ*	*rDR*
1	100	500	15	39	37
2	100	500	25	22	19
3	100	1000	50	37	34
4	200	1000	60	40	37
5	200	1300	70	57	51
6	300	1500	75	35	30
7	300	1500	85	92	63

Таблица 10

№	*i*	*t*	*%dc*	*rZ*	*rDR*
8	350	2000	25	150	148
9	350	3000	30	120	116
10	350	3000	35	220	213
11	400	3000	45	223	219
12	400	3000	65	131	126
13	500	3000	70	157	150
14	500	3000	85	194	186

Здесь ***i*** – длина вектора, ***t*** – число векторов матрицы *M*, ***%dc*** – процент неопределенных компонент, *rZ* – ранг корня, полученного с помощью алгоритма Закревского, ***rDR*** – ранг корня, полученного с помощью предложенного алгоритма.

Заключение

В работе предложена модификация алгоритма Закревского поиска одного корня логического уравнения. Целью модификации является построение корня по возможности меньшего ранга. Корень

уравнения строится с помощью дерева разложения. Предложены эвристики выбора переменной разложения, ориентированные на сокращение ранга конъюнкции, представляющей корень уравнения. Эффективность предложенной модификации подтверждается экспериментально. Сформулированы достаточные условия существования корня уравнения $D = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crama Y., Hammer P.L.* Boolean functions: theory, algorithms, and applications. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2011. P. 440.
2. *Andreeva V.* Test minimization technique for multiple stuck-at faults of combinational circuits // Proc. 8th East-West Design & Test International Symposium. Saint Petersburg, Russia. 2010. P. 168–170.
3. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. М. : Едиториал УРСС, 2003. 96 с.
4. *Sorudeykin K., Andreeva V.* Decomposition Tree – based Compaction Procedure with Iteration Steps for Interconversional Layouts of Tasks // Proc. 12th IEEE East-West Design & Test Symposium, 2014. Kiev, Ukraine, 2014. P. 173–178.
5. *Měchura T.* Random Circuits Generators // Czech Technical University in Prague. 2008. URL: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Circ_Gen (дата обращения: 15.11.2015).

Андреева Валентина Валерьевна, канд. техн. наук. E-mail: valenrina.andreeva@mail.tsu.ru
Тарновская Татьяна Павловна. E-mail: tarnovskayat@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 7 октября 2015 г.

Andreeva Valentina V., Tarnovskaya Tatyana P. (Tomsk State University, Russian Federation).
Reducing the rank of the conjunction, representing the root of the logical equation.
Keywords: boolean equation; decomposition tree; ternary vectors.

DOI: 10.17223/19988605/33/8

In this paper the modification of Zakrevskij algorithm of finding a root of logical equation has been suggested. A root of logic equation $D = 0$ is representing by product r_i. The purpose of this modification is to find a product that has possibly smaller rank. As a rule finding the root of logic equation is reduced to tree traversal. Here, we deal with $D = 0$, where D is SoP (Sum of Products), that is represented as a set of ternary vectors. The ternary vector is a partially specified bit vector, i.e. elements (variables x_i) of it can contain values {1,0, x}. The values '1' and '0' are *determined values*. The value x is *don't care symbol*. Note this set as *M*.

The root of the equation is formed with the decomposition tree, by variables x_i. In general, from the vertex of the tree marked by variable x_i, run three branches labeled with the values {0,1,x}. Each branch is associated with a corresponding subset of ternary vectors obtained by dividing a set M with respect to variable x_i into three subsets $M^1(x_i = 1)$, $M^0(x_i = 0)$, $M^x(x_i = \mathrm{x})$. The variable x_i from the set with maximum power is included into to product r_i with the opposite sign of inversion. The decomposition tree is changed so that from the vertex labeled x_i, run two branches, one of which is labeled with a determined value, but another is labeled with value x. If the next step of decomposition fails that is the product r_i cannot be derived as the root of the equation, then we return to the closest vertex of decomposition tree for which both sets $M^1(x_i = 1)$, $M^0(x_i = 0)$ is not empty. The root of the equation is found when the set corresponding to branch labeled x is empty.

In this paper variable selection heuristics have been proposed. The experimental results confirm advantages of this approach. The sufficient conditions for the existence of the root of logic equation $D = 0$ have been formulated.

REFERENCES

1. Crama, Y. & Hammer, P.L. (2011) *Boolean functions: theory, algorithms, and applications*. Cambridge, New York: Cambridge University Press. pp. 440.
2. Andreeva, V. (2010) Test minimization technique for multiple stuck-at faults of combinational circuits. *Proc. 8th East-West Design&Test International Symposium*. St. Petersburg. pp. 168-170.
3. Zakrevskiy, A.D. (2003) *Logical equations*. Moscow: Editorial URSS.
4. Sorudeykin, K. & Andreeva, V. (2014) Decomposition Tree – based Compaction Procedure with Iteration Steps for Interconversional Layouts of Tasks. *Proc. 12th IEEE East-West Design & Test Symposium.* Kiev. pp. 173-178.
5. Měchura, T. (2008) *Random Circuits Generators*. [Online] Available from: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Circ_Gen